Глава 3. Частные производные и дифференциалы высших порядков

3.1. Частные производные высших порядков

Ограничимся рассмотрением функции $u = f(x, y, z)$, определенной на множестве $D(f) \subseteq R^3$.

Пусть на некотором множестве $D_1 \subseteq D(f)$ существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Они в свою очередь есть функции от аргументов x, y, z и можно поставить вопрос о нахождении частных производных от этих функций по x, y, z.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \underline{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}}; \quad \underline{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}};$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \underline{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}};$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}}; \quad \underline{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}}; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Каждая производная, найденная от производной первого порядка называется производной второго порядка.

Производные второго порядка, в которых первая и вторая производная находятся по разным аргументам, называются смешанными производными второго порядка.

Пример. Найдем все частные производные второго порядка функции $z = x^2 e^y$.

Область определения данной функции $D = R^2$.

$z'_x = 2xe^y; \quad z'_y = x^2 e^y.$

$z'_{xx} = 2e^y; \quad z'_{xy} = 2xe^y; \quad z'_{yx} = 2xe^y; \quad z'_{yy} = x^2 e^y.$

Теорема 1. Пусть

1. Функция $z = f(x, y)$ определена на $D(f)$;
2. На $D(f)$ существуют первые частные производные $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$, а также смешанные производные второго порядка $f_{xy}'(x, y)$, $f_{yx}'(x, y)$;
3. Смешанные производные $f_{xy}'(x, y)$, $f_{yx}'(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in D(f)$.

Тогда $f_{xy}'(x_0, y_0) = f_{yx}'(x_0, y_0)$.

Доказательство Т.8.

Рассмотрим выражение

$$W = \frac{(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk},$$

где $h, k \neq 0$, например $h, k > 0$, причем (x_0+h, y_0+k), (x_0+h, y_0), $(x_0, y_0+k) \in D(f)$.

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}.$$

Выразите

$$W=\frac{(f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk}$$

через $\varphi(x)$.

<u>Выясните : существует ли $\varphi'(x)$.</u>

Тогда $W = \dfrac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$. Для φ

существует $\varphi'(x) = \dfrac{f_x'(x, y_0 + k) - f_x'(x, y_0)}{k}$.

Тогда $W = \dfrac{\varphi_x'(x_0 + \theta_1 h) \cdot h}{h} = \varphi'(x_0 + \theta_1 h) =$

$=$ Какая теорема использована для такого представления? Почему ее можно применить? $=$

$$= \frac{f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)}{k} \overset{\substack{\text{по Т. Лагранжа} \\ \text{на } [y_0, y_0+k]}}{=}$$

$$= \frac{f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)}{k} \cdot k = f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)$$

Введем вспомогательную функцию

$$\psi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}, \text{ тогда}$$

аналогично получим $W = f''_{xy}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)$.

Так как f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то устремив $h \to 0, k \to 0$, получим $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

<u>Поясните предельный переход!</u>

3.2. Дифференциалы высших порядков

Пусть $z = f(x, y)$ дифференцируема на некотором множестве D, тогда существует дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, который является функцией от x и y.

Почему наложили условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$?

Если предположить существование непрерывных производных второго порядка от функции $z = f(x, y)$, то и dz будет иметь производные и можно ставить вопрос нахождения дифференциала от dz.

$$d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)_x' dx +$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)_y' dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

Какое условие, наложенное на производные второго порядка функции f здесь использовано?
И как?

Дифференциал от дифференциала dz называется дифференциалом второго порядка $d(dz) = d^2 z$.

Итак, $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$.

Можно поставить задачу нахождения дифференциала от дифференциала второго порядка $d(d^2z)$. Это будет дифференциал третьего порядка (при условии его существования)

$$d(d^2z) = d^3z.$$

$$d^3 z = d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 \right)_x' dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 \right)_y' dy =$$

$$
= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}(dy)^2 dx +
$$

$$
+ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx(dy)^2 +
$$

$$
+ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy +
$$

$$
+3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3.
$$

Можно ставить вопрос о нахождении $d(d^{(n\text{-}1)})$.

Это будет дифференциал n - го порядка. $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Он будет существовать при условии существования производных от данных функций до n - го порядка включительно. Если все производные непрерывны,

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

3.3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Запишем формулу Тейлора для функции двух переменных. Если функция имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) все частные производные до $(n+1)$ порядка включительно, то формула Тейлора для нее будет иметь вид :

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{d^2f(x_0,y_0)}{2!}+\cdots+$$

$$+\frac{d^nf(x_0,y_0)}{n!}+r_n,\ \text{где}\ r_n=\frac{d^{(n+1)}f(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)}{(n+1)!}.$$

Или

$$\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{d^2f(x_0,y_0)}{2!}+\cdots+\frac{d^nf(x_0,y_0)}{n!}+r_n.$$

Глава 4. Экстремум функции нескольких переменных

4.1. Понятие экстремума функции нескольких переменных

Определение 1.

Говорят, что функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет нестрогий максимум (минимум) в точке $(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) \in D(f)$, если существует окрестность $U(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n)$ такая, что в любой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n)$ выполняется неравенство

$$f(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) \ge f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\left(f(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right).$$

При этом число $f(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ называют нестрогим максимумом (минимумом) и обозначают $f_{\max}(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ или $f_{\min}(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$.

Различают два вида экстремумов : строгий и нестрогий.

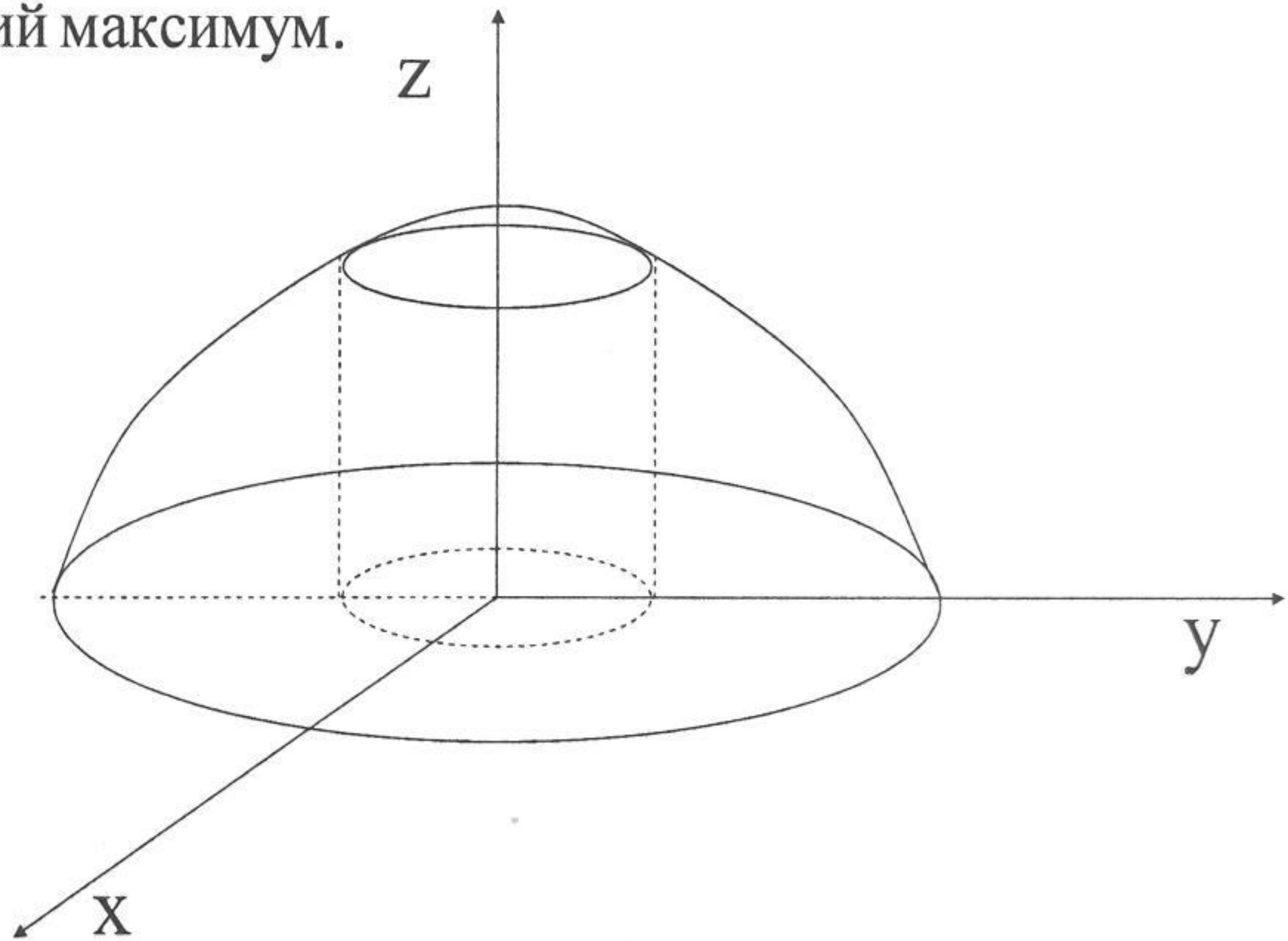
Определение 2.

Говорят, что функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет строгий максимум (минимум) в точке $(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) \in D(f)$, если существует такая проколотая окрестность $U^*(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n)$, что в любой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U^*(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n)$ выполняется неравенство

$$f(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) > f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\left(f(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) < f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right).$$

Пример. Функция $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ имеет в точке $(0,0)$ строгий максимум.



4.2. Необходимое условие экстремума

Теорема 1.

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет экстремум в некоторой точке $(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) \in D(f)$, то все частные производные первого порядка в этой точке, если они существуют, необходимо равны нулю.

Доказательство Т.1.

Пусть f имеет в точке $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ экстремум, например, максимум. Существует такая окрестность $U^*\left((x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n), \varepsilon\right)$, что

$$\left(\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U^*\left((x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n), \varepsilon\right)\right)$$
$$\left(f(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n) > f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) \quad (1)$$

Почему?

Зафиксируем значения аргументов $x \; = x_2^0, \ldots, x_n^0$. Тогда

$$\left(\forall (x_1, x^0_2, \ldots, x^0_n) \in U^*\left((x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n), \varepsilon\right)\right)$$
$$\left(f(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n) > f(x_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)\right) \quad (2)$$

Почему?

Рассмотрим функцию $\varphi(x_1) = f(x_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n)$, тогда в силу справедливости (2) для любого x_1 из некоторой окрестности точки x_1^0 выполняется неравенство

$\varphi(x_1^0) > \varphi(x_1)$, что .... | вставьте пропущенные слова

функции одной переменной означает, что x_1^0 – точка максимума функции $\varphi(x_1)$.

А тогда $\varphi'(x_1^0) = 0$, если она существует | почему?

Последнее означает $\varphi'(x_1^0) = f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$

4.3. Достаточное условие экстремума функции двух переменных

Теорема 2. Если функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные до второго порядка включительно, причем $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, а вторые частные производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то функция в этой точке :

1) при $\Delta > 0$, где (*) $\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f'_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$ имеет экстремум, а именно максимум, если $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, и минимум, если $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$;

2) при $\Delta < 0$ не имеет экстремума.

Доказательство Т.2. Так как по условию теоремы $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, то выполнено ......?...... условие экстремума и точка (x_0, y_0) является подозрительной на экстремум.

Что нужно проверить, чтобы выяснить является ли она точкой экстремума?

Для выяснения того является ли точка (x_0, y_0) точкой экстремума необходимо проверить, сохраняется ли знак приращения функции $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

На основании чего?

Применим к функции f формулу Тейлора при $n = 2$:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\underline{f''_{xx}(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y)(\Delta x)^2 +}$$

$$\underline{+2f''_{xy}(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y)\Delta x \Delta y +}$$

$$\underline{+f''_{yy}(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y)(\Delta y)^2\Big)}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1 \quad (**)$$

<u>Поясните как найдено выражение в спроследней скобке</u>

По условию $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, значит первые два слагаемые в правой части равенства (**) обращаются в нуль.

Обозначим $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$,

В силу непрерывности вторых производных функции f в точке (x_0, y_0): $f''_{xx}(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) = A + \alpha$,

$f''_{xy}(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) = B + \beta$,

$f''_{yy}(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y) = C + \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \to 0$

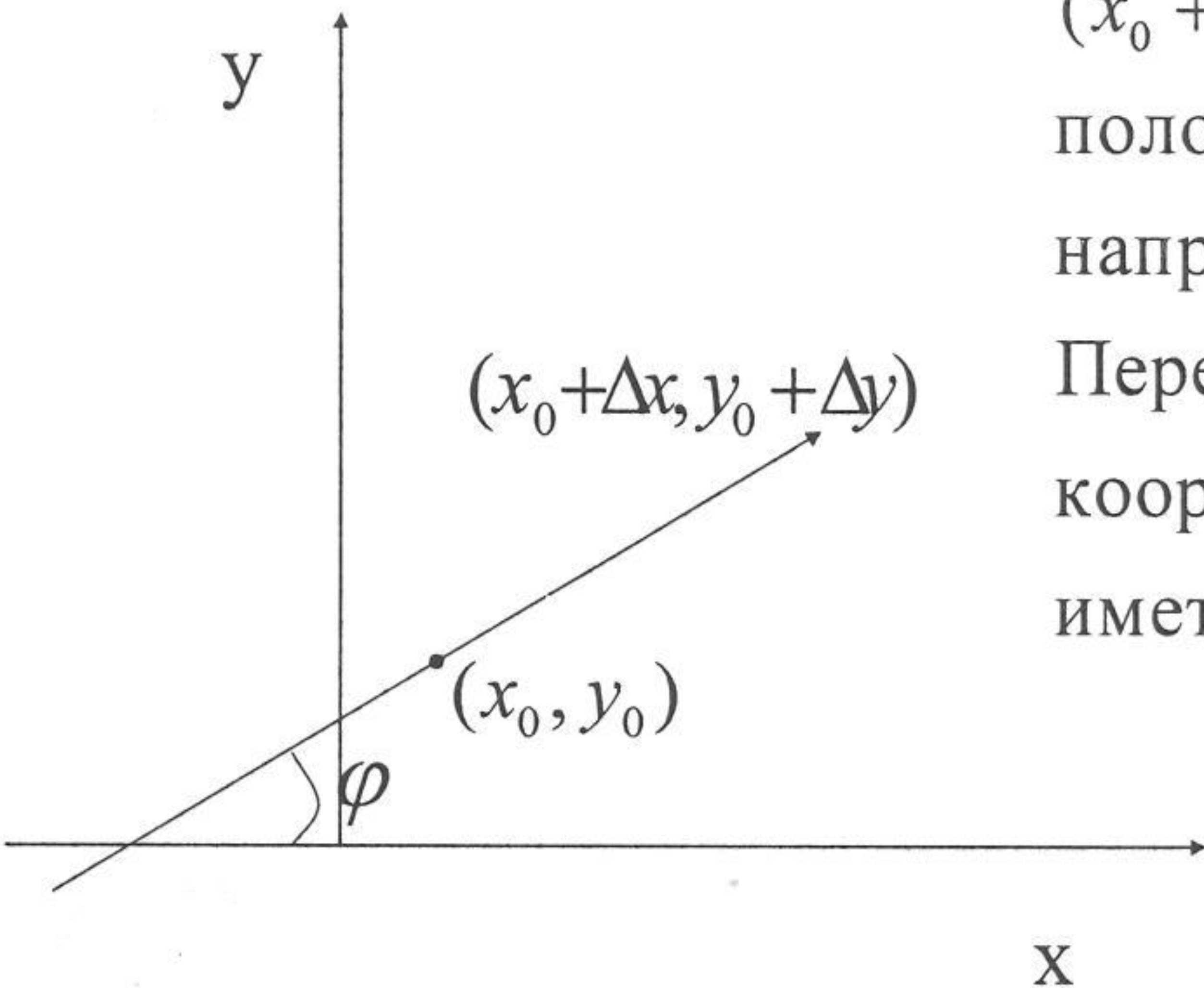
при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Тогда

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\Big((A+\alpha)(\Delta x)^2 + 2(B+\beta)\Delta x\Delta y + (C+\gamma)(\Delta y)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2 + \alpha(\Delta x)^2 + 2\beta\Delta x\Delta y + \gamma(\Delta y)^2\Big).$$

Обозначим через φ угол, образованный вектором, началом которого является точка (x_0, y_0), а концом



$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ с положительным направлением оси OX. Переходя к полярным координатам будем иметь : $\Delta x = \rho \cdot \cos\varphi$,

$$y = \rho \cdot \sin\varphi.$$

Тогда $\Delta f(x_0, y_0)$ принимает вид : $\Delta f(x_0, y_0) =$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big(\big(A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi\big) +$$

$$+\big(\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi\big)\Big).$$

Обозначим

$$A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = P(\varphi),$$

$$\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi = \omega(\rho,\varphi),$$

и получим $\Delta f(x_0, y_0) = \dfrac{\rho^2}{2}\big(P(\varphi) + \omega(\rho,\varphi)\big)$.

Ниже убедимся, что знак $\Delta f(x_0, y_0)$ зависит главным образом от знака квадратного трехчлена:

$$P(\varphi) = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi.$$

Проведем исследование знака $P(\varphi)$ в связи с рассмотрением его дискриминанта $D = B^2 - AC$ или выражения $\Delta = AC - B^2$.

1) Пусть $\Delta = AC - B^2 > 0$, т.е. дискриминант

$$D = B^2 - AC < 0.$$

Предполагая, что $\sin\varphi \neq 0$, перепишем

$P(\varphi) = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi$ в виде:

$$P(\varphi) = \sin^2\varphi\left(\underbrace{Actg^2\varphi + 2Bctg\varphi + C}_{P_1(ctg\varphi)}\right).$$ Здесь $A \neq 0$,

т. к., иначе $\Delta = -B^2 \leq 0$, что противоречит условию.

Так как дискриминант трехчлена $P_1(ctg\varphi)$ $D = B^2 - AC < 0$, то $P_1(ctg\varphi)$ при всех действительных значениях $ctg\varphi$ сохраняет знак, совпадающий со знаком коэффициента при старшем члене – A.

Тоже самое верно и при $\sin\varphi = 0$, т.к. в этом случае $P(\varphi) = A\cos^2\varphi = A(1-\sin^2\varphi) = A$. Рассмотрим $|P(\varphi)|$ – это положительная непрерывная функция на $[-\pi;\pi]$. Она принимает на этом отрезке наименьшее значение m: $|P(\varphi)| \geq m > 0$.

Обратимся теперь к квадратному трехчлену

$$\omega(\rho,\varphi)=\alpha\cos^2\varphi+2\beta\sin\varphi\cos\varphi+\gamma\sin^2\varphi.$$

Оценим его по модулю :

$$\left|\omega(\rho,\varphi)\right|\leq|\alpha|+2|\beta|+|\gamma| \quad \Big| \quad \text{почему?}$$

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей и $|\sin\varphi| \le 1$, $|\cos\varphi| \le 1$.

В силу того, что $\alpha, \beta, \gamma \to 0$ при $\rho \to 0$, при достаточно малых α, β, γ $|\omega(\rho, \varphi)| < m$.

Тогда знак $\Delta f(x_0, y_0)$ будет совпадать со знаком $P(\varphi)$, т.е. в данном случае со знаком A.

Если $A = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, то во взятой окрестности точки (x_0, y_0) $\Delta f(x_0, y_0) < 0$, т. е. $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0$, откуда $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0)$, что по определению экстремума означает, что f в точке (x_0, y_0) имеет максимум.

Если $A = f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ и f имеет в точке (x_0, y_0) минимум.

2) Пусть теперь $\Delta = AC - B^2 < 0$.

a) Предположим, что $A \neq 0$, а для определенности положим $A > 0$.

Запишем $P(\varphi)$ в виде:

$$P(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\left(A\cos\varphi + B\sin\varphi\right)^2 + \left(AC - B^2\right)\sin^2\varphi\right).$$

Если положить $\varphi = 0$, то $P(0) = A^2 > 0$.

Если же положить $\varphi = \varphi_2$, где φ_2 определяется из условия $ctg\varphi_2 = -\frac{B}{A}$ $(A \neq 0)$, то окажется $A\cos\varphi_2 + B\sin\varphi_2 = 0$ и будем иметь

$$P(\varphi_2) = \frac{1}{2}\left(AC - B^2\right)\sin^2\varphi < 0.$$

Поскольку в любой окрестности точки (x_0, y_0) существуют как точки, в которых $\varphi = 0$, так и точки, в которых $\varphi = \varphi_2$, то $P(\varphi)$ не сохраняет знак в любой окрестности точки (x_0, y_0), а слагаемое $\omega(\rho, \varphi)$ может быть сделано сколь угодно малым. Значит $\Delta f(x_0, y_0)$ не сохраняет знак, и функция в точке (x_0, y_0) не имеет эксремума.

б) Если $A < 0$, путем аналогичных рассуждений придем к тому же заключению.

в) Если $A = 0$, то $P(\varphi) = 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = \sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi)$, причем $B \neq 0$, т.к. иначе имели бы $\Delta = AC - B^2 = 0$, что противоречит условию.

Если взять достаточно малый положительный угол $\varphi = \varphi_1$, то очевидно $| C \sin \varphi_1 | < 2 | B \cos \varphi_1 |$. При таком выборе φ_1, знак выражения $2B \cos \varphi + C \sin \varphi$ будет совпадать со знаком $2B \cos \varphi$.

Если взять $\varphi = \varphi_2 = -\varphi_1$, то знак выражения $2B\cos\varphi + C\sin\varphi$ не изменится, но изменится знак у множителя, стоящего перед скобкой, т.е. у $\sin\varphi$. Таким образом $P(\varphi_1)$ и $P(\varphi_2)$ имеют противоположные знаки.

И снова при достаточно малых значениях ρ знак $\rho(\varphi)+\omega(\rho,\varphi)$ совпадает со знаком $\rho(\varphi)$, а знак $\rho(-\varphi_1)+\omega(\rho,-\varphi_1)$ со знаком $\rho(-\varphi_1)$, значит $f(x_0, y_0)$ будет иметь в окрестности точки (x_0, y_0) как положительные, так и отрицательные значения, значит в т. (x_0, y_0) функция f не имеет экстремума.

Замечание.

В случае $\Delta = 0$ функция f в точке (x_0, y_0) может иметь экстремум, но может и не иметь.

Пример. Исследуем на эксремум функцию

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy. \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y,$$

$$f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Итак, (0,0), (1,1) - точки, подозрительные на экстремум.

$$2.\ f''_{xx}(x,y)=6x,\quad f''_{xy}(x,y)=-3,\quad f''_{yy}(x,y)=6y$$

$$\Delta=f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y)-\left(f''_{xy}(x,y)\right)^2.$$

$\Delta(0,0)=0\cdot 0-3^2<0\Rightarrow$ в точке (0,0) нет экстремума.

$\Delta(1,1)=6\cdot 6-3^2>0\Rightarrow(1,1)$ точка min

4.4 Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области D. Тогда по теореме Вейерштрасса она достигает на D своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может достигать во внутренней точке облати D или на её границе.

В первом случае в таких точках существуют частные производные первого порядка и равны в ней нулю или не существуют. Значит такая внутренняя точка области D есть точка экстремума.

Таким образом наименьшее (наибольшее) значение функции f совпадает либо с одним из её экстремумов, лежащим внутри области D, либо достигается в некоторой точке, лежащей на её границе

Итак, для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в замкнутой, ограниченной области D, достаточно:

1. Найти все подозрительные на экстремум точки, лежащие внутри области, не занимаясь вопросом будет ли в этих точках экстремум;

2. Вычислить значения функции во всех подозрительных на экстремум точках;

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе;

4. Наибольшее и наименьшее из всех чисел и будет наибольшим и наименьшим значением функции f во всей области.

Пример 1. Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x-1)^{2/3}(x - y^2)$ в области, определённой двойным неравенством $y^2 \le x \le 2$.

Решение:

1. Неравенства $y^2 \le x \le 2$ задают область, изображённую на рисунке.

2. Функция непрерывна в этой области, поэтому достигает наибольшего и наименьшего значений.

3. Найдём точки, подозрительные на экстремум, лежащие внутри области:

$$z'_x = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-y^2)+(x-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(2x-2y^2+x-1),$$

$$z'_y = (x-1)^{\frac{2}{3}}(-2y)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(3x-2y^2-1)=0 \\ (x-1)^{\frac{2}{3}}(-2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \vee x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{3};0\right)=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\cdot\frac{1}{3}$$

$\textit{При}\ x=1,\ \ z=0.$

4. Найдём наибольшее и наименьшее значение f на границе.

a) на дуге AOB $(x = y^2)$, $z = (y^2 - 1)^{\frac{2}{3}}(y^2 - y^2) = 0$

$б$) на прямой $x = 2$, $z = 2 - y^2$

$-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$.

$z' = -2y, -2y = 0 \Rightarrow y = 0, z(0) = 2, z(\sqrt{2}) = 0.$

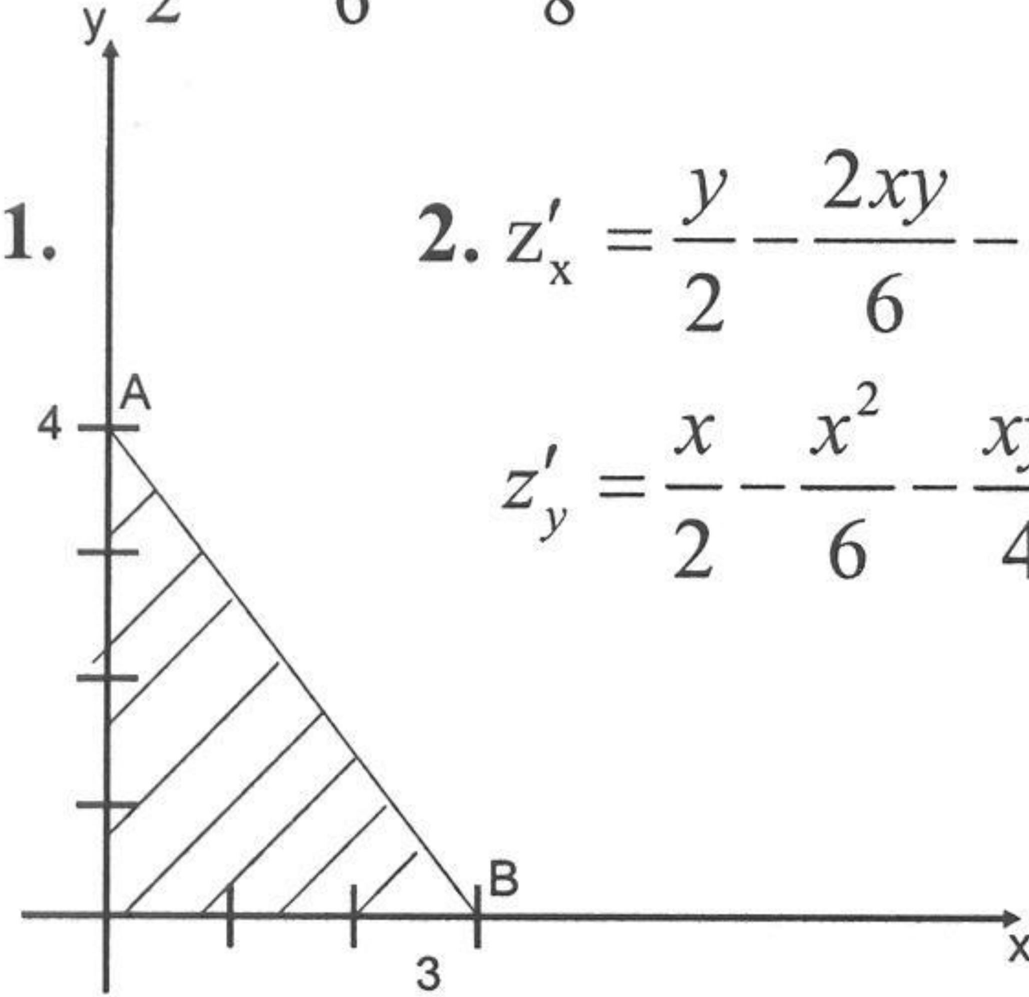
$z_{наиб} = 2, \ z_{наим} = 0$

Пример 2.

Найдём наименьшее и наибольшее значения функции

$z=\frac{xy}{2}-\frac{x^2y}{6}-\frac{xy^2}{8}$ в области: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\le 1$;

1.



2. $z'_x=\frac{y}{2}-\frac{2xy}{6}-\frac{y^2}{8}$;

$z'_y=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{xy}{4}$

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{y}{8}\right)=0 \\ x\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}-\frac{y}{4}\right)=0 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y=0 \\ \frac{1}{2}-\frac{x}{6}-\frac{y}{4}=0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{y}{8}=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{y}{8}=0 \\ \frac{1}{2}-\frac{x}{6}-\frac{y}{4}=0 \end{cases}$.

Точки, подозрительные на экстремум, внутри области:

1) (0;0), 2)(3;0), 3)(0;4), 4)$(\frac{9}{5};\frac{4}{5})$

3. Найдём значения функции в найденных точках.

$$z(0,0)=0;\ z(3,0)=0;\ z(0,4)=0;\ z\left(\frac{9}{5},-\frac{4}{5}\right)=-\frac{54}{125}.$$

4. Исследуем на отрезке $[OA]$: $x=0,\ 0\le y\le 4,\ \underline{z=0}$.

5. Исследуем на отрезке $[OB]$: $y=0,\ 0\le x\le 3,\ \underline{z=0}$.

6. Исследуем на отрезке $[AB]$: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1,\ 0\le x\le 3.$

На $[AB]$ $z=\frac{x}{2}4\left(1-\frac{x}{3}\right)-\frac{x^2}{6}4\left(1-\frac{x}{3}\right)-\frac{x}{8}4^2\left(1-\frac{x}{3}\right)^2=...=0$

7. Из всех найденных значений выбираем

наибольшее $z=0$ и наименьшее $z=-\frac{54}{125}$.

Пример 3.

Найдём наибольшее и наименьшее значения $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

Решение.

1. Область определения функции – круг с центром в начале координат, его граница – окружность $x^2 + y^2 = 1$.

2. Находим $z'_x = -\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}$; $z'_y = -\dfrac{2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

$z'_x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $z'_y = 0 \Leftrightarrow y = 0$;

точка (0,0) лежит внутри области $\underline{z(0,0) = 1}$

3. На границе окружности $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$;

4. $z_{наиб} = 1, \quad z_{наим} = 0$.

4.5 Условный экстремум

До сих пор при рассмотрении экстремума функции нескольких переменных мы предполагали, что аргументы функции есть независимые переменные.
Однако часто приходится искать экстремум функции, аргументы которой связаны одним или несколькими соотношениями.

Например требуется из всех треугольников данного периметра $2p$ найти тот, который имеет наибольшую площадь. Если стороны обозначить x, y, z то его площадь будет

(1) $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, где $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x+y \geq z$, $y+z \geq x$, $x+z \geq y$ (2),

$x+y+z = 2p$ (3).

Следовательно, данная задача состоит в исследовании функции (1) $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ на экстремум в области:

(2) $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y \geq z,\ y+z \geq x,\ x+z \geq y)$

в предположении, что аргументы этой функции связаны соотношениями (3) $x+y+z=2p$.

В подобных случаях экстремум называется условным.

Определение. Пусть в некоторой области D задана функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, аргументы которой связаны соотношениеми $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = 1...k$, называемыми уравнениями связи.

Говорят, что в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ функция имеет условный экстремум(максимум или минимум), если существует такая окрестность точки M_0, что во всех её точках $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих уравнению связи, выполняется неравенство

$f(x_1, x_2, ..., x_n) \le f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ в случае максимума,

$f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ в случае минимума

При этом $f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ называют значением условного экстремума(максимума или минимума) функции.

Точки, в которых функция имеет условный экстремум, называют точками условного экстремума. Можно рассматривать строгие и нестрогие экстремумы.

Отыскание условного экстремума.

При отыскании условного экстремума можно поступить так. Из k уравений связи, содержащих n неизвестных можно выразить какие-либо k неизвестных через оставшиеся $n - k$, например, $x_1, x_2, ..., x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ и подставить в данную функцию вместо $x_1, x_2, ..., x_k$ найденные для них выражения.

В результате получили функцию $(n-k)$ переменных: $u = f_1(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)$.

Тем самым задача об отыскании условного экстремума функции f n переменных сводится к отысканию безусловного экстремума функции f_1 $(n-k)$ переменных.

Пример. Дано положительное число a. Требуется разбить это число на три неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим слагаемые x, y, z. Составим произведение этих чисел $u = x \cdot y \cdot z$. По условию оно должно быть наибольшим, следовательно это и будет функция, подлежащая исследованию. Кроме того x, y, z – слагаемые, составляющие число а, следовательно $x + y + z = a$.
Это уравнение связи.

Итак, нужно исследовать функцию $u = xyz$ на экстремум в области $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$

Уравнение связи $x + y + z = a.$

Решение.

Выразим z из уравнения связи $z = a - x - y$ и подставим в функцию, получим $u = xy(a - x - y)$

Найдём u'_x, u'_y функции $u = xy(a-x-y)$

$u'_x = ay - 2xy - y^2$, $u'_y = ax - x^2 - 2xy$.

$$\begin{cases} u'_x = 0 \\ u'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(a-2x-y) = 0 \\ x(a-x-2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = a \end{cases} \vee \begin{cases} a-2x-y = 0 \\ a-x-2y = 0 \end{cases}$$

Итак, получаем следующие точки подозрительные на экстремум $(0,0)$, $(0,a)$, $(a,0)$, $\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$

Находим $u(0,0,a)=0$, $u(0,a,0)=0$, $u(a,0,0)=0$,

$u\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}$.

Искомые слагаемые $x=\dfrac{a}{3}$, $y=\dfrac{a}{3}$, $z=\dfrac{a}{3}$