

**М**ЕТОДЫ

**ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ**

# ВВЕДЕНИЕ

Человеческая деятельность связана с принятием множества решений по способам достижения поставленных целей. При принятии решений приходится учитывать много факторов, отметим среди таких факторов, в первую очередь, ограниченность ресурсов, неопределенность внешних условий, присутствие конкурирующих сторон, которые стремятся достичь своих целей, не всегда совпадающих с нашими.

Как известно, экономика занимается изучением того, как в обществе распределяются ограниченные ресурсы. Как правило, у экономической системы (семьи, фирмы, государства) есть некоторая цель, но на пути к достижению этой цели стоят ограничения по количеству используемых ресурсов. Рассмотрим пример задачи планирования производства.

**ПРИМЕР В.1.** Предприятие производит продукцию двух видов (А и Б), используя при изготовлении этой продукции ресурсы трех видов (первого, второго и третьего). Чтобы произвести одну единицу продукции А, нужно затратить по 1 единице первого и второго ресурсов и 2 единицы третьего ресурса. Для производства единицы продукции Б требуется 2 единицы первого ресурса и 1 единица второго ресурса. Запасы ресурсов у предприятия ограничены: на складах есть 90 единиц первого ресурса, 50 единиц второго и 80 единиц третьего ресурса.

Рыночная цена продукции А составляет 800 руб. а цена продукции Б равна 1000 руб. Сколько продукции следует произвести, чтобы получить наибольшую выручку?

**Решение.** Пусть предприятие планирует произвести  $x_1$  единиц продукции А и  $x_2$  единиц продукции Б, тогда выручка предприятия будет, очевидно, равна

$$z = 800x_1 + 1000x_2.$$

Относительно величин  $x_1$  и  $x_2$  можно сказать следующее. Во-первых, они должны быть неотрицательными — отрицательный план производства продукции не имеет экономического смысла. Во вторых, общие расходы ресурсов при производстве  $x_1$  единиц продукции А и  $x_2$  единиц продукции Б не должны превысить запасы этих ресурсов.

Вычислим суммарный расход первого ресурса. На производство единицы продукции А тратится 1 единица первого ресурса, а всего продукции А производится  $x_1$  единиц, значит, на производство всей продукции А будет затрачено  $1x_1 = x_1$  единиц первого ресурса. Аналогично, на производство единицы продукции Б тратится 3 единицы первого ресурса, а всего продукции Б производится  $x_2$  единиц, значит, на производство всей продукции Б будет затрачено  $3x_2$  единиц первого ресурса. Суммарный расход первого ресурса на производство всей продукции (и А, и Б) составит  $x_1 + 3x_2$  единиц. А в запасе есть всего 90 единиц этого ресурса. Значит, должно выполняться ограничение:  $x_1 + 3x_2 \leq 90$ . Добавляя аналогичные ограничения по второму и третьему ресурсам, приходим окончательно к следующей задаче.

Требуется найти такой план производства (т. е. числа  $x_1$  и  $x_2$ ), чтобы выполнение этого плана обеспечивало предприятию наибольшую выручку

$$z = 800x_1 + 1000x_2 \rightarrow \max$$

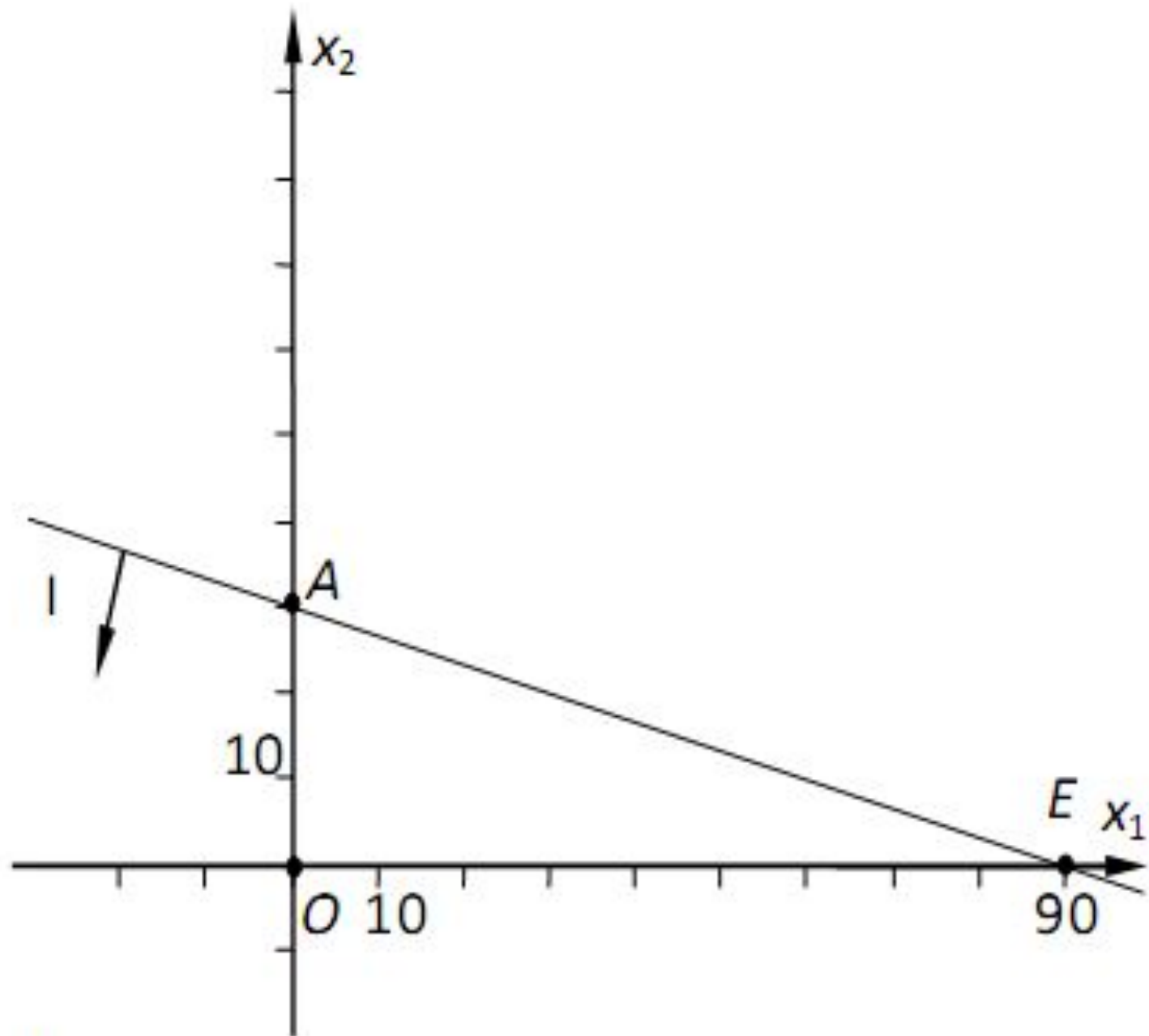
при ограничениях по ресурсам

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90, \\ x_1 + x_2 \leq 50, \\ 2x_1 \leq 80 \end{cases}$$

и ограничениях неотрицательности

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Построим область точек на плоскости, где все пять ограничений выполняются. Уравнение  $x_1 + 3x_2 = 90$  определяет множество точек плоскости, лежащих на некоторой прямой. Чтобы эту прямую построить, достаточно вспомнить, что любая прямая полностью определяется любыми своими двумя различными точками. Подставим в данное уравнение  $x_1 = 0$ , получим, что  $0 + 3x_2 = 90$ , откуда  $x_2 = 30$ . Итак, получили первую точку:  $A(x_1 = 0, x_2 = 30)$ . Если подставить в данное уравнение  $x_2 = 0$ , то получим:  $x_1 + 3 \cdot 0 = 90$  или просто  $x_1 = 90$ . Получили вторую точку  $B(x_1 = 90, x_2 = 0)$ . Построим эту прямую: на рис. В.1, а она обозначена римской цифрой I.



*a) ограничение по запасу первого ресурса*



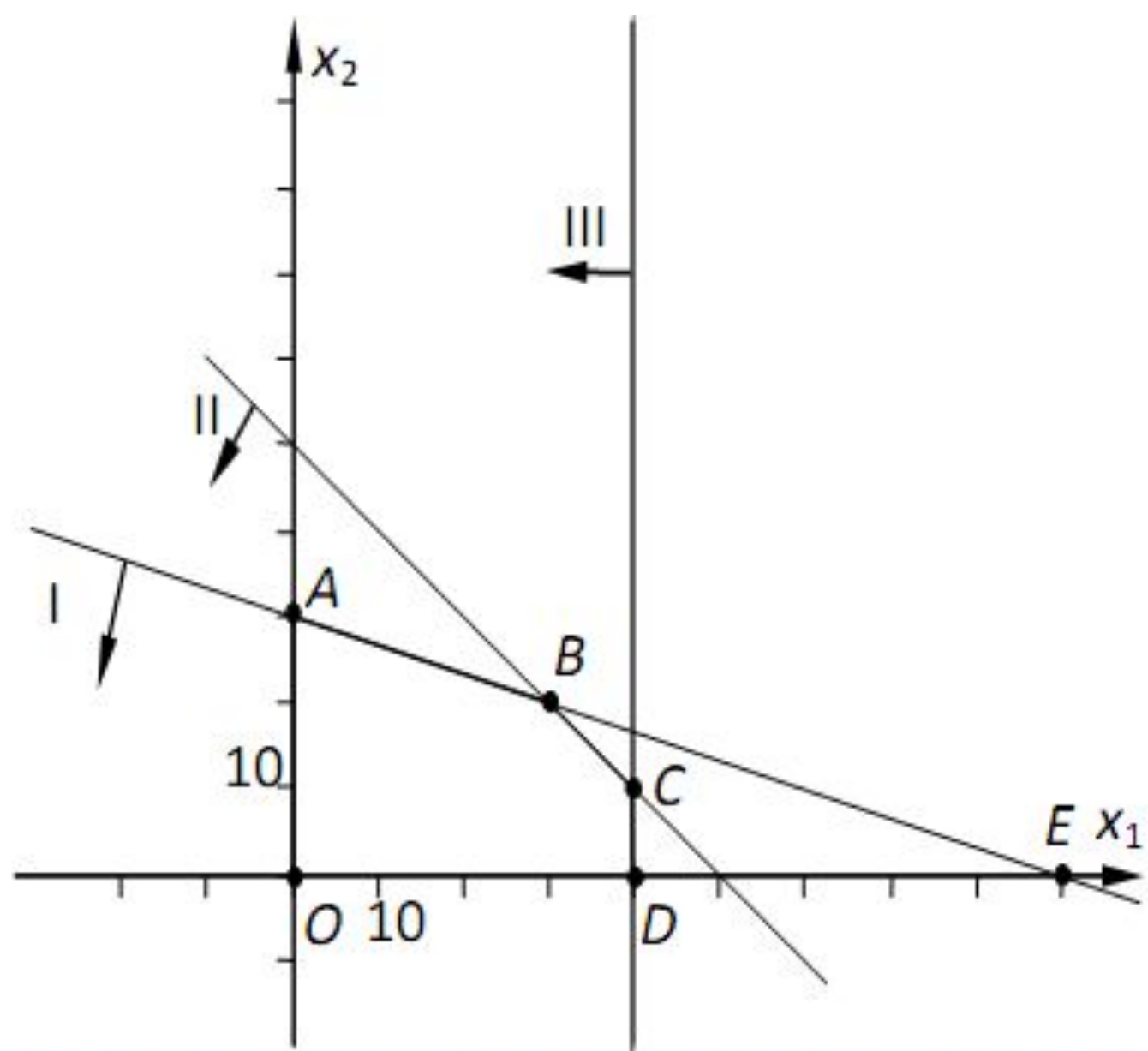
Данная прямая разбивает всю плоскость на две полуплоскости, в одной из полуплоскостей выполняется неравенство  $x_1 + 3x_2 < 90$ , а в другой — неравенство  $x_1 + 3x_2 > 90$ . Проверим, какое из этих двух неравенств выполняется в полуплоскости, которая лежит ниже и левее только что построенной прямой. Подставим в неравенство  $x_1 + 3x_2 < 90$  координаты точки  $O(x_1 = 0, x_2 = 0)$ :  $0 + 3 \cdot 0 < 90$  — значит, и для всех остальных точек, которые лежат ниже и левее прямой  $x_1 + 3x_2 = 90$ , выполняется неравенство  $x_1 + 3x_2 < 90$ .

Таким образом, ограничение  $x_1 + 3x_2 \leq 90$  выполняется во всех точках, лежащих на построенной прямой, а также левее и ниже нее. Обозначим на рис. В.1, *a* стрелкой ту полуплоскость, где выполняется данное неравенство.

Поступим таким же образом с остальными неравенствами: отметим на плоскости множества точек, которые этим неравенствам удовлетворяют (рис. В.1, б).

Пересечение этих множеств (полуплоскостей) образует пятиугольник  $OABCD$ , заштрихованный на рис. В.1, б.

Таким образом, любой план производства, соответствующий некоторой точке из заштрихованного пятиугольника, можно выполнить, такие планы называются допустимыми и мы замечаем, что, вообще говоря, их очень много. Как из них выбрать оптимальный, т. е. приносящий наибольшую выручку  $z = 800x_1 + 1000x_2$ ?



б) множество неотрицательных планов производства, удовлетворяющих всем ограничениям по ресурсам

Оказывается, что если оптимальный план существует, то он обязательно будет лежать в одной из угловых точек множества допустимых планов, т. е. в одной из вершин  $OABCD$ . Координаты точки  $A$  мы знаем. Найдем координаты других вершин, например, точки  $C$ .

Эта точка представляет собой пересечение прямых, которые задаются вторым из неравенств и третьим, т. е. в этой точке

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 50, \\ 2x_1 = 80. \end{cases}$$

Из уравнения  $2x_1 = 80$  получаем  $x_1 = 40$ . Подставим  $x_1 = 40$  в уравнение  $x_1 + x_2 = 50$  и получим, что  $x_2 = 10$ . Таким образом точка  $C$  имеет координаты  $C(x_1 = 40, x_2 = 10)$ . Аналогично получаем координаты всех оставшихся вершин пятиугольника  $OABCD$ .

Итак, оптимальное решение обязательно находится в одной из угловых точек:

- $O(x_1 = 0, x_2 = 0)$ , в этой точке выручка  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 = 0$ ;
- $A(x_1 = 0, x_2 = 30)$ ,  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 0 + 1000 \cdot 30 = 30\,000$ ;
- $B(x_1 = 30, x_2 = 20)$ ,  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 30 + 1000 \cdot 20 = 44\,000$ ;
- $C(x_1 = 40, x_2 = 10)$ ,  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 40 + 1000 \cdot 10 = 42\,000$ ;
- $D(x_1 = 40, x_2 = 0)$ ,  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 40 + 1000 \cdot 0 = 32\,000$ .

Видим, что наибольшую выручку (44 000 руб.) обеспечит план  $B(x_1 = 30, x_2 = 20)$ , по которому нужно произвести 30 единиц продукции А и 20 единиц продукции Б.

Можно, в принципе, и не перебирать все угловые точки множества допустимых решений. Для этого удобно воспользоваться понятием градиента: *градиент функции*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — это вектор, координаты которого равны частным производным функции по соответствующим переменным:

$$\text{grad } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} .$$

Градиент функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , вычисленный в некоторой точке, перпендикулярен линии уровня функции, проходящей через эту точку, и показывает направление наибольшего роста функции в этой точке.

Градиент функции выручки  $z = 10x_1 + 20x_2$

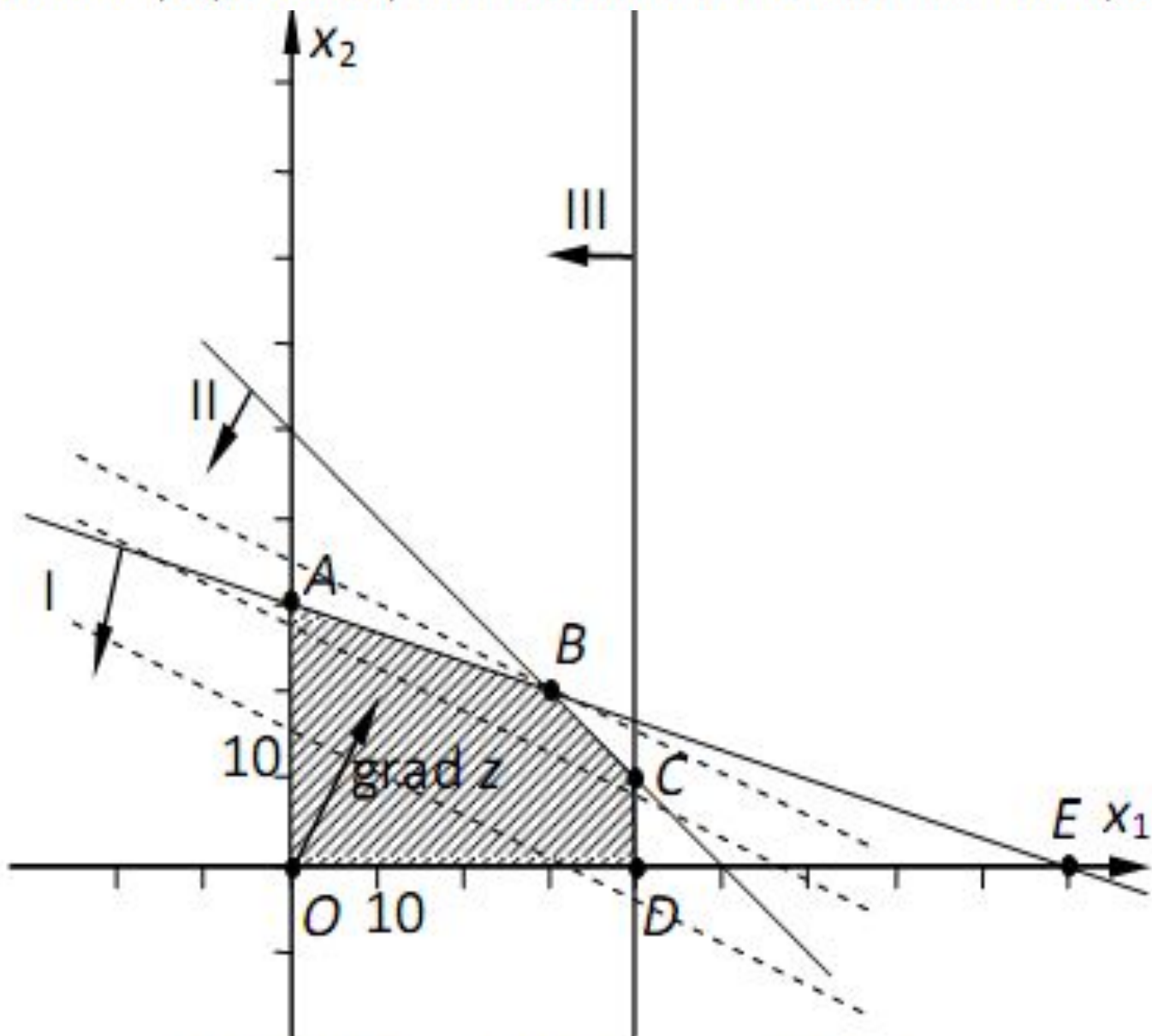
$$\text{grad } z = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

указывает направление наибольшего возрастания функции  $z$ .



Линии уровня функции  $z$  образуют семейство параллельных прямых, перпендикулярных градиенту (они обозначены пунктиром на рис. В.1, в). Будем двигать линию уровня в направлении градиента — наибольшего значения функция  $z$  достигает в точке  $B(30, 20)$ . Это и есть оптимальный план производства.  $\square$

Рис. В.1. Графическое решение задачи оптимального планирования производства



в) градиент и линии уровня

Люди научились решать подобные задачи (которые называются задачами линейного программирования) только в середине XX в., за разработку теории линейного программирования академик Л. В. Канторович в 1975 г. получил Нобелевскую премию в области экономики (совместно с Т. Купмансом).

Но целевая функция и левые части ограничений могут быть представлены и нелинейными функциями. Аналитические и численные методы решения задач нелинейного программирования, в которых ищется максимум или минимум нелинейной функции при наличии нелинейных ограничений,

эти методы применяются к решению задач изучения потребительского спроса и рыночного равновесия.





# **1. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА**

## **§ 1.1. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ**

*Производственная функция* выражает зависимость *результата производства* (объема выпускаемой продукции) от *факторов производства* (затраченных ресурсов). При описании экономической системы с помощью производственной функции эта система рассматривается как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы, а на выходе получается произведенный за некоторый период времени продукт.

Если рассматривать два ресурса:

- капитал, т. е. прошлый (накопленный) труд  $K$  в форме основных производственных фондов;
  - настоящий (живой) труд  $L$ , описываемый количеством занятых,
- а результатом деятельности экономической системы считать объем выпуска  $X$ , то экономика замещается своей моделью в форме наиболее распространенной двухфакторной производственной функции

$$X = F(K, L).$$

Поскольку обычно экономическая система производит несколько различных видов продукции, удобнее всего объем выпуска исчислять в денежном выражении, например, если в качестве экономической системы рассматривать национальную экономику, то объемом выпуска можно считать валовой внутренний продукт, а если в качестве экономической системы рассматривать фирму — то просто выпуск продукции в денежном выражении, т. е. суммарную стоимость произведенной продукции всех видов.



Производственная функция называется *неоклассической*, если она определена при всех неотрицательных значениях аргументов  $K$  и  $L$ , является непрерывной и дважды дифференцируемой по обоим аргументам при всех  $K \geq 0, L \geq 0$  и обладает следующими **свойствами**, имеющими естественную экономическую интерпретацию:

при отсутствии хотя бы одного фактора производство невозможно:

$$F(K, 0) = 0 \text{ для всех } K \geq 0, \quad F(0, L) = 0 \text{ для всех } L \geq 0;$$

при увеличении затрат ресурсов выпуск продукции возрастает:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0 \quad \text{для всех } K \geq 0, L \geq 0;$$

при увеличении количества одного из используемых ресурсов при постоянном количестве другого ресурса скорость роста выпуска продукции замедляется:

$$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0 \quad \text{для всех } K \geq 0, L \geq 0;$$

при неограниченном увеличении количества хотя бы одного из используемых ресурсов выпуск продукции неограниченно возрастает:

$$F(K, +\infty) = +\infty \quad \text{для всех } K > 0, \quad F(+\infty, L) = +\infty \quad \text{для всех } L > 0.$$

Производственная функция называется *линейно-однородной*, если

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \text{для всех } K \geq 0, L \geq 0, \lambda \geq 0.$$

На практике чаще всего используются следующие **конкретные производственные функции**:

- *производственная функция Кобба — Дугласа*:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha},$$

где  $A > 0, \alpha \in (0, 1)$ ; эта производственная функция была предложена в 1899 г. Ф. Уикстидом и впервые использована в 1929 г. Ч. Коббом и П. Дугласом для моделирования реальной экономики (США);

*мультипликативная производственная функция:*

$$F(K, L) = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L},$$

в которой  $A, \alpha_K, \alpha_L > 0$ ,  $\alpha_K + \alpha_L \leq 1$ ;

*производственная функция Леонтьева:*

$$F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{a_K}, \frac{L}{a_L} \right\},$$

где  $a_K, a_L > 0$ ;

*линейная производственная функция:*

$$F(K, L) = c_K K + c_L L,$$

в которой  $c_K, c_L > 0$ .

*производственная функция с постоянной эластичностью замены:*

$$F(K, L) = A(\alpha K^{-\rho} + (1 - \alpha)L^{-\rho})^{-\gamma/\rho},$$

где  $A > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $\rho > -1$ .

Несложно проверить, что данные функции удовлетворяет всем свойствам неоклассических производственных функций, а производственная функция Кобба — Дугласа является, кроме того, линейно-однородной.

В мультипликативной производственной функции параметр  $A$  называется коэффициентом нейтрального технического прогресса (при неизменных ресурсах  $K$  и  $L$  и неизменных  $\alpha_K, \alpha_L$  выпуск тем больше, чем больше  $A$ ), параметр  $\alpha_K \in (0, 1)$  имеет смысл коэффициента эластичности выпуска по фондам (*коэффициент эластичности выпуска по фондам* показывает, на сколько процентов вырастет выпуск  $X$  при увеличении фондов  $K$  на 1%:

$$e_X^K = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{\Delta X / X}{\Delta K / K} = \frac{K}{X} \frac{\partial X}{\partial K} = \frac{K}{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}} \frac{\partial (AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial K} = \frac{\alpha_K AK^{\alpha_K - 1} L^{\alpha_L}}{AK^{\alpha_K - 1} L^{\alpha_L}} = \alpha_K;$$

аналогично определяется коэффициент эластичности выпуска по труду

$$e_X^L = \frac{L}{X} \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_L).$$

В производственной функции Кобба — Дугласа (которая является частным случаем мультипликативной производственной функции при  $\alpha_K = \alpha$ ,  $\alpha_L = 1 - \alpha$ ) параметр  $A$  также представляет собой коэффициент нейтрального технического прогресса, коэффициент эластичности выпуска по фондам равен  $\alpha$ , а коэффициент эластичности выпуска по труду равен  $1 - \alpha$ .



В случае двухфакторной производственной функции средние эффективности ресурсов — это *средняя фондоотдача*  $X/K$  и *средняя производительность труда*  $X/L$ , а предельные эффективности ресурсов — это *предельная фондоотдача*  $\partial X/\partial K$  и *предельная производительность труда*  $\partial X/\partial L$ .

В случае мультипликативной производственной функции выпуск зависит от затрат фондов и труда как  $X = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}$ , средняя фондоотдача

$$\frac{X}{K} = \frac{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}}{K} = A \frac{L^{\alpha_L}}{K^{1-\alpha_K}},$$

средняя производительность труда

$$\frac{X}{L} = \frac{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}}{L} = A \frac{K^{\alpha_K}}{L^{1-\alpha_L}},$$

предельная фондоотдача

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{\partial(AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial K} = A\alpha_K K^{\alpha_K-1} L^{\alpha_L} = \alpha_K A \frac{L^{\alpha_L}}{K^{1-\alpha_K}} = \alpha_K \frac{X}{K},$$

предельная производительность труда

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \frac{\partial(AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial L} = A\alpha_L K^{\alpha_K} L^{\alpha_L-1} = \alpha_L A \frac{K^{\alpha_K}}{L^{1-\alpha_L}} = \alpha_L \frac{X}{L},$$

т. е. предельные эффективности факторов производства пропорциональны средним эффективностям этих факторов.

**ПРИМЕР 1.1.1.** О фирме с мультипликативной производственной функцией известны следующие факты. В настоящее время основные производственные фонды фирмы оцениваются в  $K = 10^8$  ден. ед., всего в фирме занято  $L = 10^3$  сотрудников, каждый из которых производит продукции в среднем на  $M = 10^4$  ден. ед. в мес. Для увеличения выпуска на  $a = 3\%$  необходимо увеличить основные производственные фонды на  $b = 6\%$  или увеличить численность работников на  $c = 9\%$ . Требуется найти производственную функцию.

**Решение.** Мультипликативная производственная функция имеет вид

$$F(K, L) = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L},$$

где параметры  $\alpha_K$  и  $\alpha_L$  имеют смысл эластичностей выпуска соответственно по фондам и по труду. Учитывая это, можем найти

$$\alpha_K = \frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_L = \frac{a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

т. е. выпуск фирмы определяется производственной функцией

$$X = AK^{1/2} L^{1/3}.$$

Параметр  $A$  найдем, подставив в эту формулу значения выпуска предприятия в денежном выражении  $X = LM = 10^3 10^4 = 10^7$  ден. ед., капитала  $K = 10^8$  ден. ед. и труда  $L = 10^3$  чел.:

$$10^7 = A(10^8)^{1/2}(10^3)^{1/3} \Leftrightarrow A = 100.$$

Таким образом, окончательно получаем производственную функцию

$$F(K, L) = 100K^{1/2}L^{1/3}. \quad \square$$

## § 1.2. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

Пусть затраты труда и капитала равны  $K$  и  $L$ , объем выпуска (в денежном выражении) определяется производственной функцией

$X = F(K, L)$ , а цены факторов производства (труда и капитала) составляют соответственно  $p_K$  и  $p_L$ , тогда прибыль производителя будет равна

$$\Pi(K, L) = X - p_K K - p_L L = F(K, L) - p_K K - p_L L. \quad (1.2.1)$$

Цены ресурсов определяются очевидным образом. Цена труда — это просто заработная плата работника. Цена капитала равна такой денежной сумме, которую необходимо в единицу времени тратить на содержание единицы капитала (т. е. одной денежной единицы). Таким образом, цена капитала равна *норме амортизации* — величине амортизационных отчислений на 1 ден. ед. производственных фондов.

Если считать **аксиомой производителя**, что он стремится получить наибольшую прибыль, то математическая формулировка **задачи производителя** такова: *требуется определить такую технологию (т. е. такие объемы затрат ресурсов), которые приносят максимальную прибыль:*

$$\begin{aligned} \Pi(K, L) &\rightarrow \max, \\ K &\geq 0, \quad L \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$



На самом деле, указанная аксиома может быть справедливой только для фирм, которые находятся в единоличном владении; если же у фирмы несколько собственников, то совершенно не обязательно, чтобы собственники ставили менеджерам задачу максимизации прибыли — скорее они захотят максимизировать не прибыль, а стоимость фирмы, но решение этой задачи выходит за рамки

Подставим в задаче (1.2.2) вместо прибыли  $\Pi(K, L)$  ее выражение по формуле (1.2.1):

$$\begin{aligned} \Pi(K, L) = F(K, L) - p_K K - p_L L \rightarrow \max, \\ K \geq 0, L \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Приравняем нулю частные производные прибыли по ресурсам:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(K, L)}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial \Pi(K, L)}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial [F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial [F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} - p_K = 0, \\ \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} - p_L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = p_K, \\ \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = p_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial K} = p_K, \\ \frac{\partial X}{\partial L} = p_L. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Можно показать, что любая точка  $(K^*, L^*)$ , удовлетворяющая условиям (1.2.4), обязательно будет точкой максимума прибыли, и при этом оптимальные затраты ресурсов  $K^*$  и  $L^*$  будут неотрицательными, т. е. условия (1.2.4) определяют оптимальное решение задачи производителя.

Приведем экономическую интерпретацию условий максимума прибыли производителя. В левых частях этих условий стоят предельные эффективности ресурсов, а в правых частях — цены ресурсов, поэтому можно интерпретировать условия (1.2.4) следующим образом: производитель достигает максимальной прибыли при таких затратах ресурсов  $K^*$  и  $L^*$ , что предельные эффективности ресурсов равны их ценам.

**ПРИМЕР 1.2.1.** В условиях примера 1.1.1 известна средняя заработная плата  $w = 10^3$  ден. ед. в мес. и период амортизации основных производственных фондов  $n = 12$  мес. Требуется рассчитать оптимальный размер производственных фондов и оптимальную численность работников. Затем нужно определить, во сколько раз увеличится прибыль фирмы при переходе к оптимальным затратам факторов производства.

**Решение.** В результате решения примера 1.1.1 определена производственная функция фирмы:  $F(K, L) = 100K^{1/2}L^{1/3}$ .

Цена труда  $p_L = w = 10^3$  ден. ед.— это заработная плата, а цена капитала  $p_K = 1/n = 1/12$  ден. ед. равна ежемесячным амортизационным отчислениям на содержание одной денежной единицы производственных фондов, поэтому прибыль фирмы при таких затратах труда и капитала равна [согласно (1.2.1)]

$$\Pi(K, L) = X - p_K K - p_L L = 10^7 - \frac{1}{12}10^8 - 10^3 10^3 = \frac{2}{3} \text{ млн. ден. ед.}$$

Оптимальный размер фирмы задается условиями (1.2.4), состоящими в том, что предельные эффективности ресурсов должны быть в оптимальной точке равны ценам ресурсов. В данном случае предельная фондоотдача и предельная производительность труда равны соответственно

$$\frac{\partial X}{\partial K} = 50K^{-1/2}L^{1/3}, \quad \frac{\partial X}{\partial L} = \frac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3},$$

поэтому условия оптимального размера фирмы (1.2.4) принимают вид

$$\begin{cases} 50K^{-1/2}L^{1/3} = 1/12, \\ \frac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3} = 10^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 600L^{1/3} = K^{1/2}, \\ K^{1/2} = 30L^{2/3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 600L^{1/3} = 30L^{2/3}, \\ K = 900L^{4/3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K^* = 144\,000\,000, \\ L^* = 8000. \end{cases}$$



При этом выпуск фирмы составит

$$X^* = 100(K^*)^{1/2}(L^*)^{1/3} = 100(144\,000\,000)^{1/2}(8000)^{1/3} = 24\,000\,000 \text{ ден. ед.},$$

а прибыль

$$\begin{aligned} \Pi^*(K, L) &= X^* - p_K K^* - p_L L^* = 24 \cdot 10^6 - \frac{1}{12} 144 \cdot 10^6 - 10^3 \cdot 8 \cdot 10^3 = \\ &= 4 \text{ млн. ден. ед.} \end{aligned}$$

Замечаем, что оптимальный выбор затрат труда и капитала позволил увеличить прибыль в шесть раз!  $\square$

## § 1.3. МОДЕЛИ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ

Перейдем к обсуждению того, как меняется поведение производителей при введении налогов. Начнем с исследования изменения рыночного равновесия при введении **акциза** — налога, включаемого в цену товара (акциз может быть *выборочным*, т. е. применяться к определенной группе товаров, например, к алкогольной продукции, а может быть *универсальным* и взиматься со всех товаров, например, как налог с продаж). *Ставка акциза  $t$*  определяется как доля цены товара, взимаемая в виде налога.

В общем случае потребительский спрос на некоторый товар зависит от большого числа факторов: цены данного товара, цен других товаров, сезона, дохода покупателя и т. д. Если считать все факторы, кроме цены  $p$ , неизменными, то полученную зависимость спроса  $D$  от цены  $p$  можно рассматривать как функцию спроса  $D = D(p)$ .

Точно так же можно рассмотреть функцию предложения товара  $S = S(p)$  — зависимость количества товара  $S$ , предлагаемого к продаже производителями, от цены товара  $p$ , которая сложилась на рынке.

При этом *равновесная цена*  $p_0$  определяется из условия равенства спроса и предложения:

$$S(p_0) = D(p_0). \quad (1.3.1)$$

При введении акциза по ставке  $t \in (0; 1)$  равновесие спроса и предложения (1.3.1) изменится, новой равновесной ценой станет цена  $p_t$ , удовлетворяющая условию

$$S((1-t)p_t) = D(p_t), \quad (1.3.2)$$

поскольку теперь при цене товара  $p$  его стоимость для потребителя равна  $p$ , а выручка производителя от продажи единицы продукции равна  $(1-t)p$ .

Может показаться, что бремя акцизов целиком ложится на потребителя, т. е. при введении акциза по ставке  $t$  цены возрастают в  $1/(1-t)$  раз, так чтобы после взимания налогов производитель получил ту же выручку от продажи единицы товара, что и раньше:

$$(1-t) \frac{1}{1-t} p_0 = p_0.$$

Это заблуждение, в чем позволяет убедиться следующий пример.

**ПРИМЕР 1.3.1.** На рынке некоторого товара функция предложения  $S(p) = 2p - 2$ , а функция спроса  $D(p) = 10 - p$ . Требуется определить, во сколько раз изменится равновесная цена товара, реализованный спрос и выручка производителя при введении акциза по ставке  $t \in (0; 1)$ . Полученные формулы нужно интерпретировать при установлении ставки акциза на уровне 1, 5, 20, 50 и 90%.

**Решение.** Вначале из условия (1.3.1) найдем равновесную цену до введения акциза:

$$S(p_0) = D(p_0) \Leftrightarrow 2p_0 - 2 = 10 - p_0 \Leftrightarrow p_0 = 4 \text{ ден. ед.}$$

Теперь определим из условия (1.3.2) равновесную цену после введения налога:

$$S((1-t)p_t) = D(p_t) \Leftrightarrow 2(1-t)p_t - 2 = 10 - p_t \Leftrightarrow p_t = \frac{12}{3-2t} \text{ ден. ед.} \quad (1.3.3)$$

Очевидно,  $p_t > p_0$ , определим, во сколько раз:

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{12}{4(3-2t)} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}t}$$

Таким образом, в условиях рассматриваемого примера на потребителя ложится бремя оплаты двух третей введенного налога, а оставшуюся треть платит производитель.



Чтобы выяснить, на сколько процентов вырастает цена при введении акциза, преобразуем последнее выражение:

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}t} = 1 + \frac{\frac{2}{3}t}{1 - \frac{2}{3}t}.$$

Отсюда следует, что введение акциза при ставке  $t = 1\% = 0,01$  приводит к незначительному увеличению цены — на

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot 0,01}{1 - \frac{2}{3} \cdot 0,01} = \frac{1}{149} \approx 0,7\%,$$

введение 5%-ного акциза приводит к увеличению цены на

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot 0,05}{1 - \frac{2}{3} \cdot 0,05} = \frac{1}{29} \approx 3,5\%,$$

для ставок, равных 20, 50 и 90%, получаем соответственно увеличение цены на 15,4, 50 и 150%.

Естественно, увеличение цены приводит к уменьшению объема реализованного спроса и предложения, и как следствие, к уменьшению выручки производителя. До введения налога в точке равновесия реализовывался спрос

$$D(p_0) = 10 - p_0 = 6 \text{ ед.},$$

с введением акциза спрос стал равен

$$D(p_t) = 10 - \frac{12}{3-2t} = \frac{18-20t}{3-2t} \text{ ед.}$$

Найдем отношение нового и старого значений спроса:

$$\frac{D(p_t)}{D(p_0)} = \frac{18 - 20t}{6(3 - 2t)} = \frac{9 - 10t}{9 - 6t} = 1 - \frac{4t}{9 - 6t}.$$

При ставке акциза  $t = 1\%$  из последнего выражения следует, что спрос снижается на

$$\frac{4 \cdot 0,01}{9 - 6 \cdot 0,01} = \frac{4}{894} \approx 0,5\%,$$

при 5%-ной ставке аналогичный расчет показывает уменьшение спроса после введения налога на

$$\frac{4 \cdot 0,05}{9 - 6 \cdot 0,05} = \frac{2}{87} \approx 2,3\%,$$

для ставок, равных 20 и 50%, получаем соответственно снижение спроса на 10,3 и 33,3%, а при 90%-ном акцизе в данном примере спрос полностью исчезает:

$$\frac{4 \cdot 0,9}{9 - 6 \cdot 0,9} = 1 = 100\%.$$

Теперь посмотрим, как изменится выручка производителя при введении акциза.

До введения акциза выручка равна

$$p_0 D(p_0) = 4 \cdot 6 = 24 \text{ ден. ед.},$$

после введения акциза выручка (с учетом уплаты налога) изменяется до

$$(1-t) p_i D(p_i) = \frac{24(1-t)(9-10t)}{(3-2t)^2} \text{ ден. ед.}$$

При этом

$$\frac{(1-t)p_t D(p_t)}{p_0 D(p_0)} = \frac{(1-t)(9-10t)}{(3-2t)^2} = 1 - \frac{t(7-6t)}{(3-2t)^2}.$$

Таким образом, при ставке акциза  $t = 1\%$  выручка уменьшается на

$$\frac{0,01(7-6 \cdot 0,01)}{(3-2 \cdot 0,01)^2} \approx 0,8\%,$$

при 5%-ной ставке аналогичный расчет показывает уменьшение спроса после введения налога на

$$\frac{4 \cdot 0,05}{9 - 6 \cdot 0,05} = \frac{2}{87} \approx 2,3\%,$$

для ставок, равных 5, 20 и 50%, получаем соответственно снижение выручки на 4,0, 17,2 и 50,0%. При 90%-ном акцизе в данном примере выручка будет равна нулю.  $\square$



Теперь посмотрим на ту же ситуацию с точки зрения государства.

**ПРИМЕР 1.3.2.** В условиях примера 1.3.1 требуется найти такую ставку акциза, которая обеспечит максимум налоговых поступлений.

**Решение.** Чтобы определить ставку акциза, максимизирующую налоговые поступления, поставим такую задачу:

$$\begin{aligned} T(t) &= tp_i D(p_i) \rightarrow \max, \\ S((1-t)p_i) &= D(p_i), \\ p_i &> 0, \quad 0 < t < 1, \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

которую, учитывая конкретный вид функции спроса из условия примера ( $D(p) = 10 - p$ ), а также выражение для равновесной цены после введения акциза (1.3.3), преобразуем к виду

$$T(t) = tp_t(10 - p_t) \rightarrow \max,$$

$$p_t = \frac{12}{3 - 2t},$$

$$p_t > 0, \quad 0 < t < 1$$

ИЛИ

$$T(t) = t \frac{12}{3 - 2t} \left( 10 - \frac{12}{3 - 2t} \right) = \frac{24t(9 - 10t)}{(3 - 2t)^2} \rightarrow \max,$$

$$0 < t < 1.$$

Вычисляем производную:

$$T'(t) =$$

$$= \left( \frac{24t(9-10t)}{(3-2t)^2} \right)' = \frac{24}{(3-2t)^4} \left( (9t-10t^2)' (3-2t)^2 - ((3-2t)^2)' (9t-10t^2) \right) =$$

$$= \frac{24}{(3-2t)^4} \left( (9-20t)(3-2t)^2 + 4(3-2t)(9t-10t^2) \right) =$$

$$= \frac{24}{(3-2t)^3} \left( (9-20t)(3-2t) + 4(9t-10t^2) \right) =$$

$$= \frac{24}{(3-2t)^3} (27 - 78t + 40t^2 + 36t - 40t^2) = \frac{72(9-14t)}{(3-2t)^3},$$

определяем критические точки:  $9/14$  и  $3/2$ , находим промежутки возрастания:  $(-\infty; 9/14]$  и  $(3/2; +\infty)$  и промежуток убывания  $[9/14; 3/2)$ . Это дает возможность определить точку максимума функции  $T(t)$ :  $t^* = 9/14$ . Поскольку данная точка глобального максимума принадлежит интервалу  $(0; 1)$ , значение  $t^* = 9/14 \approx 64\%$  и является решением задачи (1.3.4).

При такой ставке акциза равновесная цена равна

$$p^* = \frac{12}{3 - 2 \cdot \frac{9}{14}} = 7 \text{ ден. ед.} \quad (1.3.5)$$

это на 75% выше, чем на рынке без акциза; равновесный спрос составляет

$$D(p^*) = 10 - 7 = 3 \text{ ед. —}$$

это в два раза меньше, чем на рынке без акциза.

При этом налоговые поступления составляют

$$T(t^*) = t^* p^* (10 - p^*) = \frac{9}{14} \cdot 7 \cdot 3 = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ ден. ед.,}$$

а выручка

$$(1 - t^*) p^* D(p^*) = \left(1 - \frac{9}{14}\right) \cdot 7 \cdot 3 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ ден. ед.}$$

что на 69% меньше, чем до введения акциза.  $\square$

Посмотрим теперь, как введение акциза повлияет на оптимальное решение задачи производителя (1.2.3). После введения акциза (по ставке  $t$ ) выражение для прибыли производителя изменится по сравнению с (1.2.3):

$$\Pi(K, L) = (1 - t)F(K, L) - p_K K - p_L L.$$

Запишем необходимые условия максимума прибыли:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(K, L)}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial \Pi(K, L)}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial [(1-t)F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial [(1-t)F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-t) \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = p_K, \\ (1-t) \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = p_L. \end{cases}$$

У неоклассических производственных функций первые производные положительны, а вторые — отрицательны (см. параграф 1.1), поэтому  $\partial F(K, L) / \partial K$  и  $\partial F(K, L) / \partial L$  — положительные убывающие функции. Отсюда следует, что максимум прибыли при наличии акциза достигается при меньших затратах и труда, и капитала, и как следствие, при меньших объемах производства.

Перейдем теперь к рассмотрению **налога на прибыль**. Поскольку налог на прибыль не изменяет условие рыночного равновесия (1.3.1), он не изменяет равновесных рыночных цен, значений спроса и предложения.

Точно такой же вывод можно получить из сравнения задачи

$$\Pi(K, L) = (1 - t)(F(K, L) - p_K K - p_L L)$$

с задачей (1.2.3): условия максимума прибыли в этих задачах совпадают.



Таким образом, между акцизом и налогом на прибыль есть существенные различия. В отличие от налога на прибыль, который является только инструментом перераспределения части доходов от успешных производителей в пользу государства, акциз является также инструментом рыночного регулирования, позволяя не только перераспределять доходы, но и регулировать объемы производства товаров.

## **§ 1.4. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ**

В традиционной экономике материальных товаров предприятия тратят значительные ресурсы на содержание складских запасов, и перед такими предприятиями стоит важная задача управления запасами с целью предотвращения как дефицита, так и избытков.

Обсудим модель управления запасами, основная цель которой — определение оптимального размера заказываемой партии и оптимальной частоты заказов.

Будем считать, что производственные потребности  $v$  в единицу времени являются постоянным, заказанная партия доставляется одновременно, затраты  $K$  на организацию поставки постоянны и не зависят от размера  $q$  заказываемой партии, а издержки содержания единицы сырья составляют  $s$  за единицу времени.

Уровень запаса снижается равномерно от  $q$  до нуля, после чего подается заказ на доставку новой партии сырья величиной  $q$ . Заказ выполняется мгновенно, и уровень запаса восстанавливается до величины  $q$ . Зависимость уровня запаса  $I$  от времени  $t$  иллюстрируется рис. 1.4.1.

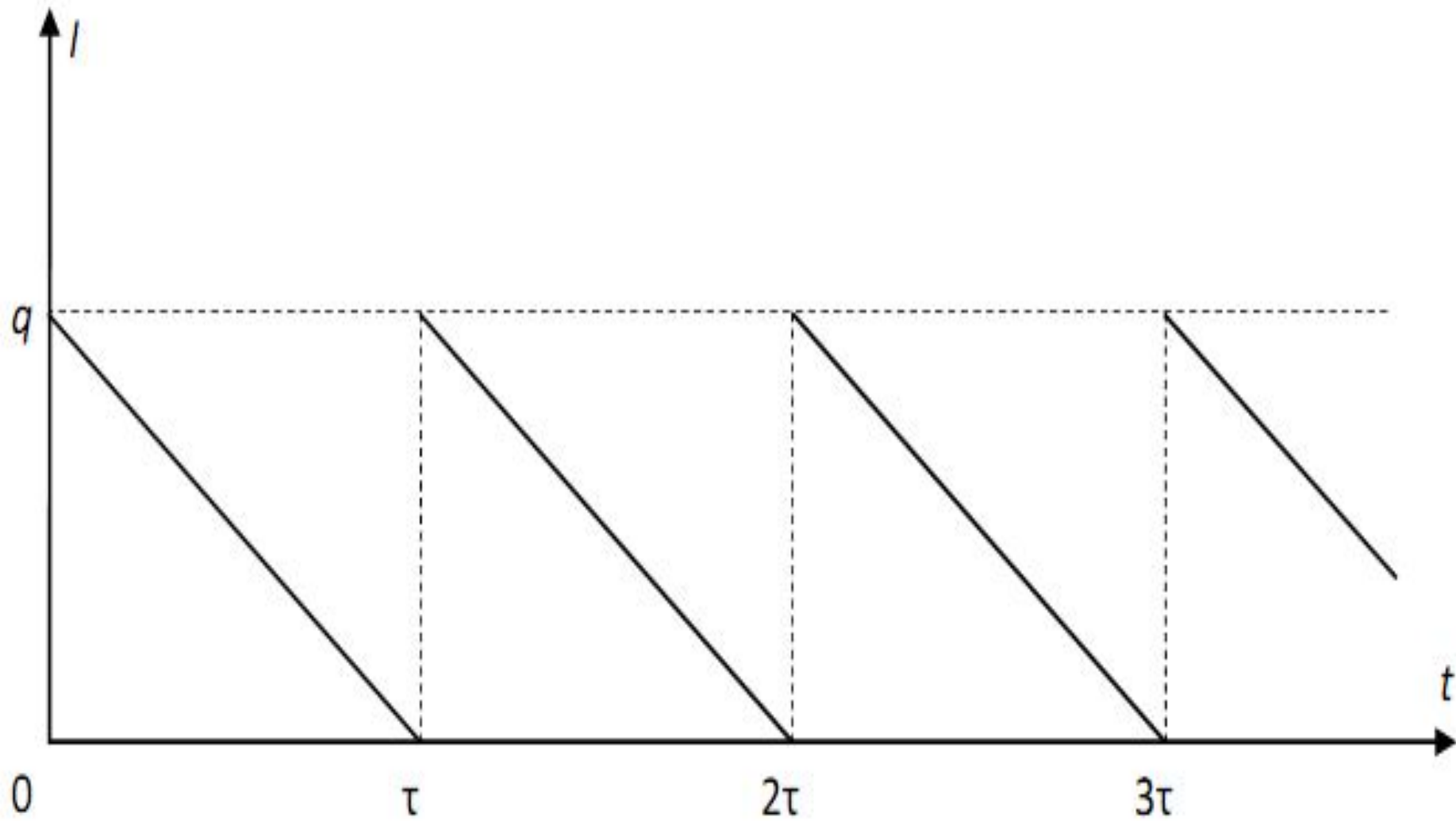


Рис. 1.4.1. Динамика уровня запасов

Интервал времени длиной  $\tau$  называется *циклом запаса*. Длина цикла равна, очевидно,  $\tau = q/v$ , средняя величина запаса равна  $q/2$ . Поэтому издержки в течение цикла  $L$  состоят из стоимости заказа  $K$  и затрат по содержанию запаса:

$$L = K + s \frac{q}{2} \tau.$$

Издержки в единицу времени  $l$  получим, разделив издержки в течение цикла  $L$  на длину цикла  $\tau$ :

$$l = \frac{L}{\tau} = \frac{K + s \frac{q}{2} \tau}{\tau} = \frac{K}{q/v} + s \frac{q}{2} = \frac{Kv}{q} + \frac{sq}{2}$$

Оптимальный размер заказываемой партии определим из необходимого условия максимума функции  $l(q)$  — равенства нулю первой производной:

$$l'(q) = \frac{s}{2} - \frac{Kv}{q^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{s}{2} = \frac{Kv}{q^2} \quad \text{или} \quad q^2 = \frac{2Kv}{s}.$$

Учитывая неотрицательность размера заказа, окончательно получаем, что оптимальный размер заказываемой партии должен составлять

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}. \quad (1.4.1)$$

При этом достаточное условие минимума выполняется:

$$l''(q^*) = 2Kv / (q^*)^3 > 0, \text{ так как } K, v, q^* > 0.$$

Формула (1.4.1) называется **формулой Уилсона**.

При этом оптимальная длина цикла

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}}. \quad (1.4.2)$$

Оптимальная стратегия управления запасами предусматривает заказ партии размером  $q^*$  через каждые  $\tau^*$  единиц времени, а наименьшие затраты в единицу времени при такой стратегии будут равны

$$l(q^*) = \frac{Kv}{q^*} + \frac{sq^*}{2} = \frac{Kv}{\sqrt{\frac{2Kv}{s}}} + \frac{s\sqrt{\frac{2Kv}{s}}}{2} = \sqrt{\frac{Kvs}{2}} + \frac{\sqrt{2Kvs}}{2} = \sqrt{Kvs}.$$



**ПРИМЕР 1.4.2.** Мебельная фабрика использует в своем производстве фанеру. Ежеженедельно требуется 200 листов фанеры, затраты на организацию каждой поставки равны 8000 руб., издержки содержания одного листа фанеры на складе равны 20 руб. в неделю. Требуется определить оптимальный размер заказываемой партии фанеры и цикл заказа.

**Решение.** По условию  $v = 200$ ,  $K = 8000$ ,  $s = 20$ . Используя формулы (1.4.1)—(1.4.2), получаем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 200}{20}} = \sqrt{160\,000} = 400, \quad \tau^* = \frac{q^*}{v} = \frac{400}{200} = 2.$$

Таким образом, каждые две недели следует заказывать по 400 листов фанеры.  $\square$

# **2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ**

## **§ 2.1. ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ**

Совокупность  $n$  чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , заданных в определенном порядке, называется  $n$ -мерным вектором. Числа  $a_i$  называются компонентами или координатами вектора, число  $n$  — его размерностью. Обозначают вектор одной жирной строчной латинской буквой:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

[на доске и в тетради, конечно, жирный шрифт не используется, но чтобы не возникало путаницы, можно над буквами, обозначающими векторы, ставить черточки или стрелочки:  $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  или  $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ].

Например,  $\mathbf{x} = (9, -2, 4, -7, 0, 3)$  — это шестимерный вектор.

Допустим, что предприятие выпускает  $n$  видов продукции, притом предполагается изготовить продукцию первого вида в количестве  $x_1$  шт., второго вида в количестве  $x_2$  шт. и т. д. В этом случае производственную программу

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

можно рассматривать как  $n$ -мерный вектор.

Два  $n$ -мерных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называются *равными*, если все их соответствующие компоненты равны:

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Суммой двух  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  называется  $n$ -мерный вектор

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

компоненты которого получаются сложением соответствующих компонент данных векторов.

Предположим, например, что производственное объединение состоит из двух мебельных фабрик, которые выпускают столы, стулья, кресла и кровати. Пусть первая фабрика выпускает 1000 столов, 10 000 стульев, 2000 кресел и 500 кроватей в год, а вторая фабрика — 2500 столов, 12 000 стульев, 2000 кресел и 1000 кроватей в год. Тогда объем годового выпуска первой фабрики представляет собой вектор  $\mathbf{a} = (1000, 10\,000, 2000, 500)$ , объем годового выпуска второй фабрики — это вектор  $\mathbf{b} = (2500, 12\,000, 2000, 1000)$ , при этом объем годового выпуска всего объединения равен сумме векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3500, 22\,000, 4000, 1500).$$

Операция сложения векторов обладает свойствами *коммутативности* и *ассоциативности*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (2.1.1)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (2.1.2)$$

Вектор

$$\mathbf{\theta} = (0, 0, \dots, 0),$$

все компоненты которого равны нулю, называется *нуль-вектором*. Каков бы ни был вектор  $\mathbf{a}$ , справедливо равенство

$$\mathbf{a} + \mathbf{\theta} = \mathbf{a}, \quad (2.1.3)$$

т. е. нуль-вектор ведет себя при сложения векторов аналогично числу нуль в арифметике.

Вектор  $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$  называется *противоположным* вектору  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и обозначается  $-\mathbf{a}$ . Очевидно,

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad (2.1.4)$$

Операция *вычитания векторов* определяется как сложение с противоположным вектором

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}),$$

Под произведением вектора  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  на число  $\lambda$  понимают вектор

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n),$$

компоненты которого получаются умножением всех компонент данного вектора на данное число, и обозначают  $\lambda \mathbf{a}$  или  $\mathbf{a}\lambda$ . Например, если первая



из рассмотренных мебельных фабрик пожелает увеличить свой выпуск в два раза, то это будет означать, что новый годовой план производства будет задаваться вектором  $2\mathbf{a} = (2000, 20\ 000, 4000, 1000)$ .

Умножение вектора на число обладает свойством *ассоциативности*:

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\mu\lambda)\mathbf{a} \quad (2.1.5)$$

и свойством *дистрибутивности* относительно векторного и числового сомножителей:

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \quad (2.1.6)$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}. \quad (2.1.7)$$

Очевидно, при умножении любого вектора на единицу этот вектор не изменится:

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (2.1.8)$$

а при умножении любого вектора на число ноль и любого числа на нуль-вектор получается нуль-вектор

$$0\mathbf{a} = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (2.1.9)$$

Скалярным произведением двух  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  называют число, равное сумме произведений одноименных координат данных векторов

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n. \quad (2.1.10)$$

В пакете прикладных программ Microsoft Excel скалярное произведение векторов вычисляется с помощью функции

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \text{СУММПРОИЗВ}(\text{вектор } \mathbf{a}; \text{вектор } \mathbf{b}),$$

где «вектор  $\mathbf{a}$ » и «вектор  $\mathbf{b}$ » — ссылки на ячейки рабочего листа, содержащие соответствующие векторы.

**ПРИМЕР 2.1.1.** Даны векторы  $\mathbf{a} = (1, 5, 15)$  и  $\mathbf{b} = (2, -1, 0)$ . Требуется вычислить их скалярное произведение вручную и с помощью пакета Microsoft Excel.

**Решение.** Вычисляем  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 15 \cdot 0 = -3$  по формуле (2.1.10):

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 15 \cdot 0 = -3.$$

Теперь получим решение с помощью пакета Microsoft Excel. Введем данные векторы **a** и **b** в ячейки A2:C2 и E2:G2 рабочего листа Microsoft Excel, а в ячейку A5 введем формулу «=СУММПРОИЗВ(A2:C2;E2:G2)», как показано на рис. 2.1.1, а.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>a</b>				<b>b</b>		
2	1	5	-1		2	-1	0
3							
4	<b>&lt;a, b&gt;</b>						
5	=СУММПРОИЗВ(A2:C2;E2:G2)						

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>a</b>				<b>b</b>		
2	1	5	-1		2	-1	0
3							
4	<b>&lt;a, b&gt;</b>						
5	-3						

б) результаты расчета

	A	B	C	D	E	F	G
1	a				b		
2	1	5	-1		2	-1	0
3							
4	<a, b>						
5	=СУММПРОИЗВ(A2:C2;E2:G2)						

*а) формула Microsoft Excel*

	A	B	C	D	E	F	G
1	a				b		
2	1	5	-1		2	-1	0
3							
4	<a, b>						
5	-3						

*б) результаты расчета*

**Рис. 2.1.1.** Вычисление скалярного произведения в Microsoft Excel

Результат вычисления представлен на рис. 2.1.1, б (в ячейке A5). Естественно, результаты ручного и компьютерного вычисления скалярного произведения совпали. □

Операция скалярного умножения векторов обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \quad \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle, \\ \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0,\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

причем знак равенства в последнем соотношении возможен лишь при  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Предположим, что в магазине продается картофель, помидоры и огурцы, причем цена 1 кг картофеля равна 10 руб., цена 1 кг огурцов равна 30 руб., а цена 1 кг помидоров равна 50 руб. Тогда вектор цен в этом магазине равен  $\mathbf{p} = (10, 30, 50)$ . Если покупатель собирается приобрести набор товаров  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , т. е.  $x_1$  кг картофеля,  $x_2$  кг огурцов и  $x_3$  кг помидоров, то скалярное произведение вектора цен  $\mathbf{p}$  на вектор набора товаров  $\mathbf{x}$ , равное

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 10x_1 + 30x_2 + 50x_3,$$

то скалярное произведение вектора цен  $\mathbf{p}$  на вектор набора товаров  $\mathbf{x}$ , равное

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 10x_1 + 30x_2 + 50x_3,$$

представляет собой стоимость набора товаров  $\mathbf{x}$ . Покупатель, располагающий для покупки картофеля, помидоров и огурцов бюджетом  $I=400$  руб., может приобрести только такие наборы товаров, которые удовлетворяют так называемому бюджетному ограничению

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leq I$$

или, в нашем случае,

$$10x_1 + 30x_2 + 50x_3 \leq 400.$$

Совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется *матрицей размера  $m \times n$* . В книгах матрицы обозначают жирными заглавными буквами латинского алфавита:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или, кратко,

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(на доске и в тетради матрицы достаточно обозначать просто заглавными буквами).



Элементы матрицы обозначаются строчными буквами с двумя индексами, из которых первый означает номер строки матрицы, в которой стоит данный элемент, а второй индекс — номер столбца, например, элемент  $a_{34}$  находится на пересечении третьей строки и в четвертого столбца матрицы  $\mathbf{A}$ .

Иногда для обозначения матриц вместо круглых скобок используют квадратные скобки или двойные вертикальные черточки:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Числа  $a_{ij}$  называются *элементами матрицы*, строки и столбцы — *ее рядами*.

Множество всех матриц, состоящих из  $m$  строк и  $n$  столбцов, обозначается  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , поэтому для того, чтобы кратко записать, что матрица  $\mathbf{A}$  имеет размер  $m \times n$ , часто пользуются обозначением

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Две матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  одного и того же размера  $m \times n$  называются *равными*, если равны все их соответствующие элементы:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Матрица, состоящая из одного столбца (т. е. если  $n = 1$ ) [или из одной строки (т. е. если  $m = 1$ )], называется *вектором — столбцом* [или, соответственно, *вектором — строкой*]

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad \mathbf{c} = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.  
Нулевая матрица обозначается

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы подчеркнуть, что нулевая матрица имеет размер  $m \times n$ , мы будем (когда это необходимо) пользоваться нижним индексом:

$$\mathbf{O}_{m \times n} = \underbrace{\left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)}_{n \text{ столбцов}} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}} \right\} m \text{ строк ,}$$

Если  $m = n$ , то матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

называется *квадратной*, а число ее строк (совпадающее с числом столбцов и равное  $n$ ) — *порядком матрицы*. Элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  квадратной матрицы образуют ее *главную диагональ*. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *единичной*, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные — нулю:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы подчеркнуть, что единичная матрица имеет  $n$ -й порядок, мы будем (когда это необходимо) пользоваться нижним индексом:

$$\mathbf{E}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}} \right\} n \text{ строк}.$$

Если в матрице  $\mathbf{A}$  заменить строки столбцами, сохранив их порядок, то получится новая матрица

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемая *транспонированной по отношению к матрице  $\mathbf{A}$* . Очевидно,  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ .

В пакете Microsoft Excel для транспонирования матриц используется функция

$$\mathbf{A}^T = \text{ТРАНСП}(\text{матрица } \mathbf{A}),$$

где «матрица  $\mathbf{A}$ » — ссылка на ячейки рабочего листа, содержащие данную матрицу. Эта формула должна быть введена в рабочий лист как формула массива Microsoft Excel (конкретные пояснения по использованию формул массива даны в примере 2.1.2).



**ПРИМЕР 2.1.2.** Дана матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel матрицу  $\mathbf{A}^T$ .

**Решение.** Найдем матрицу  $\mathbf{A}^T$ , транспонированную к матрице  $\mathbf{A}$ . Первая строка матрицы  $\mathbf{A}$  (1 2 -3) станет первым столбцом матрицы  $\mathbf{A}^T$ , а вторая строка матрицы  $\mathbf{A}$  (4 5 0) станет вторым столбцом матрицы  $\mathbf{A}^T$ :

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь поясним, как получить тот же результат в пакете Microsoft Excel. Введем матрицу  $\mathbf{A}$  в ячейки A2:C3 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.2, а.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>A</b>				<b>A<sup>T</sup></b>			
2	1	2	-3		=ТРАНСП(A2:C3)			
3	4	5	0					
4								

*а) формула Microsoft Excel*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>A</b>				<b>A<sup>T</sup></b>			
2	1	2	-3		1	4		
3	4	5	0		2	5		
4					-3	0		

*б) результаты расчета*

**Рис. 2.1.2.** Транспонирование матрицы в Microsoft Excel

Матрица  $A^T$  имеет две строки и три столбца, значит, матрица  $A^T$  будет иметь три строки и два столбца. Отведем под результат ячейки E2:F4 (они как раз занимают три строки и два столбца). В ячейку E2 введем формулу «=ТРАНСП(A2:C3)», причем эту формулу необходимо ввести как формулу массива. Для этого нужно мышью выделить диапазон E2:F4, начиная с ячейки E2, содержащей формулу, затем нажать клавишу <F2>, а затем — комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. Результат представлен на рис. 2.1.2, б (в ячейках E2:F4). Замечаем, что результаты ручного и компьютерного транспонирования матрицы совпали. Если формуле ввести не как формулу массива, то будет рассчитан только левый верхний элемент результата: число 1.  $\square$

Под суммой двух матриц  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  и  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  одного и того же размера понимают матрицу, элементы которой получаются сложением соответствующих элементов данных матриц

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Произведение матрицы  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  на число  $\lambda$  — это матрица, элементы которой получаются умножением всех элементов данной матрицы на данное число:

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над векторами.

**ПРИМЕР 2.1.3.** Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel их сумму  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  и произведение матрицы  $\mathbf{A}$  на число 3.

**Решение.** Данные матрицы имеют одинаковый размер  $2 \times 3$ , поэтому их можно складывать, при этом сумма  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  будет иметь тот же размер  $2 \times 3$ . Элементы суммы получаются сложением соответствующих элементов матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & -3+(-1) \\ 4+1 & 5+2 & 0+(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы  $\mathbf{A}$  на число 3 вычисляется так:

$$3\mathbf{A} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать сумму матриц и произведение матрицы на число в пакете Microsoft Excel очень просто. Введем матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в ячейки A2:C3 и E2:G3 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.3, а. Сумма  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  имеет размер  $2 \times 3$ , поэтому отведем под результат ячейки A6:C7 (они как раз занимают две строки и три столбца). В ячейку A6 введем формулу «=A2+E2», далее скопируем ячейку A6 в буфер обмена, выделим диа-

(они как раз занимают две строки и три столбца). В ячейку А6 введем формулу «=А2+Е2», далее скопируем ячейку А6 в буфер обмена, выделим диапазон А6:С7 и вставим в этот диапазон формулу из буфера обмена. В результате в ячейках А6:С7 будет рассчитана сумма **А + В** (рис. 2.1.3, б). Произведение **3А** рассчитывается аналогично (см. рис. 2.1.3). Компьютерные расчеты дали, конечно, те же результаты, что и ручные вычисления. □

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>A</b>				<b>B</b>		
2	1	2	-3		2	1	-1
3	4	5	0		1	2	-7
4							
5	<b>A + B</b>				<b>3A</b>		
6	=A2+E2				=3*A2		
7							

а) формулы Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>A</b>				<b>B</b>		
2	1	2	-3		2	1	-1
3	4	5	0		1	2	-7
	<b>A + B</b>				<b>3A</b>		
4	3	3	-4		3	6	-9
5	5	7	-7		12	15	0

б) результаты расчета

Рис. 2.1.3. Вычисление суммы матриц и произведения матрицы на число в Microsoft Excel



Умножение матрицы на матрицу определяется только при условии, что число столбцов первого сомножителя  $\mathbf{A}$  равно числу строк второго сомножителя  $\mathbf{B}$ . В этом случае размерность любого вектора — строки матрицы  $A$  будет совпадать с размерностью любого вектора — столбца матрицы  $B$ , и можно составить их скалярные произведения в любом сочетании. Под произведением матрицы  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times k}$  на матрицу  $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$  понимают матрицу  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , элемент  $c_{ij}$  которой равен скалярному произведению  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{A}$  на  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{B}$ :

$$c_{ij} = \langle (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}), (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{kj}) \rangle$$

или

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{t=1}^k a_{it}b_{tj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, число строк произведения совпадает с числом строк первого сомножителя, а число столбцов — с числом столбцов второго сомножителя.

В пакете Microsoft Excel для вычисления произведения матриц используется функция

$$\mathbf{AB} = \text{МУМНОЖ}(\text{матрица } \mathbf{A}; \text{ матрица } \mathbf{B}),$$

где «матрица  $\mathbf{A}$ » и «матрица  $\mathbf{B}$ » — ссылки на ячейки рабочего листа, содержащие соответствующие матрицы. Данная формула должна быть введена в рабочий лист как формула массива Microsoft Excel (конкретные пояснения по использованию формул массива даны в примере 2.1.3).

**ПРИМЕР 2.1.1.** Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel их произведение  $\mathbf{AB}$  (если такое произведение существует).

**Решение.** Прежде всего убедимся, что данные матрицы можно перемножать и найдем размер результата умножения. Запишем под матрицами их размеры:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} 4 \times 3 & \text{=====} & 3 \times 2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & 4 \times 2 & \end{array}$$

В матрице **A** четыре строки и три столбца, в матрице **B** три строки и два столбца. Число столбцов в матрице **A** равно числу строк в матрице **B**, поэтому матрицу **A** можно умножить на матрицу **B**, при этом произведение **AB** будет иметь столько же строк, сколько в матрице **A** (т. е. четыре), и столько же столбцов, сколько в матрице **B** (т. е. два). Итак,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} ? & | & ? \\ \hline ? & | & ? \\ \hline ? & | & ? \\ \hline ? & | & ? \\ \hline ? & | & ? \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}.$$

Теперь на место вопросительных знаков поставим числа — элементы произведения **AB**:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} & \overline{-1} \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{6} \end{pmatrix} = \\
 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 10 \\ 6 & 6 \\ 22 & 28 \end{pmatrix}.$$

Поясним, как получен элемент произведения  $\mathbf{AB}$ , который стоит на пересечении первой строки и первого столбца. В левой матрице мы двигаемся вдоль первой строки (она выделена пунктиром), и одновременно с этим в правой матрице мы двигаемся вдоль первого столбца (он также выделен пунктиром). Когда мы встречаем два очередных элемента  $a_{1r}$  (из первой матрицы) и  $b_{r1}$  (из второй матрицы), мы их перемножаем, и все полученные произведения складываем:

$$\langle (2, 0, -1), (1, 3, 5) \rangle = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = -3.$$

Чтобы получить элемент произведения, который стоит на пересечении первой строки и второго столбца, мы аналогичные действия произвели с первой строкой матрицы **A** и со вторым столбцом матрицы **B**:

$$\langle (2, 0, -1), (1, 3, 5) \rangle = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 6 = -2.$$

Остальные элементы рассчитываются аналогично.

Итак,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 10 \\ 6 & 6 \\ 22 & 28 \end{pmatrix}.$$

Теперь поясним, как рассчитать произведение данных матриц **A** и **B** в пакете Microsoft Excel. Введем матрицы **A** и **B** в ячейки A2:C5 и E2:F4 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.3, а.

Произведение **AB** имеет размер  $4 \times 2$ , поэтому отведем под результат ячейки H2:I5 (они как раз занимают четыре строки и два столбца). В ячейку H2 введем формулу «=МУМНОЖ(A2:C5;E2:F4)», причем эту формулу необходимо ввести как формулу массива. Для этого нужно мышью выделить диа-

пазон H2:I5, начиная с ячейки H2, содержащей формулу, затем нажать клавишу <F2>, а затем — комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. Результат представлен на рис. 2.1.3, б (в ячейках H2:I5). Замечаем, что результаты ручного и компьютерного вычисления произведения матриц совпали. Заметим, что если формула будет введена не как формула массива, то будет рассчитан только левый верхний элемент результата: -3. □



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>A</b>				<b>B</b>			<b>AB</b>					
2	2	0	-1		1	2		=МУМНОЖ(A2:C5;E2:F4)					
3	1	2	0		3	4							
4	-2	1	1		5	6							
5	1	2	3										

*а) формула Microsoft Excel*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>A</b>				<b>B</b>			<b>AB</b>					
2	2	0	-1		1	2		-3	-2				
3	1	2	0		3	4		7	10				
4	-2	1	1		5	6		6	6				
5	1	2	3					22	28				

*б) результаты расчета*

**Рис. 2.1.1.** Вычисление произведения матриц в Microsoft Excel

Нетрудно доказать, что действие умножения матрицы на матрицу обладает свойствами:

$$(AB)C = A(BC), \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$

$$(A + B)C = AC + BC, A(B + C) = AB + AC, (AB)^T = B^T A^T, AE = EA = A.$$

Последнее свойство показывает, что единичная матрица  $E$  среди всех квадратных матриц данного порядка выполняет такую же роль, как число единица среди чисел. Советуем читателю доказать, что никакая другая матрица в такой роли выступать не может. Указанным обстоятельством мы воспользуемся позже для того, чтобы ввести понятие обратной матрицы.

Произведение матриц, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей: в общем случае

$$AB \neq BA.$$

В отдельных случаях равенство  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  может иметь место — тогда матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  называются *перестановочными* между собой.

**ПРИМЕР 2.1.4.** Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить матрицы  $\mathbf{AA}^T$ ,  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{bb}^T$ ,  $\mathbf{b}^T\mathbf{b}$

**Решение.** Имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

ЗНАЧИТ,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 49 & 56 \\ 49 & 42 & 63 \\ 56 & 63 & 147 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 & 65 & 21 & 71 \\ 65 & 90 & 35 & 45 \\ 21 & 35 & 14 & 14 \\ 71 & 45 & 14 & 54 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = (6 \quad 4 \quad 2),$$

ПОЭТОМУ

$$\mathbf{b}\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} (6 \ 4 \ 2) = \begin{pmatrix} 36 & 24 & 12 \\ 24 & 16 & 8 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}^T\mathbf{b} = (6 \ 4 \ 2) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 56. \quad \square$$

В примере 2.1.4 матрицы  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  и  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  имеют разные размеры, точно так же различаются размером матрицы  $\mathbf{b}\mathbf{b}^T$  и  $\mathbf{b}^T\mathbf{b}$ . В следующем примере размеры матриц  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  совпадают, однако эти матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  не являются перестановочными.

**ПРИМЕР 2.1.5.** Нужно проверить, являются ли перестановочными матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Данные матрицы не являются перестановочными, поскольку

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix},$$

и  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .  $\square$

Если  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка, то ее можно умножить саму на себя, и произведение  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  также является квадратной матрицей  $n$ -го порядка. Матрицу  $\mathbf{A}^2$  можно умножить на матрицу  $\mathbf{A}$ , и тогда получится матрица  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  того же порядка. Вообще,  $k$ -й степенью квадратной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется матрица

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k \text{ раз}} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

По определению считается, что если  $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ , то

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$$

(точно так же, как и нулевая степень ненулевого числа равна единице: если  $a \neq 0$ , то  $a^0 = 1$ ).

**ПРИМЕР 2.1.6.** Вычислить  $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}^1 - 4\mathbf{A}^0$ , где матрица  $\mathbf{A}$  задана в примере 2.1.5.

**Решение.** Имеем:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A}^1 - 4\mathbf{A}^0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 40 \\ 60 & 82 \end{pmatrix}. \quad \square$$



В экономике и управлении матрицы очень важны. Рассмотрим одну из типичных задач — **задачу планирования производства**.

Предприятие может выпускать  $n$  видов продукции, используя для этого  $m$  видов ресурсов. Известна технологическая матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

затрат ресурсов на производство единицы каждого вида продукции [элемент  $a_{ij}$  этой матрицы равен количеству ресурса  $i$ -го вида ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), которое необходимо затратить в процессе производства единицы продукции  $j$ -го вида ( $j = 1, 2, \dots, n$ )]. Каждый из столбцов технологической матрицы описывает некоторую технологию, т. е. процесс превращения ресурсов в конечный продукт.

Известен также вектор

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

имеющихся в распоряжении предприятия объемов ресурсов и вектор

$$\mathbf{c} = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n)$$

удельной прибыли предприятия (т. е.  $c_j$  — это прибыль, которую предприятие получает от реализации единицы продукции  $j$ -го вида).

Требуется составить производственную программу, обеспечивающую предприятию наибольшую прибыль с учетом ограниченности запасов ресурсов (вспомним: пример такой задачи мы рассматривали во введении).

Если обозначить через  $x_j$  план производства продукции  $j$ -го вида, то производственная программа предприятия будет задаваться вектором

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$$

Суммарный расход первого ресурса на производство всей продукции (всех видов), равный

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

не может быть больше запаса первого ресурса  $b_1$ :

не может быть больше запаса первого ресурса  $b_1$ :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1.$$

Аналогичные требования должны выполняться и для расходов других ресурсов:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

Прибыль предприятия от реализации всей произведенной продукции равна

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

Цель состоит в том, чтобы подобрать отыскать такой план производства (2.1.12), который обеспечит предприятию наибольшую прибыль:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2.1.13)$$

при ограничениях по заданным ресурсам

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.1.14)$$

где по смыслу задачи

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.15)$$

Задачу (2.1.12)—(2.1.14) удобно записать в матричном виде:

$$z = \mathbf{c}x \rightarrow \max,$$

$$Ax \leq \mathbf{b},$$

$$x \geq \mathbf{0}.$$

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Итак, мы определили вектор как упорядоченную систему чисел и научились складывать векторы и умножать вектор на число. Известно, что аналогичные действия можно выполнять на множестве функций. Для того чтобы с единой точки зрения изучать различные множества объектов, на которых определены операции сложения и умножения на число, вводят понятие линейного пространства.

Множество  $\mathcal{L}$  элементов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  называется *линейным пространством*, если выполняются следующие условия:

- 1) имеется правило, которое позволяет построить для каждой двух элементов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из  $\mathcal{L}$  третий элемент из  $\mathcal{L}$ , называемый *суммой* элементов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и обозначаемый  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ;





Стр 45-56



$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Совокупность чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , взятых в определенном порядке, называют *решением системы уравнений* (2.3.1), если они, будучи подставлены в уравнения системы на место соответствующих неизвестных, обращают все уравнения в тождества. Решение  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  системы (2.3.1) называют *неотрицательным*, если все его компоненты  $\alpha_i$  неотрицательны.

Система линейных алгебраических уравнений (2.3.1) называется *совместной*, если она имеет решение. Совместная система называется *определенной* или *неопределенной* в зависимости от того, имеет ли она од-

но или более решений. Система вида (2.3.1) называется *несовместной* или *противоречивой*, если она не имеет решения.

Две системы линейных алгебраических уравнений с одним и тем же числом неизвестных называются *эквивалентными*, или *равносильными*, если они или обе несовместны, или обе совместны и имеют одни и те же решения; число уравнений в эквивалентных системах может быть различным. В процессе отыскания решений систему уравнений можно подвергать только таким преобразованиям, которые переводят ее в эквивалентные системы.

Относительно любой системы линейных алгебраических уравнений можно задать вопросы:

- совместна она или нет;
- если совместна, то каково число решений;
- как найти все решения.

Процесс отыскания ответов на первые два вопроса называется *исследованием системы*, а процесс отыскания решений — *решением системы*.

Процесс отыскания ответов на первые два вопроса называется *исследованием системы*, а процесс отыскания решений — *решением системы*.

Мы рассмотрим метод Жордана — Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) для исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений, в котором процессы исследования и поиска решений совпадают.

Составим матрицу  $\mathbf{A}$  из коэффициентов при неизвестных системы линейных алгебраических уравнений. Ее принято называть *матрицей системы* (2.3.1), а матрицу  $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} | \mathbf{b})$ , получающуюся добавлением к  $\mathbf{A}$  столбца свободных членов системы (2.3.1), называют *расширенной матрицей*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Очевидно, левые части уравнений системы (2.3.1) совпадают с элементами матрицы-произведения  $Ax$ , поэтому систему линейных алгебраических уравнений (2.3.1) можно записать в матричной форме:

$$Ax = b.$$

**ПРИМЕР 2.3.1.** Нужно проверить, является ли вектор

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

решением системы линейных уравнений, которая задана расширенной матрицей

$$(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right).$$

**Решение.** Подставим координаты вектора  $\mathbf{y}$  вместо неизвестных в данную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 9 \neq 6, \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = 9 \neq 4, \\ 9 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 7 \cdot (-2) = 1 \neq 2. \end{cases}$$

Так как вычисленные значения не совпадают с координатами вектора  $\mathbf{b}$ , то вектор  $\mathbf{y}$  не является решением данной системы уравнений.  $\square$

*Элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений* называют преобразования следующих трех типов:

- перестановка двух каких-нибудь уравнений системы;
- умножение обеих частей одного из уравнений на любое число, отличное от нуля;
- прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число.

Нетрудно видеть, что элементарные преобразования переводят данную систему линейных алгебраических уравнений в эквивалентную систему.

Подвергая систему линейных алгебраических уравнений элементарным преобразованиям, можно исключить любую неизвестную из всех уравнений, кроме какого-нибудь одного уравнения. Предположим, что в системе уравнений (2.3.1) коэффициент  $a_{rs}$  отличен от нуля и что мы решили исключить неизвестную  $x_s$  из всех уравнений системы, кроме  $r$ -го уравнения. Назовем  $a_{rs}$  *разрешающим коэффициентом*,  $x_s$  — *разрешающей неизвестной*, уравнение с номером  $r$  — *разрешающим уравнением*.



Стр 58