Методы оптимальных решений

Введение

Человеческая деятельность связана с принятием множества решений по способам достижения поставленных целей. При принятии решений приходится учитывать много факторов, отметим среди таких факторов, в первую очередь, ограниченность ресурсов, неопределенность внешних условий, присутствие конкурирующих сторон, которые стремятся достичь своих целей, не всегда совпадающих с нашими.

Как известно, экономика занимается изучением того, как в обществе распределяются *ограниченные ресурсы*. Как правило, у экономической системы (семьи, фирмы, государства) есть некоторая *цель*, но на пути к достижению этой цели стоят *ограничения* по количеству используемых ресурсов. Рассмотрим пример **задачи планирования производства**.

Пример В.1. Предприятие производит продукцию двух видов (А и Б), используя при изготовлении этой продукции ресурсы трех видов (первого, второго и третьего). Чтобы произвести одну единицу продукции А, нужно затратить по 1 единице первого и второго ресурсов и 2 единицы третьего ресурса. Для производства единицы продукции Б требуется 2 единицы первого ресурса и 1 единица второго ресурса. Запасы ресурсов у предприятия ограничены: на складах есть 90 единиц первого ресурса, 50 единиц второго и 80 единиц третьего ресурса.

Рыночная цена продукции А составляет 800 руб. а цена продукции Б равна 1000 руб. Сколько продукции следует произвести, чтобы получить наибольшую выручку?

Решение. Пусть предприятие планирует произвести x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции Б, тогда выручка предприятия будет, очевидно, равна

$$z = 800x_1 + 1000x_2 .$$

Относительно величин x_1 и x_2 можно сказать следующее. Во-первых, они должны быть неотрицательными — отрицательный план производства продукции не имеет экономического смысла. Во вторых, общие расходы ресурсов при производстве x_1 единиц продукции А и x_2 единиц продукции Б не должны превысить запасы этих ресурсов.

Вычислим суммарный расход первого ресурса. На производство единицы продукции А тратится 1 единица первого ресурса, а всего продукции А производится x_1 единиц, значит, на производство всей продукции А будет затрачено $1x_1 = x_1$ единиц первого ресурса. Аналогично, на производство единицы продукции Б тратится 3 единицы первого ресурса, а всего продукции Б производится x_2 единиц, значит, на производство всей продукции Б будет затрачено $3x_2$ единиц первого ресурса. Суммарный расход первого ресурса на производство всей продукции (и А, и Б) составит $x_1 + 3x_2$ единиц. А в запасе есть всего 90 единиц этого ресурса. Значит, должно выполняться ограничение: $x_1 + 3x_2 \leqslant 90$. Добавляя аналогичные ограничения по второму и третьему ресурсам, приходим окончательно к следующей задаче.

Требуется найти такой *п л а н* *п р о и з в о д с т в а* (*т. е. числа* x_1 *и* x_2), *чтобы выполнение этого плана обеспечивало предприятию наибольшую* *в ы р у ч к у*

$$z = 800x_1 + 1000x_2 \to \max$$

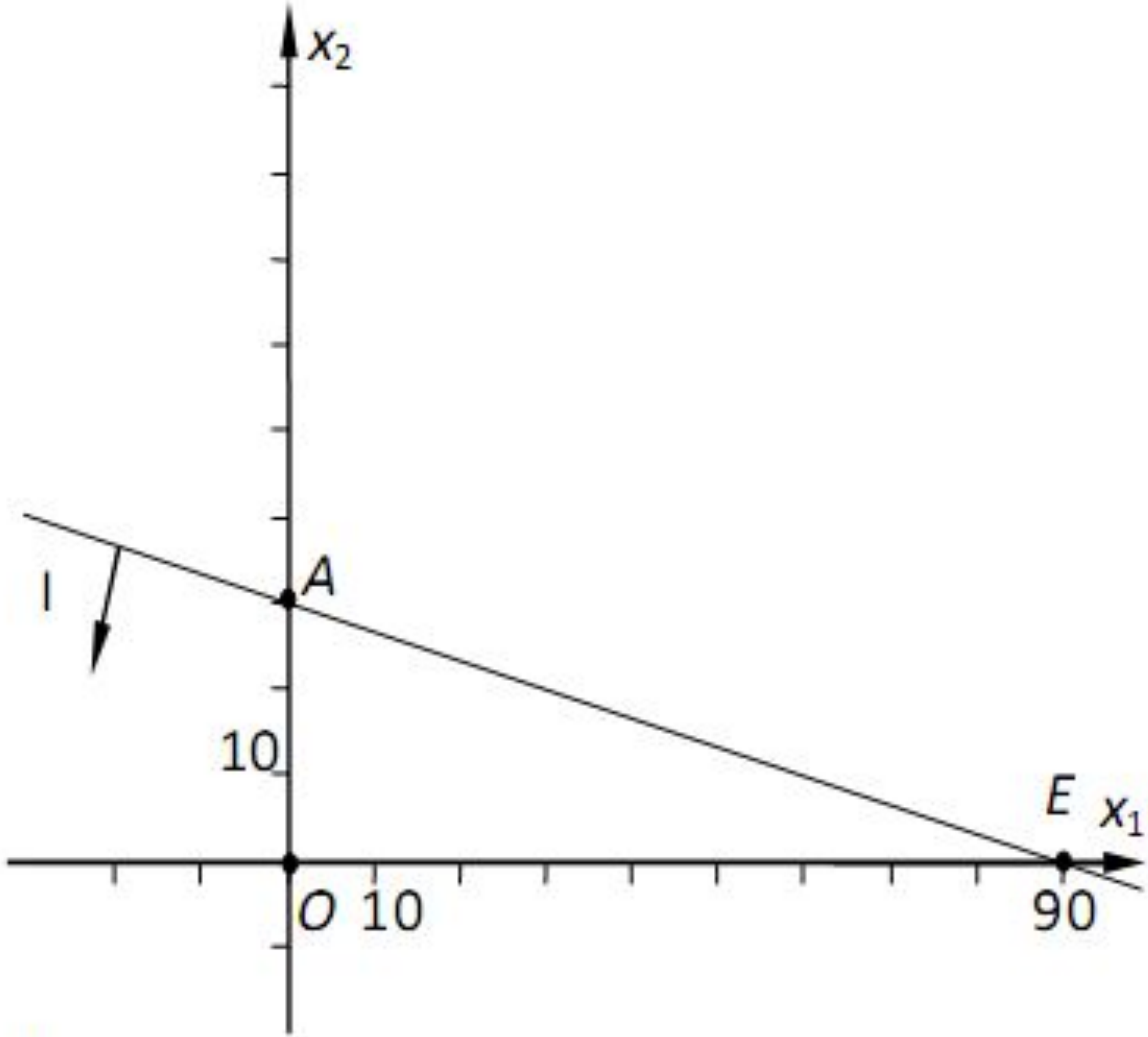
при *о г р а н и ч е н и я х* *п о* *р е с у р с а м*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 90, \\ x_1 + \ \ x_2 \leqslant 50, \\ 2x_1 \qquad \leqslant 80 \end{cases}$$

и *о г р а н и ч е н и я х* *н е о т р и ц а т е л ь н о с т и*

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Построим область точек на плоскости, где все пять ограничений выполняются. Уравнение $x_1 + 3x_2 = 90$ определяет множество точек плоскости, лежащих на некоторой прямой. Чтобы эту прямую построить, достаточно вспомнить, что любая прямая полностью определяется любыми своими двумя различными точками. Подставим в данное уравнение $x_1 = 0$, получим, что $0 + 3x_2 = 90$, откуда $x_2 = 30$. Итак, получили первую точку: $A(x_1 = 0,\ x_2 = 30)$. Если подставить в данное уравнение $x_2 = 0$, то получим: $x_1 + 3 \cdot 0 = 90$ или просто $x_1 = 90$. Получили вторую точку $B(x_1 = 90,\ x_2 = 0)$. Построим эту прямую: на рис. В.1, *а* она обозначена римской цифрой I.



а) ограничение по запасу первого ресурса

Данная прямая разбивает всю плоскость на две полуплоскости, в одной из полуплоскостей выполняется неравенство $x_1 + 3x_2 < 90$, а в другой — неравенство $x_1 + 3x_2 > 90$. Проверим, какое из этих двух неравенств выполняется в полуплоскости, которая лежит ниже и левее только что построенной прямой. Подставим в неравенство $x_1 + 3x_2 < 90$ координаты точки $O(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$:

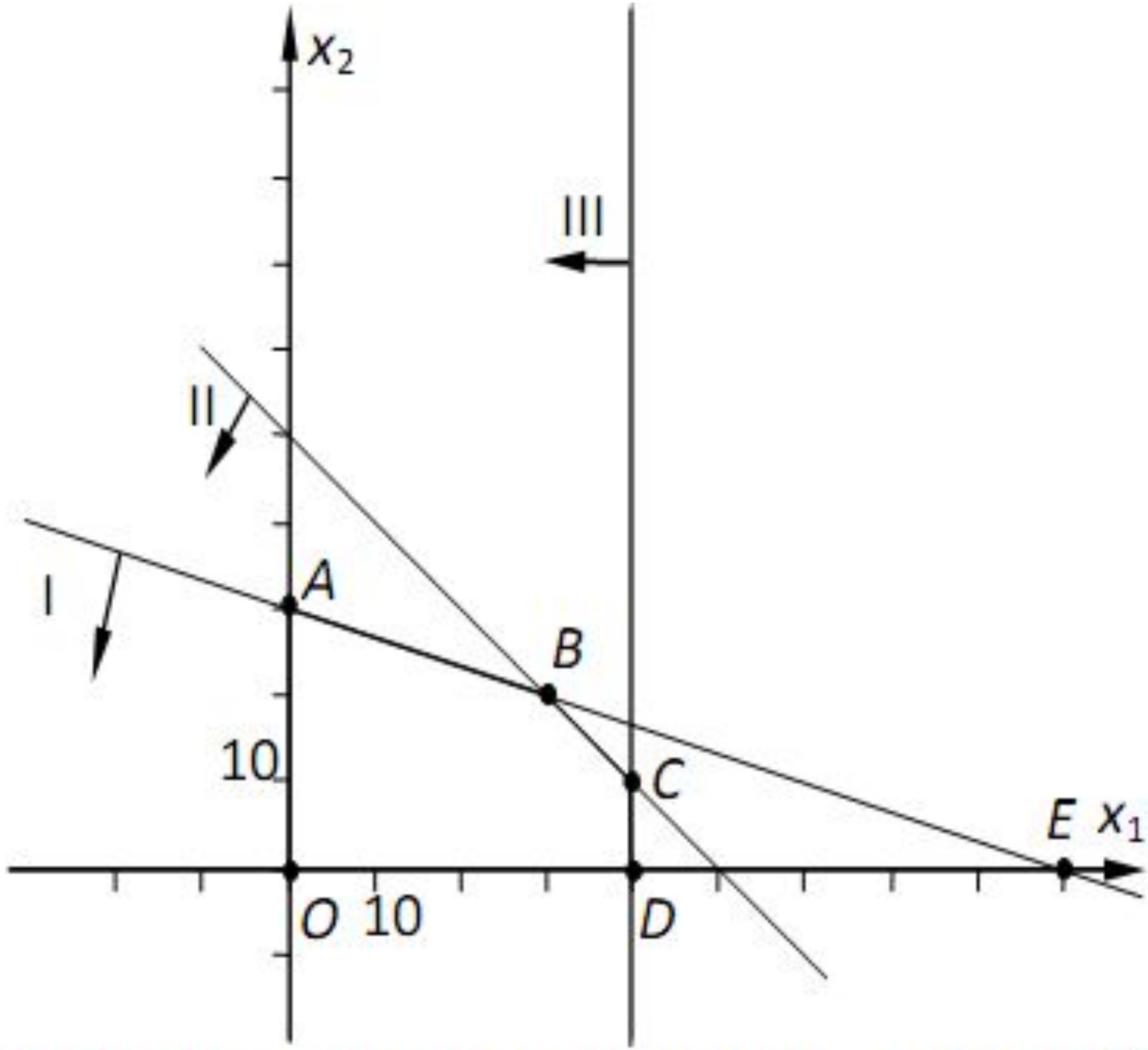
$0 + 3 \cdot 0 < 90$ — значит, и для всех остальных точек, которые лежат ниже и левее прямой $x_1 + 3x_2 = 90$, выполняется неравенство $x_1 + 3x_2 < 90$.

Таким образом, ограничение $x_1 + 3x_2 \leqslant 90$ выполняется во всех точках, лежащих на построенной прямой, а также левее и ниже нее. Обозначим на рис. В.1, *а* стрелкой ту полуплоскость, где выполняется данное неравенство.

Поступим таким же образом с остальными неравенствами: отметим на плоскости множества точек, которые этим неравенствам удовлетворяют (рис. В.1, *б*).

Пересечение этих множеств (полуплоскостей) образует пятиугольник $OABCD$, заштрихованный на рис. В.1, *б*.

Таким образом, любой план производства, соответствующий некоторой точке из заштрихованного пятиугольника, можно выполнить, такие планы называются допустимыми и мы замечаем, что, вообще говоря, их очень много. Как из них выбрать оптимальный, т. е. приносящий наибольшую выручку $z = 800x_1 + 1000x_2$?



б) множество неотрицательных планов производства, удовлетворяющих всем ограничениям по ресурсам

Оказывается, что если оптимальный план существует, то он обязательно будет лежать в одной из угловых точек множества допустимых планов, т. е. в одной из вершин $OABCD$. Координаты точки A мы знаем. Найдем координаты других вершин, например, точки C.

Эта точка представляет собой пересечение прямых, которые задаются вторым из неравенств и третьим, т. е. в этой точке

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 50, \\ 2x_1 \quad\quad = 80. \end{cases}$$

Из уравнения $2x_1 = 80$ получаем $x_1 = 40$. Подставим $x_1 = 40$ в уравнение $x_1 + x_2 = 50$ и получим, что $x_2 = 10$. Таким образом точка C имеет координаты $C(x_1 = 40,\ x_2 = 10)$. Аналогично получаем координаты всех оставшихся вершин пятиугольника $OABCD$.

Итак, оптимальное решение обязательно находится в одной из угловых точек:

- $O(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$, в этой точке выручка $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 = 0$;
- $A(x_1 = 0,\ x_2 = 30)$, $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 0 + 1000 \cdot 30 = 30\,000$;
- $B(x_1 = 30,\ x_2 = 20)$, $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 30 + 1000 \cdot 20 = 44\,000$;
- $C(x_1 = 40,\ x_2 = 10)$, $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 40 + 1000 \cdot 10 = 42\,000$;
- $D(x_1 = 40,\ x_2 = 0)$, $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 40 + 1000 \cdot 0 = 32\,000$.

Видим, что наибольшую выручку (44 000 руб.) обеспечит план $B(x_1 = 30,\ x_2 = 20)$, по которому нужно произвести 30 единиц продукции А и 20 единиц продукции Б.

Можно, в принципе, и не перебирать все угловые точки множества допустимых решений. Для этого удобно воспользоваться понятием градиента: *градиент функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — это вектор, координаты которого равны частным производным функции по соответствующим переменным:

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Градиент функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вычисленный в некоторой точке, перпендикулярен линии уровня функции, проходящей через эту точку, и показывает направление наибольшего роста функции в этой точке.

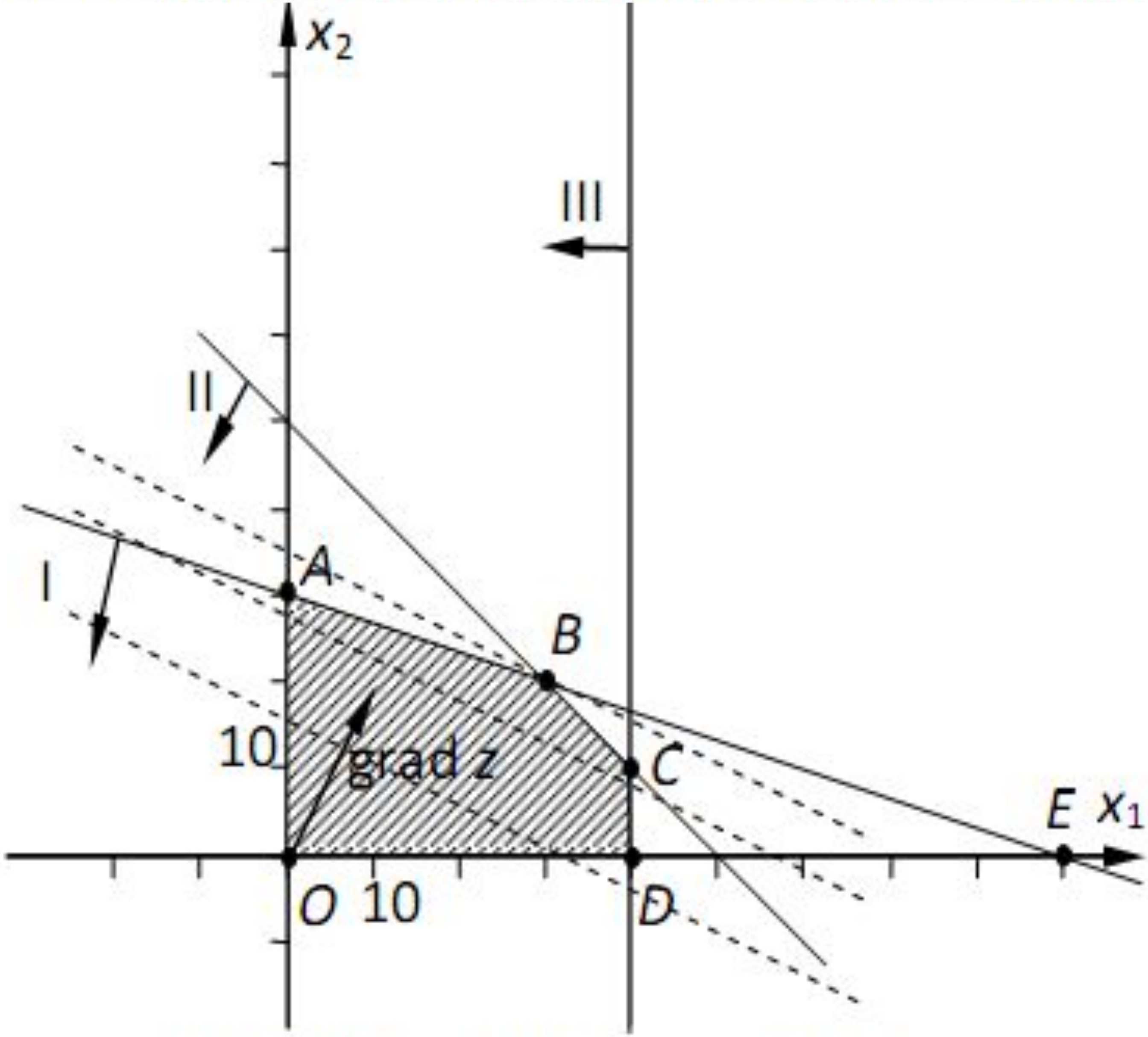
Градиент функции выручки $z = 10x_1 + 20x_2$

$$\operatorname{grad} z = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

указывает направление наибольшего возрастания функции z.

Линии уровня функции z образуют семейство параллельных прямых, перпендикулярных градиенту (они обозначены пунктиром на рис. В.1, *в*). Будем двигать линию уровня в направлении градиента — наибольшего значения функция z достигает в точке $B(30, 20)$. Это и есть оптимальный план производства. ❑

Рис. В.1. *Графическое решение задачи оптимального планирования производства*



в) градиент и линии уровня

Люди научились решать подобные задачи (которые называются задачами *линейного программирования*) только в середине XX в., за разработку теории линейного программирования академик Л. В. Канторович в 1975 г. получил Нобелевскую премию в области экономики (совместно с Т. Купмансом).

Но целевая функция и левые части ограничений могут быть представлены и нелинейными функциями. Аналитические и численные методы решения задач *нелинейного программирования*, в которых ищется максимум или минимум нелинейной функции при наличии нелинейных ограничений,

эти методы применяются к решению задач изучения потребительского спроса и рыночного равновесия.

1. Оптимальные решения в задачах планирования производства

§ 1.1. Производственная функция

Производственная функция выражает зависимость *результата производства* (объема выпускаемой продукции) от *факторов производства* (затраченных ресурсов). При описании экономической системы с помощью производственной функции эта система рассматривается как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы, а на выходе получается произведенный за некоторый период времени продукт.

Если рассматривать два ресурса:

- капитал, т. е. прошлый (накопленный) труд K в форме основных производственных фондов;
- настоящий (живой) труд L, описываемый количеством занятых,

а результатом деятельности экономической системы считать объем выпуска X, то экономика замещается своей моделью в форме наиболее распространенной двухфакторной производственной функции

$$X = F(K, L).$$

Поскольку обычно экономическая система производит несколько различных видов продукции, удобнее всего объем выпуска исчислять в денежном выражении, например, если в качестве экономической системы рассматривать национальную экономику, то объемом выпуска можно считать валовый внутренний продукт, а если в качестве экономической системы рассматривать фирму — то просто выпуск продукции в денежном выражении, т. е. суммарную стоимость произведенной продукции всех видов.

Производственная функция называется *неоклассической*, если она определена при всех неотрицательных значениях аргументов K и L, является непрерывной и дважды дифференцируемой по обоим аргументам при всех $K \geqslant 0, L \geqslant 0$ и обладает следующими **свойствами,** имеющими естественную экономическую интерпретацию:

при отсутствии хотя бы одного фактора производство невозможно:

$$F(K,0)=0 \text{ для всех } K \geqslant 0, \qquad F(0,L)=0 \text{ для всех } L \geqslant 0;$$

при увеличении затрат ресурсов выпуск продукции возрастает:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}>0, \quad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}>0 \quad \text{для всех } K \geqslant 0, L \geqslant 0;$$

при увеличении количества одного из используемых ресурсов при постоянном количестве другого ресурса скорость роста выпуска продукции замедляется:

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \quad \text{для всех } K \geqslant 0, L \geqslant 0;$$

при неограниченном увеличении количества хотя бы одного из используемых ресурсов выпуск продукции неограниченно возрастает:

$$F(K,+\infty) = +\infty \ \text{ для всех } K > 0, \quad F(+\infty, L) = +\infty \ \text{ для всех } L > 0.$$

Производственная функция называется *линейно-однородной*, если

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \text{для всех } K \geqslant 0, \ L \geqslant 0, \ \lambda \geqslant 0 .$$

На практике чаще всего используются следующие **конкретные производственные функции:**

- *производственная функция Кобба — Дугласа:*

$$F(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

где $A > 0, \alpha \in (0,1)$; эта производственная функция была предложена в 1899 г. Ф. Уикстидом и впервые использована в 1929 г. Ч. Коббом и П. Дугласом для моделирования реальной экономики (США);

мультипликативная производственная функция:

$$F(K, L) = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L},$$

в которой $A, \alpha_K, \alpha_L > 0, \quad \alpha_K + \alpha_L \leqslant 1$;

производственная функция Леонтьева:

$$F(K, L) = \min\left\{\frac{K}{a_K}, \frac{L}{a_L}\right\},$$

где $a_K, a_L > 0$;

линейная производственная функция:

$$F(K, L) = c_K K + c_L L,$$

в которой $c_K, c_L > 0$.

производственная функция с постоянной эластичностью замены:

$$F(K,L)=A\left(\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}\right)^{-\gamma/\rho},$$

где $A>0,\quad \alpha\in(0,1),\quad \gamma\in(0,1],\quad \rho>-1.$

Несложно проверить, что данные функции удовлетворяет всем свойствам неоклассических производственных функций, а производственная функция Кобба — Дугласа является, кроме того, линейно-однородной.

В мультипликативной производственной функции параметр A называется коэффициентом нейтрального технического прогресса (при неизменных ресурсах K и L и неизменных α_K, α_L выпуск тем больше, чем больше A), параметр $\alpha_K \in (0,1)$ имеет смысл коэффициента эластичности выпуска по фондам (*коэффициент эластичности выпуска по фондам* показывает, на сколько процентов вырастет выпуск X при увеличении фондов K на 1%:

$$e_X^K = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta X / X}{\Delta K / K} = \frac{K}{X}\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{K}{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}} \frac{\partial (AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial K} = \frac{\alpha A K^{\alpha_K - 1} L^{\alpha_L}}{AK^{\alpha_K - 1} L^{\alpha_L}} = \alpha_K;$$

аналогично определяется *коэффициент эластичности выпуска по труду*

$$e_X^L = \frac{L}{X}\frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_L).$$

В производственной функции Кобба — Дугласа (которая является частным случаем мультипликативной производственной функции при $\alpha_K = \alpha$, $\alpha_L = 1 - \alpha$) параметр A также представляет собой коэффициент нейтрального технического прогресса, коэффициент эластичности выпуска по фондам равен α, а коэффициент эластичности выпуска по труду равен $1 - \alpha$.

В случае двухфакторной производственной функции **средние эффективности ресурсов** — это *средняя фондоотдача* X/K и *средняя производительность труда* X/L, а **предельные эффективности ресурсов** — это *предельная фондоотдача* $\partial X/\partial K$ и *предельная производительность труда* $\partial X/\partial L$.

В случае мультипликативной производственной функции выпуск зависит от затрат фондов и труда как $X = AK^{\alpha_K}L^{\alpha_L}$, средняя фондоотдача

$$\frac{X}{K} = \frac{AK^{\alpha_K}L^{\alpha_L}}{K} = A\frac{L^{\alpha_L}}{K^{1-\alpha_K}},$$

средняя производительность труда

$$\frac{X}{L} = \frac{AK^{\alpha_K}L^{\alpha_L}}{L} = A\frac{K^{\alpha_K}}{L^{1-\alpha_L}},$$

предельная фондоотдача

$$\frac{\partial X}{\partial K}=\frac{\partial(AK^{\alpha_K}L^{\alpha_L})}{\partial K}=A\alpha_K K^{\alpha_K-1}L^{\alpha_L}=\alpha_K A\frac{L^{\alpha_L}}{K^{1-\alpha_K}}=\alpha_K\frac{X}{K},$$

предельная производительность труда

$$\frac{\partial X}{\partial L}=\frac{\partial(AK^{\alpha_K}L^{\alpha_L})}{\partial L}=A\alpha_L K^{\alpha_K}L^{\alpha_L-1}=\alpha_L A\frac{K^{\alpha_K}}{L^{1-\alpha_L}}=\alpha_L\frac{X}{L},$$

т. е. предельные эффективности факторов производства пропорциональны средним эффективностям этих факторов.

Пример 1.1.1. О фирме с мультипликативной производственной функцией известны следующие факты. В настоящее время основные производственные фонды фирмы оцениваются в $K = 10^8$ ден. ед., всего в фирме занято $L = 10^3$ сотрудников, каждый из которых производит продукции в среднем на $M = 10^4$ ден. ед. в мес. Для увеличения выпуска на $a = 3\%$ необходимо увеличить основные производственные фонды на $b = 6\%$ или увеличить численность работников на $c = 9\%$. Требуется найти производственную функцию.

Решение. Мультипликативная производственная функция имеет вид

$$F(K,L) = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L},$$

где параметры α_K и α_L имеют смысл эластичностей выпуска соответственно по фондам и по труду. Учитывая это, можем найти

$$\alpha_K = \frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_L = \frac{a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

т. е. выпуск фирмы определяется производственной функцией

$$X = AK^{1/2}L^{1/3}.$$

Параметр A найдем, подставив в эту формулу значения выпуска предприятия в денежном выражении $X = LM = 10^3 10^4 = 10^7$ ден. ед., капитала $K = 10^8$ ден. ед. и труда $L = 10^3$ чел.:

$$10^7 = A(10^8)^{1/2}(10^3)^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad A = 100.$$

Таким образом, окончательно получаем производственную функцию

$$F(K, L) = 100K^{1/2}L^{1/3}. \ \square$$

§ 1.2. Модель поведения производителя

Пусть затраты труда и капитала равны K и L, объем выпуска (в денежном выражении) определяется производственной функцией

$X = F(K, L)$, а цены факторов производства (труда и капитала) составляют соответственно p_K и p_L, тогда прибыль производителя будет равна

$$\Pi(K, L) = X - p_K K - p_L L = F(K, L) - p_K K - p_L L. \qquad (1.2.1)$$

Цены ресурсов определяются очевидным образом. Цена труда — это просто заработная плата работника. Цена капитала равна такой денежной сумме, которую необходимо в единицу времени тратить на содержание единицы капитала (т. е. одной денежной единицы). Таким образом, цена капитала равна *норме амортизации* — величине амортизационных отчислений на 1 ден. ед. производственных фондов.

Если считать **аксиомой производителя,** что он стремится получить наибольшую прибыль, то математическая формулировка **задачи производителя** такова: *требуется определить такую технологию (т. е. такие объемы затрат ресурсов), которые приносят максимальную прибыль:*

$$\begin{gathered} \Pi(K, L) \to \max, \\ K \geqslant 0, \ L \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.2.2}$$

На самом деле, указанная аксиома может быть справедливой только для фирм, которые находятся в *единоличном владении*; если же у фирмы *несколько собственников*, то совершенно не обязательно, чтобы собственники ставили менеджерам задачу максимизации прибыли — скорее они захотят *максимизировать не прибыль*, а *стоимость фирмы*, но решение этой задачи выходит за рамки

Подставим в задаче (1.2.2) вместо прибыли $\Pi(K, L)$ ее выражение по формуле (1.2.1):

$$\begin{gathered} \Pi(K, L) = F(K, L) - p_K K - p_L L \to \max, \\ K \geqslant 0,\ L \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.2.3}$$

Приравняем нулю частные производные прибыли по ресурсам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi(K, L)}{\partial K} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi(K, L)}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial [F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial K} = 0, \\ \dfrac{\partial [F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F(K, L)}{\partial K} - p_K = 0, \\ \dfrac{\partial F(K, L)}{\partial L} - p_L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K}=p_K,\\ \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L}=p_L\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial K}=p_K,\\ \dfrac{\partial X}{\partial L}=p_L.\end{cases}\tag{1.2.4}$$

Можно показать, что любая точка (K^*, L^*), удовлетворяющая условиям (1.2.4), обязательно будет точкой максимума прибыли, и при этом оптимальные затраты ресурсов K^* и L^* будут неотрицательными, т. е. условия (1.2.4) определяют оптимальное решение задачи производителя.

Приведем **экономическую интерпретацию условий максимума прибыли производителя.** В левых частях этих условий стоят предельные эффективности ресурсов, а в правых частях — цены ресурсов, поэтому можно интерпретировать условия (1.2.4) следующим образом: производитель достигает максимальной прибыли при таких затратах ресурсов K^* и L^*, что предельные эффективности ресурсов равны их ценам.

Пример 1.2.1. В условиях примера 1.1.1 известна средняя заработная плата $w = 10^3$ ден. ед. в мес. и период амортизации основных производственных фондов $n = 12$ мес. Требуется рассчитать оптимальный размер производственных фондов и оптимальную численность работников. Затем нужно определить, во сколько раз увеличится прибыль фирмы при переходе к оптимальным затратам факторов производства.

Решение. В результате решения примера 1.1.1 определена производственная функция фирмы: $F(K, L) = 100K^{1/2}L^{1/3}$.

Цена труда $p_L = w = 10^3$ ден. ед.— это заработная плата, а цена капитала $p_K = 1/n = 1/12$ ден. ед. равна ежемесячным амортизационным отчислениям на содержание одной денежной единицы производственных фондов, поэтому прибыль фирмы при таких затратах труда и капитала равна [согласно (1.2.1)]

$$\Pi(K, L) = X - p_K K - p_L L = 10^7 - \frac{1}{12}10^8 - 10^3 10^3 = \frac{2}{3} \text{ млн. ден. ед.}$$

Оптимальный размер фирмы задается условиями (1.2.4), состоящими в том, что предельные эффективности ресурсов должны быть в оптимальной точке равны ценам ресурсов. В данном случае предельная фондоотдача и предельная производительность труда равны соответственно

$$\frac{\partial X}{\partial K} = 50K^{-1/2}L^{1/3}, \qquad \frac{\partial X}{\partial L} = \frac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3},$$

поэтому условия оптимального размера фирмы (1.2.4) принимают вид

$$\begin{cases} 50K^{-1/2}L^{1/3} = 1/12, \\ \dfrac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3} = 10^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 600L^{1/3} = K^{1/2}, \\ K^{1/2} = 30L^{2/3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 600L^{1/3} = 30L^{2/3}, \\ K = 900L^{4/3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K^* = 144\,000\,000, \\ L^* = 8000. \end{cases}$$

При этом выпуск фирмы составит

$$X^* = 100(K^*)^{1/2}(L^*)^{1/3} = 100(144\,000\,000)^{1/2}(8000)^{1/3} = 24\,000\,000 \text{ ден. ед.},$$

а прибыль

$$\Pi^*(K, L) = X^* - p_K K^* - p_L L^* = 24\cdot 10^6 - \frac{1}{12}144\cdot 10^6 - 10^3\cdot 8\cdot 10^3 =$$

$$= 4 \text{ млн. ден. ед.}$$

Замечаем, что оптимальный выбор затрат труда и капитала позволил увеличить прибыль в шесть раз! ❑

§ 1.3. Модели налогообложения

Перейдем к обсуждению того, как меняется поведение производителей при введении налогов. Начнем с исследования изменения рыночного равновесия при введении **акциза** — налога, включаемого в цену товара (акциз может быть *выборочным*, т. е. применяться к определенной группе товаров, например, к алкогольной продукции, а может быть *универсальным* и взиматься со всех товаров, например, как налог с продаж). *Ставка акциза* t определяется как доля цены товара, взимаемая в виде налога.

В общем случае потребительский спрос на некоторый товар зависит от большого числа факторов: цены данного товара, цен других товаров, сезона, дохода покупателя и т. д. Если считать все факторы, кроме цены p, неизменными, то полученную зависимость спроса D от цены p можно рассматривать как ф у н к ц и ю с п р о с а $D = D(p)$.

Точно так же можно рассмотреть ф у н к ц и ю п р е д л о ж е н и я товара $S = S(p)$ — зависимость количества товара S, предлагаемого к продаже производителями, от цены товара p, которая сложилась на рынке.

При этом *равновесная цена* p_0 определяется из условия равенства спроса и предложения:

$$S(p_0) = D(p_0). \tag{1.3.1}$$

При введении акциза по ставке $t \in (0;1)$ равновесие спроса и предложения (1.3.1) изменится, новой равновесной ценой станет цена p_t, удовлетворяющая условию

$$S((1-t)p_t) = D(p_t), \tag{1.3.2}$$

поскольку теперь при цене товара p его стоимость для потребителя равна p, а выручка производителя от продажи единицы продукции равна $(1-t)p$.

Может показаться, что бремя акцизов целиком ложится на потребителя, т. е. при введении акциза по ставке t цены возрастают в $1/(1-t)$ раз, так чтобы после взимания налогов производитель получил ту же выручку от продажи единицы товара, что и раньше:

$$(1-t)\frac{1}{1-t}p_0 = p_0.$$

Это заблуждение, в чем позволяет убедиться следующий пример.

Пример 1.3.1. На рынке некоторого товара функция предложения $S(p) = 2p - 2$, а функция спроса $D(p) = 10 - p$. Требуется определить, во сколько раз изменится равновесная цена товара, реализованный спрос и выручка производителя при введении акциза по ставке $t \in (0;1)$. Полученные формулы нужно интерпретировать при установлении ставки акциза на уровне 1, 5, 20, 50 и 90%.

Решение. Вначале из условия (1.3.1) найдем равновесную цену до введения акциза:

$$S(p_0) = D(p_0) \Leftrightarrow 2p_0 - 2 = 10 - p_0 \Leftrightarrow p_0 = 4 \text{ ден. ед.}$$

Теперь определим из условия (1.3.2) равновесную цену после введения налога:

$$S((1-t)p_t) = D(p_t) \Leftrightarrow 2(1-t)p_t - 2 = 10 - p_t \Leftrightarrow p_t = \frac{12}{3-2t} \text{ ден. ед.} \quad (1.3.3)$$

Очевидно, $p_t > p_0$, определим, во сколько раз:

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{12}{4(3-2t)} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}t}.$$

Таким образом, в условиях рассматриваемого примера на потребителя ложится бремя оплаты двух третей введенного налога, а оставшуюся треть платит производитель.

Чтобы выяснить, на сколько процентов вырастает цена при введении акциза, преобразуем последнее выражение:

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}t} = 1 + \frac{\frac{2}{3}t}{1-\frac{2}{3}t}.$$

Отсюда следует, что введение акциза при ставке $t = 1\% = 0{,}01$ приводит к незначительному увеличению цены — на

$$\frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}01}{1-\frac{2}{3}\cdot 0{,}01} = \frac{1}{149} \approx 0{,}7\%,$$

введение 5%-ного акциза приводит к увеличению цены на

$$\frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}05}{1-\frac{2}{3}\cdot 0{,}05}=\frac{1}{29}\approx 3{,}5\%,$$

для ставок, равных 20, 50 и 90%, получаем соответственно увеличение цены на 15,4, 50 и 150%.

Естественно, увеличение цены приводит к уменьшению объема реализованного спроса и предложения, и как следствие, к уменьшению выручки производителя. До введения налога в точке равновесия реализовывался спрос

$$D(p_0) = 10 - p_0 = 6 \text{ ед.},$$

с введением акциза спрос стал равен

$$D(p_t) = 10 - \frac{12}{3-2t} = \frac{18-20t}{3-2t} \text{ ед.}$$

Найдем отношение нового и старого значений спроса:

$$\frac{D(p_t)}{D(p_0)}=\frac{18-20t}{6(3-2t)}=\frac{9-10t}{9-6t}=1-\frac{4t}{9-6t}.$$

При ставке акциза $t = 1\%$ из последнего выражения следует, что спрос снижается на

$$\frac{4 \cdot 0{,}01}{9 - 6 \cdot 0{,}01} = \frac{4}{894} \approx 0{,}5\%,$$

при 5%-ной ставке аналогичный расчет показывает уменьшение спроса после введения налога на

$$\frac{4 \cdot 0{,}05}{9 - 6 \cdot 0{,}05} = \frac{2}{87} \approx 2{,}3\%,$$

для ставок, равных 20 и 50%, получаем соответственно снижение спроса на 10,3 и 33,3%, а при 90%-ном акцизе в данном примере спрос полностью исчезает:

$$\frac{4 \cdot 0{,}9}{9 - 6 \cdot 0{,}9} = 1 = 100\%.$$

Теперь посмотрим, как изменится выручка производителя при введении акциза.

До введения акциза выручка равна

$$p_0 D\left(p_0\right) = 4 \cdot 6 = 24 \text{ ден. ед.},$$

после введения акциза выручка (с учетом уплаты налога) изменяется до

$$(1-t)\, p_t D\left(p_t\right) = \frac{24(1-t)(9-10t)}{(3-2t)^2} \text{ ден. ед.}$$

При этом

$$\frac{(1-t)\,p_t D(p_t)}{p_0 D(p_0)} = \frac{(1-t)(9-10t)}{(3-2t)^2} = 1 - \frac{t(7-6t)}{(3-2t)^2}.$$

Таким образом, при ставке акциза $t = 1\%$ выручка уменьшается на

$$\frac{0{,}01(7-6\cdot 0{,}01)}{(3-2\cdot 0{,}01)^2} \approx 0{,}8\%,$$

при 5%-ной ставке аналогичный расчет показывает уменьшение спроса после введения налога на

$$\frac{4 \cdot 0,05}{9 - 6 \cdot 0,05} = \frac{2}{87} \approx 2,3\%,$$

для ставок, равных 5, 20 и 50%, получаем соответственно снижение выручки на 4,0, 17,2 и 50,0%. При 90%-ном акцизе в данном примере выручка будет равна нулю. ❑

Теперь посмотрим на ту же ситуацию с точки зрения государства.

Пример 1.3.2. В условиях примера 1.3.1 требуется найти такую ставку акциза, которая обеспечит максимум налоговых поступлений.

Решение. Чтобы определить ставку акциза, максимизирующую налоговые поступления, поставим такую задачу:

$$
\begin{gathered}
T(t) = tp_t D(p_t) \to \max, \\
S\big((1-t)p_t\big) = D(p_t), \qquad (1.3.4) \\
p_t > 0,\ \ 0 < t < 1,
\end{gathered}
$$

которую, учитывая конкретный вид функции спроса из условия примера ($D(p) = 10 - p$), а также выражение для равновесной цены после введения акциза (1.3.3), преобразуем к виду

$$T(t) = tp_t\left(10 - p_t\right) \to \max,$$

$$p_t = \frac{12}{3-2t},$$

$$p_t > 0, \quad 0 < t < 1$$

или

$$T(t) = t\frac{12}{3-2t}\left(10 - \frac{12}{3-2t}\right) = \frac{24t(9-10t)}{(3-2t)^2} \to \max,$$

$$0 < t < 1.$$

Вычисляем производную:

$$T'(t) =$$

$$= \left(\frac{24t(9-10t)}{(3-2t)^2} \right)' = \frac{24}{(3-2t)^4} \left((9t-10t^2)'(3-2t)^2 - \left((3-2t)^2\right)'(9t-10t^2) \right) =$$

$$= \frac{24}{(3-2t)^4} \left((9-20t)(3-2t)^2 + 4(3-2t)(9t-10t^2) \right) =$$

$$= \frac{24}{(3-2t)^3} \left((9-20t)(3-2t) + 4(9t-10t^2) \right) =$$

$$= \frac{24}{(3-2t)^3} \left(27-78t+40t^2+36t-40t^2 \right) = \frac{72(9-14t)}{(3-2t)^3},$$

определяем критические точки: 9/14 и 3/2, находим промежутки возрастания: $(-\infty; 9/14]$ и $(3/2; +-\infty)$ и промежуток убывания $[9/14; 3/2)$. Это дает возможность определить точку максимума функции $T(t)$: $t^* = 9/14$. Поскольку данная точка глобального максимума принадлежит интервалу (0; 1), значение $t^* = 9/14 \approx 64\%$ и является решением задачи (1.3.4).

При такой ставке акциза равновесная цена равна

$$p^* = \frac{12}{3 - 2 \cdot \frac{9}{14}} = 7 \text{ ден. ед.} — \tag{1.3.5}$$

это на 75% выше, чем на рынке без акциза; равновесный спрос составляет

$$D\left(p^*\right)=10-7=3 \text{ ед. —}$$

это в два раза меньше, чем на рынке без акциза.

При этом налоговые поступления составляют

$$T(t^*)=t^* p^*\left(10-p^*\right)=\frac{9}{14}\cdot 7\cdot 3=\frac{27}{2}=13{,}5 \text{ ден. ед.,}$$

а выручка

$$(1-t^*)\,p^* D\left(p^*\right)=\left(1-\frac{9}{14}\right)\cdot 7\cdot 3=\frac{15}{2}=7{,}5 \text{ ден. ед.}$$

что на 69% меньше, чем до введения акциза. ❑

Посмотрим теперь, как введение акциза повлияет на оптимальное решение задачи производителя (1.2.3). После введения акциза (по ставке t) выражение для прибыли производителя изменится по сравнению с (1.2.3):

$$\Pi(K, L) = (1 - t)F(K, L) - p_K K - p_L L.$$

Запишем необходимые условия максимума прибыли:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi(K,L)}{\partial K}=0, \\ \dfrac{\partial \Pi(K,L)}{\partial L}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial[(1-t)F(K,L)-p_K K-p_L L]}{\partial K}=0, \\ \dfrac{\partial[(1-t)F(K,L)-p_K K-p_L L]}{\partial L}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-t)\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K}=p_K, \\ (1-t)\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L}=p_L. \end{cases}$$

У неоклассических производственных функций первые производные положительны, а вторые — отрицательны (см. параграф 1.1), поэтому $\partial F(K,L)/\partial K$ и $\partial F(K,L)/\partial K$ — положительные убывающие функции. Отсюда следует, что максимум прибыли при наличии акциза достигается при меньших затратах и труда, и капитала, и как следствие, при меньших объемах производства.

Перейдем теперь к рассмотрению **налога на прибыль.** Поскольку налог на прибыль не изменяет условие рыночного равновесия (1.3.1), он не изменяет равновесных рыночных цен, значений спроса и предложения.

Точно такой же вывод можно получить из сравнения задачи

$$\Pi(K, L) = (1-t)\left(F(K, L) - p_K K - p_L L\right)$$

с задачей (1.2.3): условия максимума прибыли в этих задачах совпадают.

Таким образом, между акцизом и налогом на прибыль есть существенные различия. В отличие от налога на прибыль, который является только инструментом перераспределения части доходов от успешных производителей в пользу государства, акциз является также инструментом рыночного регулирования, позволяя не только перераспределять доходы, но и регулировать объемы производства товаров.

§ 1.4. Модель управления запасами

В традиционной экономике материальных товаров предприятия тратят значительные ресурсы на содержание складских запасов, и перед такими предприятиями стоит важная задача управления запасами с целью предотвращения как дефицита, так и избытков.

Обсудим модель управления запасами, основная цель которой — определение оптимального размера заказываемой партии и оптимальной частоты заказов.

Будем считать, что производственные потребности v в единицу времени являются постоянным, заказанная партия доставляется одновременно, затраты K на организацию поставки постоянны и не зависят от размера q заказываемой партии, а издержки содержания единицы сырья составляют s за единицу времени.

Уровень запаса снижается равномерно от q до нуля, после чего подается заказ на доставку новой партии сырья величиной q. Заказ выполняется мгновенно, и уровень запаса восстанавливается до величины q. Зависимость уровня запаса I от времени t иллюстрируется рис. 1.4.1.

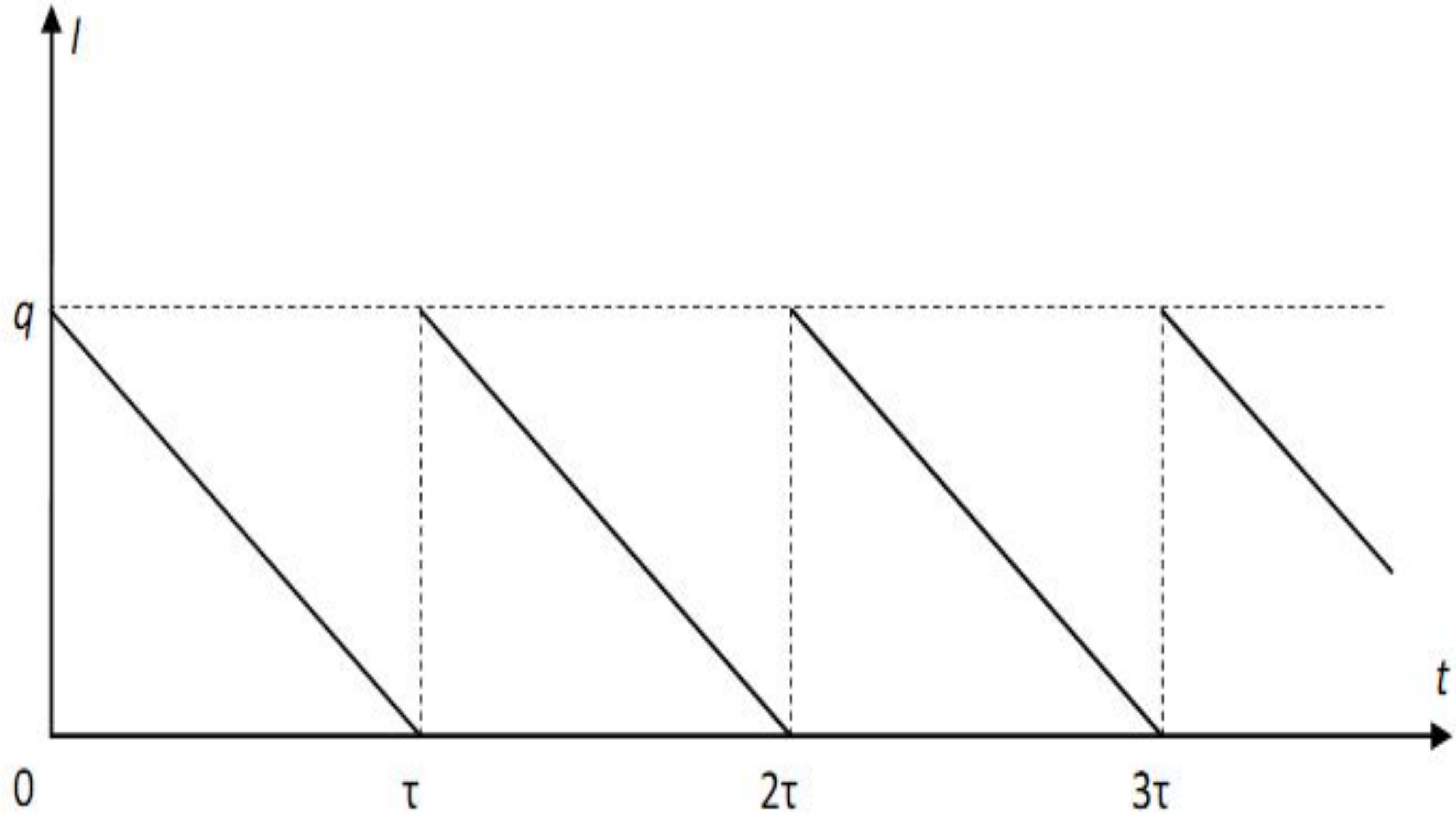


Рис. 1.4.1. *Динамика уровня запасов*

Интервал времени длиной τ называется *циклом запаса*. Длина цикла равна, очевидно, $\tau = q/v$, средняя величина запаса равна $q/2$. Поэтому издержки в течение цикла L состоят из стоимости заказа K и затрат по содержанию запаса:

$$L = K + s\frac{q}{2}\tau.$$

Издержки в единицу времени l получим, разделив издержки в течение цикла L на длину цикла τ:

$$l = \frac{L}{\tau} = \frac{K + s\frac{q}{2}\tau}{\tau} = \frac{K}{q/v} + s\frac{q}{2} = \frac{Kv}{q} + \frac{sq}{2}$$

Оптимальный размер заказываемой партии определим из необходимого условия максимума функции $l(q)$ — равенства нулю первой производной:

$$l'(q) = \frac{s}{2} - \frac{Kv}{q^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{s}{2} = \frac{Kv}{q^2} \quad \text{или} \quad q^2 = \frac{2Kv}{s}.$$

Учитывая неотрицательность размера заказа, окончательно получаем, что оптимальный размер заказываемой партии должен составлять

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}. \tag{1.4.1}$$

При этом достаточное условие минимума выполняется: $l''(q^*) = 2Kv/(q^*)^3 > 0$, так как $K, v, q^* > 0$.

Формула (1.4.1) называется **формулой Уилсона**.

При этом оптимальная длина цикла

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}}. \qquad (1.4.2)$$

Оптимальная стратегия управления запасами предусматривает заказ партии размером q^* через каждые τ^* единиц времени, а наименьшие затраты в единицу времени при такой стратегии будут равны

$$l(q^*) = \frac{Kv}{q^*} + \frac{sq^*}{2} = \frac{Kv}{\sqrt{\frac{2Kv}{s}}} + \frac{s\sqrt{\frac{2Kv}{s}}}{2} = \sqrt{\frac{Kvs}{2}} + \frac{\sqrt{2Kvs}}{2} = \sqrt{Kvs}.$$

Пример 1.4.2. Мебельная фабрика использует в своем производстве фанеру. Еженедельно требуется 200 листов фанеры, затраты на организацию каждой поставки равны 8000 руб., издержки содержания одного листа фанеры на складе равны 20 руб. в неделю. Требуется определить оптимальный размер заказываемой партии фанеры и цикл заказа.

Решение. По условию $v = 200$, $K = 8000$, $s = 20$. Используя формулы (1.4.1)—(1.4.2), получаем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 200}{20}} = \sqrt{160\,000} = 400, \quad \tau^* = \frac{q^*}{v} = \frac{400}{200} = 2.$$

Таким образом, каждые две недели следует заказывать по 400 листов фанеры. ❑

2. Элементы линейной алгебры

и балансовые модели экономики

§ 2.1. Векторы и матрицы

Совокупность n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, заданных в определенном порядке, называется *n-мерным вектором*. Числа a_i называются *компонентами* или *координатами* вектора, число n — его *размерностью*. Обозначают вектор одной жирной строчной латинской буквой:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

[на доске и в тетради, конечно, жирный шрифт не используется, но чтобы не возникало путаницы, можно над буквами, обозначающими векторы, ставить черточки или стрелочки: $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$].

Например, $\mathbf{x} = (9, -2, 4, -7, 0, 3)$ — это шестимерный вектор.

Допустим, что предприятие выпускает n видов продукции, притом предполагается изготовить продукцию первого вида в количестве x_1 шт., второго вида в количестве x_2 шт. и т. д. В этом случае производственную программу

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

можно рассматривать как n-мерный вектор.

Два n-мерных вектора **a** и **b** называются *равными*, если все их соответствующие компоненты равны:

$$a_i = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Суммой двух n-мерных векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется n-мерный вектор

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

компоненты которого получаются сложением соответствующих компонент данных векторов.

Предположим, например, что производственное объединение состоит из двух мебельных фабрик, которые выпускают столы, стулья, кресла и кровати. Пусть первая фабрика выпускает 1000 столов, 10 000 стульев, 2000 кресел и 500 кроватей в год, а вторая фабрика — 2500 столов, 12 000 стульев, 2000 кресел и 1000 кроватей в год. Тогда объем годового выпуска первой фабрики представляет собой вектор $\mathbf{a} = (1000, 10\,000, 2000, 500)$, объем годового выпуска второй фабрики — это вектор $\mathbf{b} = (2500, 12\,000, 2000, 1000)$, при этом объем годового выпуска всего объединения равен сумме векторов **a** и **b**:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3500, 22\,000, 4000, 1500).$$

Операция сложения векторов обладает свойствами *коммутативности* и *ассоциативности*:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}, \tag{2.1.1}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}). \tag{2.1.2}$$

Вектор

$$\boldsymbol{\theta}=(0,0,\ldots,0),$$

все компоненты которого равны нулю, называется *нуль-вектором*. Каков бы ни был вектор $\mathbf{a}$, справедливо равенство

$$\mathbf{a}+\boldsymbol{\theta}=\mathbf{a}, \tag{2.1.3}$$

т. е. нуль-вектор ведет себя при сложения векторов аналогично числу нуль в арифметике.

Вектор $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ называется *противоположным* вектору $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и обозначается $-\mathbf{a}$. Очевидно,

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0, \tag{2.1.4}$$

Операция *вычитания векторов* определяется как сложение с противоположным вектором

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}),$$

Под произведением вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число λ понимают вектор

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n),$$

компоненты которого получаются умножением всех компонент данного вектора на данное число, и обозначают $\lambda\mathbf{a}$ или $\mathbf{a}\lambda$. Например, если первая из рассмотренных мебельных фабрик пожелает увеличить свой выпуск в два раза, то это будет означать, что новый годовой план производства будет задаваться вектором $2\mathbf{a} = (2000, 20\,000, 4000, 1000)$.

Умножение вектора на число обладает свойством *ассоциативности*:

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\mu\lambda)\mathbf{a} \tag{2.1.5}$$

и свойством *дистрибутивности* относительно векторного и числового сомножителей:

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \tag{2.1.6}$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}. \tag{2.1.7}$$

Очевидно, при умножении любого вектора на единицу этот вектор не изменится:

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}, \tag{2.1.8}$$

а при умножении любого вектора на число нуль и любого числа на нуль-вектор получается нуль-вектор

$$0\mathbf{a} = \lambda\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \tag{2.1.9}$$

Скалярным произведением двух n*-мерных векторов* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называют число, равное сумме произведений одноименных координат данных векторов

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n. \tag{2.1.10}$$

В пакете прикладных программ Microsoft Excel скалярное произведение векторов вычисляется с помощью функции

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \text{СУММПРОИЗВ(вектор } \mathbf{a}\text{; вектор } \mathbf{b}\text{)},$$

где «вектор **a**» и «вектор **b**» — ссылки на ячейки рабочего листа, содержащие соответствующие векторы.

Пример 2.1.1. Даны векторы $\mathbf{a} = (1, 5, 15)$ и $\mathbf{b} = (2, -1, 0)$. Требуется вычислить их скалярное произведение вручную и с помощью пакета Microsoft Excel.

Решение. Вычисляем $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 15 \cdot 0 = -3$ по формуле (2.1.10):

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 15 \cdot 0 = -3 .$$

Теперь получим решение с помощью пакета Microsoft Excel. Введем данные векторы **a** и **b** в ячейки A2:C2 и E2:G2 рабочего листа Microsoft Excel, а в ячейку A5 введем формулу «=СУММПРОИЗВ(A2:C2;E2:G2)», как показано на рис. 2.1.1, *а*.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**a**				**b**		
2	1	5	–1		2	–1	0
3							
4	**<a, b>**						
5	=СУММПРОИЗВ(A2:C2;E2:G2)						

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	**a**				**b**		
2	1	5	–1		2	–1	0
3							
4	**<a, b>**						
5	–3						

б) результаты расчета

	A	B	C	D	E	F	G
1	**a**				**b**		
2	1	5	–1		2	–1	0
3							
4	**<a, b>**						
5	=СУММПРОИЗВ(A2:C2;E2:G2)						

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	**a**				**b**		
2	1	5	–1		2	–1	0
3							
4	**<a, b>**						
5	–3						

б) результаты расчета

Рис. 2.1.1. *Вычисление скалярного произведения в Microsoft Excel*

Результат вычисления представлен на рис. 2.1.1, *б* (в ячейке A5). Естественно, результаты ручного и компьютерного вычисления скалярного произведения совпали. ❑

Операция скалярного умножения векторов обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \ \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle, \tag{2.1.11}$$
$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle, \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geqslant 0,$$

причем знак равенства в последнем соотношении возможен лишь при $\mathbf{a} = \boldsymbol{\theta}$.

Предположим, что в магазине продается картофель, помидоры и огурцы, причем цена 1 кг картофеля равна 10 руб. цена 1 кг огурцов равна 30 руб., а цена 1 кг помидоров равна 50 руб. Тогда вектор цен в этом магазине равен $\mathbf{p} = (10, 30, 50)$. Если покупатель собирается приобрести набор товаров $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, т. е. x_1 кг картофеля, x_2 кг огурцов и x_3 кг помидоров, то скалярное произведение вектора цен **p** на вектор набора товаров **x**, равное

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 10x_1 + 30x_2 + 50x_3,$$

то скалярное произведение вектора цен **p** на вектор набора товаров **x**, равное

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 10x_1 + 30x_2 + 50x_3 ,$$

представляет собой стоимость набора товаров **x**. Покупатель, располагающий для покупки картофеля, помидоров и огурцов бюджетом I=400 руб., может приобрести только такие наборы товаров, которые удовлетворяют так называемому бюджетному ограничению

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leqslant I$$

или, в нашем случае,

$$10x_1 + 30x_2 + 50x_3 \leqslant 400 .$$

Совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m строк и n столбцов, называется *матрицей размера* $m \times n$. В книгах матрицы обозначают жирными заглавными буквами латинского алфавита:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или, кратко,

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

(на доске и в тетради матрицы достаточно обозначать просто заглавными буквами).

Элементы матрицы обозначаются строчными буквами с двумя индексами, из которых первый означает номер строки матрицы, в которой стоит данный элемент, а второй индекс — номер столбца, например, элемент a_{34} находится на пересечении третьей строки и в четвертого столбца матрицы $\mathbf{A}$.

Иногда для обозначения матриц вместо круглых скобок используют квадратные скобки или двойные вертикальные черточки:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{A}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*, строки и столбцы — ее *рядами*.

Множество всех матриц, состоящих из m строк и n столбцов, обозначается $\mathbb{R}^{m\times n}$, поэтому для того, чтобы кратко записать, что матрица **A** имеет размер $m\times n$, часто пользуются обозначением

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Две матрицы **A** и **B** одного и того же размера $m\times n$ называются *равными*, если равны все их соответствующие элементы:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица, состоящая из одного столбца (т. е. если $n = 1$) [или из одной строки (т. е. если $m = 1$)], называется *вектором — столбцом* [или, соответственно, *вектором — строкой*]

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю. Нулевая матрица обозначается

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы подчеркнуть, что нулевая матрица имеет размер $m\times n$, мы будем (когда это необходимо) пользоваться нижним индексом:

$$\mathbf{O}_{m\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \Big\} m \text{ строк} .$$

Если $m = n$, то матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

называется *квадратной*, а число ее строк (совпадающее с числом столбцов и равное n) — *порядком матрицы*. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее *главную диагональ*. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *единичной*, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные — нулю:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы подчеркнуть, что единичная матрица имеет n-й порядок, мы будем (когда это необходимо) пользоваться нижним индексом:

$$\mathbf{E}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} n \text{ строк}.$$

Если в матрице **A** заменить строки столбцами, сохранив их порядок, то получится новая матрица

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемая *транспонированной по отношению к матрице* **A**. Очевидно, $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

В пакете Microsoft Excel для транспонирования матриц используется функция

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \text{ТРАНСП(матрица } \mathbf{A}\text{)},$$

где «матрица **A**» — ссылка на ячейки рабочего листа, содержащие данную матрицу. Эта формула должна быть введена в рабочий лист как ф о р м у - л а м а с с и в а Microsoft Excel (конкретные пояснения по использованию формул массива даны в примере2.1.2).

Пример 2.1.2. Дана матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel матрицу $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Решение. Найдем матрицу $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, транспонированную к матрице $\mathbf{A}$. Первая строка матрицы $\mathbf{A}$ $(1 \quad 2 \quad -3)$ станет первым столбцом матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, а вторая строка матрицы $\mathbf{A}$ $(4 \quad 5 \quad 0)$ станет вторым столбцом матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь поясним, как получить тот же результат в пакете Microsoft Excel. Введем матрицу $\mathbf{A}$ в ячейки A2:C3 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.2, *а*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**A**				**A**^{T}			
2	1	2	–3		=ТРАНСП(A2:C3)			
3	4	5	0					
4								

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**A**				**A**^{T}			
2	1	2	–3		1	4		
3	4	5	0		2	5		
4					–3	0		

б) результаты расчета

Рис. 2.1.2. *Транспонирование матрицы в Microsoft Excel*

Матрица $\mathbf{A}^T$ имеет две строки и три столбца, значит, матрица $\mathbf{A}^T$ будет иметь три строки и два столбца. Отведем под результат ячейки E2:F4 (они как раз занимают три строки и два столбца). В ячейку E2 введем формулу «=ТРАНСП(A2:C3)», причем эту формулу необходимо ввести как ф о р м у л у м а с с и в а. Для этого нужно мышью выделить диапазон E2:F4, начиная с ячейки E2, содержащей формулу, затем нажать клавишу <F2>, а затем — комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. Результат представлен на рис. 2.1.2, *б* (в ячейках E2:F4). Замечаем, что результаты ручного и компьютерного транспонирования матрицы совпали. Если формуле ввести не как формулу массива, то будет рассчитан только левый верхний элемент результата: число 1. ❑

Под *суммой двух матриц* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ одного и того же размера понимают матрицу, элементы которой получаются сложением соответствующих элементов данных матриц

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Произведение матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *на число* λ — это матрица, элементы которой получаются умножением всех элементов данной матрицы на данное число:

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над векторами.

Пример 2.1.3. Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel их сумму $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ и произведение матрицы $\mathbf{A}$ на число 3.

Решение. Данные матрицы имеют одинаковый размер 2×3, поэтому их можно складывать, при этом сумма $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ будет иметь тот же размер 2×3. Элементы суммы получаются сложением соответствующих элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 2+1 & -3+(-1)\\ 4+1 & 5+2 & 0+(-7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -4\\ 5 & 7 & -7\end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы **A** на число 3 вычисляется так:

$$3\mathbf{A}=3\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot(-3)\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & -9\\ 12 & 15 & 0\end{pmatrix}.$$

Рассчитать сумму матриц и произведение матрицы на число в пакете Microsoft Excel очень просто. Введем матрицы **A** и **B** в ячейки A2:C3 и E2:G3 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.3, *а*. Сумма $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ имеет размер 2×3, поэтому отведем под результат ячейки A6:C7 (они как раз занимают две строки и три столбца). В ячейку A6 введем формулу «=A2+E2», далее скопируем ячейку A6 в буфер обмена, выделим диа-

(они как раз занимают две строки и три столбца). В ячейку A6 введем формулу «=A2+E2», далее скопируем ячейку A6 в буфер обмена, выделим диапазон A6:C7 и вставим в этот диапазон формулу из буфера обмена. В результате в ячейках A6:C7 будет рассчитана сумма $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (рис. 2.1.3, *б*). Произведение $3\mathbf{A}$ рассчитывается аналогично (см. рис. 2.1.3). Компьютерные расчеты дали, конечно, те же результаты, что и ручные вычисления. ❑

	A	B	C	D	E	F	G
1	**A**				**B**		
2	1	2	–3		2	1	–1
3	4	5	0		1	2	–7
4							
5	**A + B**				**3A**		
6	=A2+E2				=3*A2		
7							

а) формулы Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	**A**				**B**		
2	1	2	–3		2	1	–1
3	4	5	0		1	2	–7
	A + B				**3A**		
4	3	3	–4		3	6	–9
5	5	7	–7		12	15	0

б) результаты расчета

Рис. 2.1.3. *Вычисление суммы матриц и произведения матрицы на число в Microsoft Excel*

Умножение матрицы на матрицу определяется только при условии, что число столбцов первого сомножителя **A** равно числу строк второго сомножителя **B**. В этом случае размерность любого вектора — строки матрицы A будет совпадать с размерностью любого вектора — столбца матрицы B, и можно составить их скалярные произведения в любом сочетании. Под произведением матрицы $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times k}$ на матрицу $\mathbf{B}=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{k\times n}$ понимают матрицу $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, элемент c_{ij} которой равен скалярному произведению *i*-й строки матрицы **A** на *j*-й столбец матрицы **B**:

$$c_{ij}=\left\langle (a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ik}),(b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{kj})\right\rangle$$

или

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{t=1}^{k}a_{it}b_{tj},\quad i=1,2,\ldots,m,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Очевидно, число строк произведения совпадает с числом строк первого сомножителя, а число столбцов — с числом столбцов второго сомножителя.

В пакете Microsoft Excel для вычисления произведения матриц используется функция

$$\mathbf{AB} = \text{МУМНОЖ(матрица } \mathbf{A}\text{; матрица } \mathbf{B}\text{)},$$

где «матрица **A**» и «матрица **B**» — ссылки на ячейки рабочего листа, содержащие соответствующие матрицы. Данная формула должна быть введена в рабочий лист как ф о р м у л а м а с с и в а Microsoft Excel (конкретные пояснения по использованию формул массива даны в примере 2.1.3).

Пример 2.1.1. Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel их произведение **AB** (если такое произведение существует).

Решение. Прежде всего убедимся, что данные матрицы можно перемножать и найдем размер результата умножения. Запишем под матрицами их размеры:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{4\times3} \arrow[rr, equal] \arrow[dr] & & \mathbf{3\times2} \arrow[dl] \\ & \mathbf{4\times2} & \end{tikzcd}$$

В матрице **A** ч е т ы р е строки и три столбца, в матрице **B** три строки и д в а столбца. Число столбцов в матрице **A** равно числу строк в матрице **B**, поэтому матрицу **A** можно умножить на матрицу **B**, при этом произведение **AB** будет иметь столько же строк, сколько в матрице **A** (т. е. ч е т ы р е), и столько же столбцов, сколько в матрице **B** (т. е. д в а). Итак,

$$\mathbf{AB} = \left(\begin{array}{c|c} ? & ? \\ \hline ? & ? \\ \hline ? & ? \\ \hline ? & ? \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{4\times 2}.$$

Теперь на место вопросительных знаков поставим числа — элементы произведения **AB**:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 5 & 2\cdot 2 + 0\cdot 4 + (-1)\cdot 6 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 0\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 0\cdot 6 \\ (-2)\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 5 & (-2)\cdot 2 + 1\cdot 4 + 1\cdot 6 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 10 \\ 6 & 6 \\ 22 & 28 \end{pmatrix};$$

Поясним, как получен элемент произведения **AB**, который стоит на пересечении первой строки и первого столбца. В левой матрице мы двигаемся вдоль первой строки (она выделена пунктиром), и одновременно с этим в правой матрице мы двигаемся вдоль первого столбца (он также выделен пунктиром). Когда мы встречаем два очередных элемента a_{1t} (из первой матрицы) и b_{t1} (из второй матрицы), мы их перемножаем, и все полученные произведения складываем:

$$\langle (2, 0, -1), (1, 3, 5) \rangle = 2\cdot 1 + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 5 = -3 .$$

Чтобы получить элемент произведения, который стоит на пересечении первой строки и второго столбца, мы аналогичные действия произвели с первой строкой матрицы **A** и со вторым столбцом матрицы **B**:

$$\left\langle (2, 0, -1), (1, 3, 5) \right\rangle = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 6 = -2 .$$

Остальные элементы рассчитываются аналогично.

Итак,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 10 \\ 6 & 6 \\ 22 & 28 \end{pmatrix}.$$

Теперь поясним, как рассчитать произведение данных матриц **A** и **B** в пакете Microsoft Excel. Введем матрицы **A** и **B** в ячейки A2:C5 и E2:F4 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.3, *a*.

Произведение **AB** имеет размер 4×2, поэтому отведем под результат ячейки H2:I5 (они как раз занимают четыре строки и два столбца). В ячейку H2 введем формулу «=МУМНОЖ(A2:C5;E2:F4)», причем эту формулу необходимо ввести как ф о р м у л у   м а с с и в а. Для этого нужно мышью выделить диапазон H2:I5, начиная с ячейки H2, содержащей формулу, затем нажать клавишу <F2>, а затем — комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. Результат представлен на рис. 2.1.3, *б* (в ячейках H2:I5). Замечаем, что результаты ручного и компьютерного вычисления произведения матриц совпали. Заметим, что если формула будет введена не как формула массива, то будет рассчитан только левый верхний элемент результата: –3. ❑

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**A**				**B**			**AB**					
2	2	0	–1		1	2		=МУМНОЖ(A2:C5;E2:F4)					
3	1	2	0		3	4							
4	–2	1	1		5	6							
5	1	2	3										

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**A**				**B**			**AB**					
2	2	0	–1		1	2		–3	–2				
3	1	2	0		3	4		7	10				
4	–2	1	1		5	6		6	6				
5	1	2	3					22	28				

б) результаты расчета

Рис. 2.1.1. *Вычисление произведения матриц в Microsoft Excel*

Нетрудно доказать, что действие умножения матрицы на матрицу обладает свойствами:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}),\ \alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}),$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC},\ \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC},\ (\mathbf{AB})^{T} = \mathbf{B}^{T}\mathbf{A}^{T},\ \mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}.$$

Последнее свойство показывает, что единичная матрица **E** среди всех квадратных матриц данного порядка выполняет такую же роль, как число единица среди чисел. Советуем читателю доказать, что никакая другая матрица в такой роли выступать не может. Указанным обстоятельством мы воспользуемся позже для того, чтобы ввести понятие обратной матрицы.

Произведение матриц, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей: в общем случае

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

В отдельных случаях равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ может иметь место — тогда матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются *перестановочными* между собой.

Пример 2.1.4. Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, $\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$

Решение. Имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

значит,

$$\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 49 & 56 \\ 49 & 42 & 63 \\ 56 & 63 & 147 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 & 65 & 21 & 71 \\ 65 & 90 & 35 & 45 \\ 21 & 35 & 14 & 14 \\ 71 & 45 & 14 & 54 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 24 & 12 \\ 24 & 16 & 8 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 56. \ \square$$

В примере 2.1.4 матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ имеют разные размеры, точно так же различаются размером матрицы $\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$. В следующем примере размеры матриц **AB** и **AB** совпадают, однако эти матрицы **A** и **B** не являются перестановочными.

Пример 2.1.5. Нужно проверить, являются ли перестановочными матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данные матрицы не являются перестановочными, поскольку

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix},$$

и $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. ❑

Если $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — квадратная матрица n-го порядка, то ее можно умножить саму на себя, и произведение $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ также является квадратной матрицей n-го порядка. Матрицу $\mathbf{A}^2$ можно умножить на матрицу $\mathbf{A}$, и тогда получится матрица $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ того же порядка. Вообще, *k-й степенью* квадратной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется матрица

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k\text{ раз}} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

По определению считается, что если $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, то

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$$

(точно так же, как и нулевая степень ненулевого числа равна единице: если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$).

Пример 2.1.6. Вычислить $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}^1 - 4\mathbf{A}^0$, где матрица $\mathbf{A}$ задана в примере 2.1.5.

Решение. Имеем:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}^1 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \ \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A}^1 - 4\mathbf{A}^0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 40 \\ 60 & 82 \end{pmatrix}. \ \square$$

В экономике и управлении матрицы очень важны. Рассмотрим одну из типичных задач — **задачу планирования производства**.

Предприятие может выпускать n видов продукции, используя для этого m видов ресурсов. Известна технологическая матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

затрат ресурсов на производство единицы каждого вида продукции [элемент a_{ij} этой матрицы равен количеству ресурса i-го вида ($i = 1, 2, \ldots, m$), которое необходимо затратить в процессе производства единицы продукции j-го вида ($j = 1, 2, \ldots, n$)]. Каждый из столбцов технологической матрицы описывает некоторую технологию, т. е. процесс превращения ресурсов в конечный продукт.

Известен также вектор

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

имеющихся в распоряжении предприятия объемов ресурсов и вектор

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

удельной прибыли предприятия (т. е. c_j — это прибыль, которую предприятие получает от реализации единицы продукции j-го вида).

Требуется составить производственную программу, обеспечивающую предприятию наибольшую прибыль с учетом ограниченности запасов ресурсов (вспомним: пример такой задачи мы рассматривали во введении).

Если обозначить через x_j план производства продукции j-го вида, то производственная программа предприятия будет задаваться вектором

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (2.1.12)$$

Суммарный расход первого ресурса на производство всей продукции (всех видов), равный

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$

не может быть больше запаса первого ресурса b_1:

не может быть больше запаса первого ресурса b_1:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1.$$

Аналогичные требования должны выполняться и для расходов других ресурсов:

$$\begin{array}{l} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{array}$$

Прибыль предприятия от реализации всей произведенной продукции равна

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

Цель состоит в том, чтобы подобрать отыскать такой план производства (2.1.12), который обеспечит предприятию наибольшую прибыль:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{2.1.13}$$

при ограничениях по заданным ресурсам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.1.14}$$

где по смыслу задачи

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{2.1.15}$$

Задачу (2.1.12)—(2.1.14) удобно записать в матричном виде:

$$z = \mathbf{cx} \to \max,$$

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geqslant \boldsymbol{\theta}.$$

Линейные пространства

Итак, мы определили вектор как упорядоченную систему чисел и научились складывать векторы и умножать вектор на число. Известно, что аналогичные действия можно выполнять на множестве функций. Для того чтобы с единой точки зрения изучать различные множества объектов, на которых определены операции сложения и умножения на число, вводят понятие линейного пространства.

Множество $\mathcal{L}$ элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ называется *линейным пространством*, если выполняются следующие условия:

1) имеется правило, которое позволяет построить для каждых двух элементов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из $\mathcal{L}$ третий элемент из $\mathcal{L}$, называемый *суммой* элементов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначаемый $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;

Стр 45-56

Системы линейных алгебраических уравнений

В экономических исследованиях, планировании и управлении приходится рассматривать системы алгебраических уравнений со многими неизвестными величинами. *Система из k уравнений первой степени с n неизвестными* может быть записана в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

где неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подлежат определению, а коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kn}$ при неизвестных и свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_k$ уравнений заданы, притом первый индекс коэффициента совпадает с номером уравнения, в котором содержится данный коэффициент, второй индекс — с номером неизвестной, при которой этот коэффициент поставлен. Кратко запишем систему линейных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,k.$$

Совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, взятых в определенном порядке, называют *решением системы уравнений* (2.3.1), если они, будучи подставлены в уравнения системы на место соответствующих неизвестных, обращают все уравнения в тождества. Решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системы (2.3.1) называют *неотрицательным*, если все его компоненты α_i неотрицательны.

Система линейных алгебраических уравнений (2.3.1) называется *совместной*, если она имеет решение. Совместная система называется *определенной* или *неопределенной* в зависимости от того, имеет ли она одно или более решений. Система вида (2.3.1) называется *несовместной* или *противоречивой*, если она не имеет решения.

Две системы линейных алгебраических уравнений с одним и тем же числом неизвестных называются *эквивалентными*, или *равносильными*, если они или обе несовместны, или обе совместны и имеют одни и те же решения; число уравнений в эквивалентных системах может быть различным. В процессе отыскания решений систему уравнений можно подвергать только таким преобразованиям, которые переводят ее в эквивалентные системы.

Относительно любой системы линейных алгебраических уравнений можно задать вопросы:

- совместна она или нет;
- если совместна, то каково число решений;
- как найти все решения.

Процесс отыскания ответов на первые два вопроса называется *исследованием системы*, а процесс отыскания решений — *решением системы*.

Процесс отыскания ответов на первые два вопроса называется *исследованием системы*, а процесс отыскания решений — *решением системы*.

Мы рассмотрим метод Жордана — Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) для исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений, в котором процессы исследования и поиска решений совпадают.

Составим матрицу **A** из коэффициентов при неизвестных системы линейных алгебраических уравнений. Ее принято называть *матрицей системы* (2.3.1), а матрицу $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, получающуюся добавлением к **A** столбца свободных членов системы (2.3.1), называют *расширенной матрицей*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Очевидно, левые части уравнений системы (2.3.1) совпадают с элементами матрицы-произведения $\mathbf{Ax}$, поэтому систему линейных алгебраических уравнений (2.3.1) можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Пример 2.3.1. Нужно проверить, является ли вектор

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

решением системы линейных уравнений, которая задана расширенной матрицей

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right).$$

Решение. Подставим координаты вектора $\mathbf{y}$ вместо неизвестных в данную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 + 7\cdot 2 + 3\cdot 0 + 1\cdot(-2) = 9 \neq 6, \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 2\cdot 0 + 2\cdot(-2) = 9 \neq 4, \\ 9\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1\cdot 0 + 7\cdot(-2) = 1 \neq 2. \end{cases}$$

Так как вычисленные значения не совпадают с координатами вектора $\mathbf{b}$, то вектор $\mathbf{y}$ не является решением данной системы уравнений. ❑

Элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений называют преобразования следующих трех типов:

- перестановка двух каких-нибудь уравнений системы;
- умножение обеих частей одного из уравнений на любое число, отличное от нуля;
- прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число.

Нетрудно видеть, что элементарные преобразования переводят данную систему линейных алгебраических уравнений в эквивалентную систему.

Подвергая систему линейных алгебраических уравнений элементарным преобразованиям, можно исключить любую неизвестную из всех уравнений, кроме какого-нибудь одного уравнения. Предположим, что в системе уравнений (2.3.1) коэффициент a_{rs} отличен от нуля и что мы решили исключить неизвестную x_s из всех уравнений системы, кроме r-го уравнения. Назовем a_{rs} *разрешающим коэффициентом*, x_s — *разрешающей неизвестной*, уравнение с номером r — *разрешающим уравнением*.

Стр 58