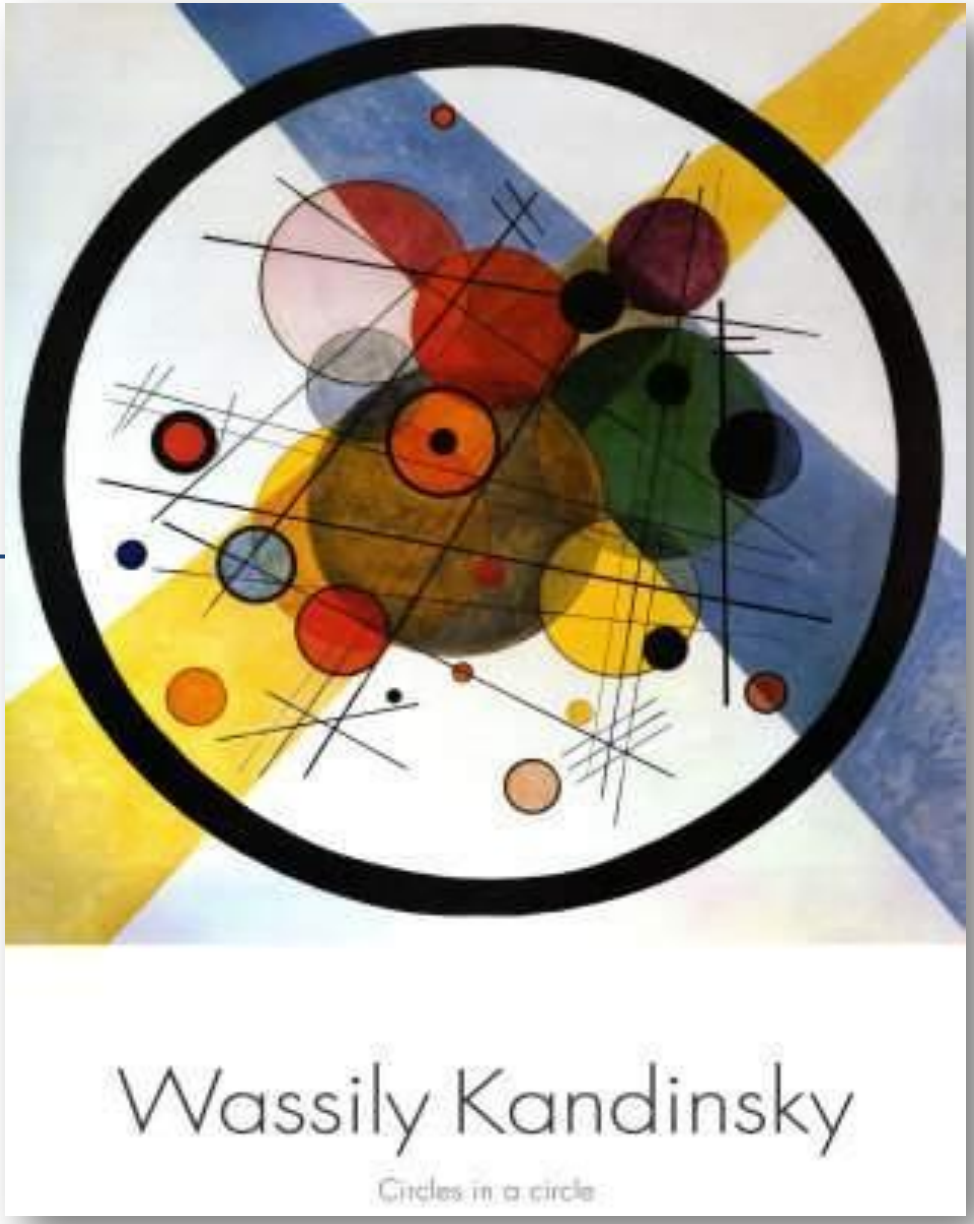
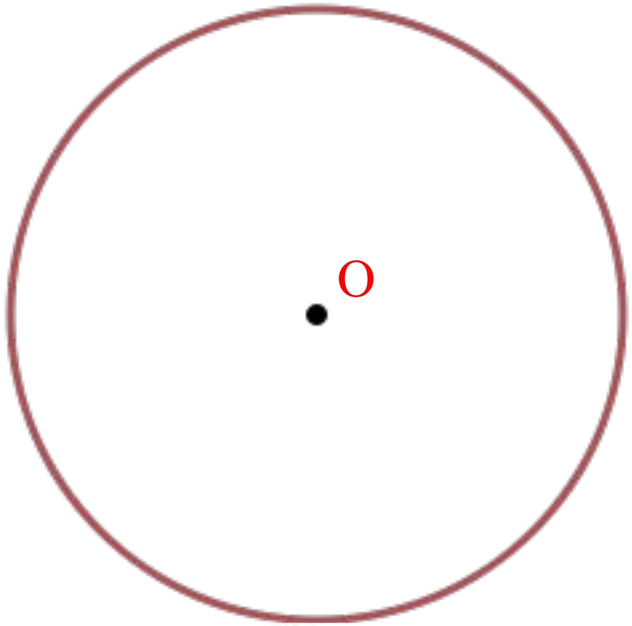
Окружность

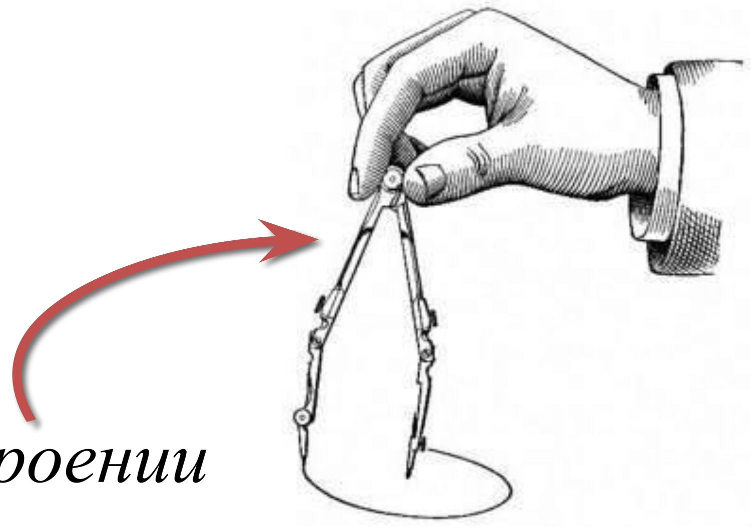
Занимательная математика



Определение

Окружность — геометрическое место всех точек плоскости , равноудалённых от заданной точки, называемой центром, на заданное ненулевое расстояние , называемое её радиусом .

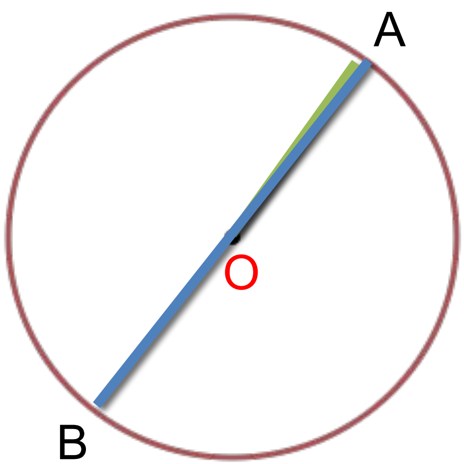




Используйте циркуль при построении окружности

ВСПОМНИ!!!

Центр окружности -точка, от которой равноудалены на заданное расстояние все точки окружности. О -центр окружности



Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, а также его длина, называется **радиусом окружности**.
ОА- радиус окружности

Диаметром окружности называется хорда данной окружности, проходящая через ее центр.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой окружности**, а также хордой ограниченного ей круга.
АВ- хорда, проходящая через ее центр О

Свойства окружности

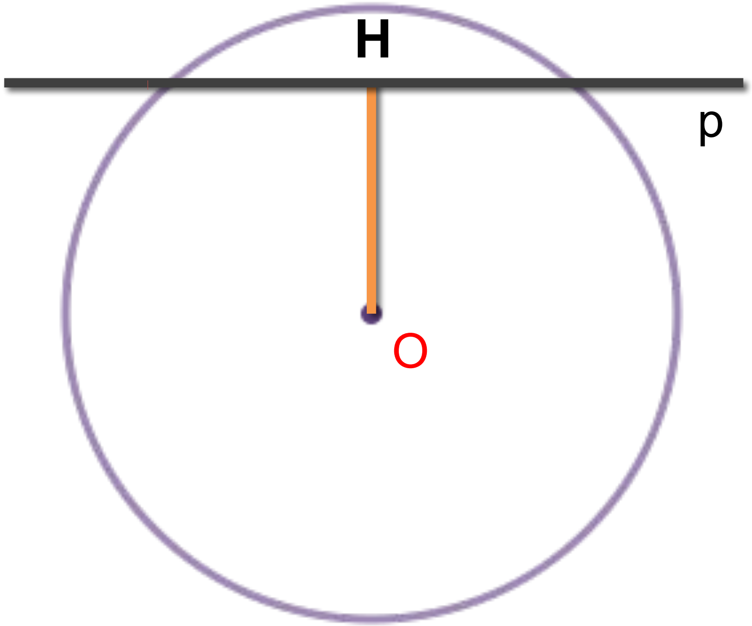
Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (*касательная*); иметь с ней две общие точки (*секущая*).

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Если прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках — концах диаметра, лежащего на этой прямой.

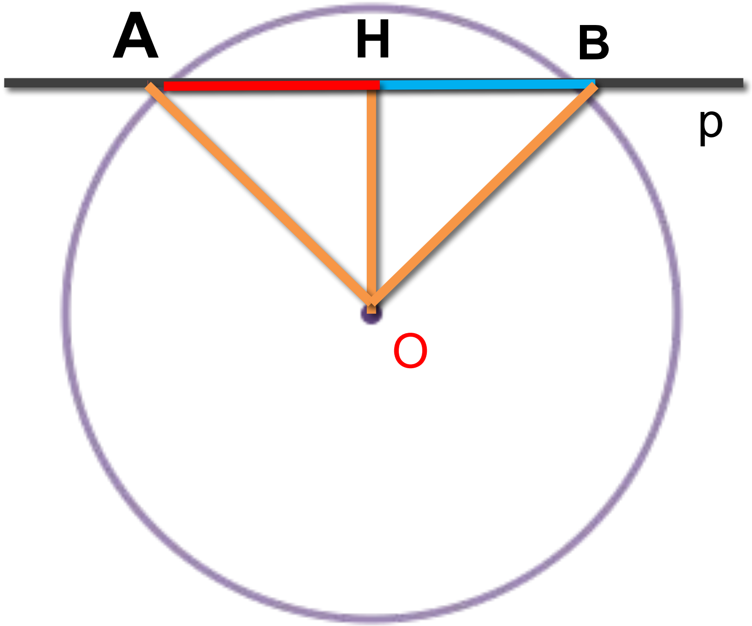


Пусть прямая p не проходит через центр о окружности радиуса r.

Проведем перпендикуляр OH к прямой p и обозначим буквой d длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от центра данной окружности до прямой

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

1) $d < r$



На прямой p от точки H отложим два отрезка HA и HB длины которых равны r^2-d^2

По теореме Пифагора
$OA = OH^2 + HA^2 = \hat{}d^2 + (r^2-d^2) = r,$
$OБ = OH^2 + HB^2 = \hat{}d^2 + (r^2-d^2) = r.$

Следовательно, точки А и В лежат на окружности и, значит, являются общими точками прямой p и данной окружности.

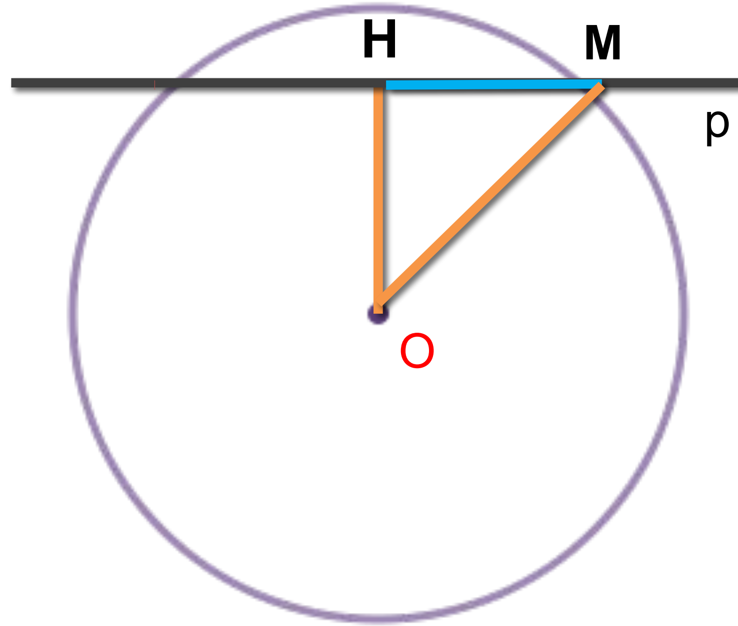
Итак, если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности (d < r), то прямая и окружность имеют две общие точки.
В этом случае прямая называется секущей по отношению к окружности.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

2) d = r

В этом случае ОН= r, т. е. точка Н лежит на окружности и, значит, является общей точкой прямой и окружности

Прямая р и окружность не имеют других общих точек, так как для любой точки М прямой р, отличной от точки Н, ОМ > ОН = r (наклонная ОМ больше перпендикуляра ОН), и, следовательно, точка М не лежит на окружности.



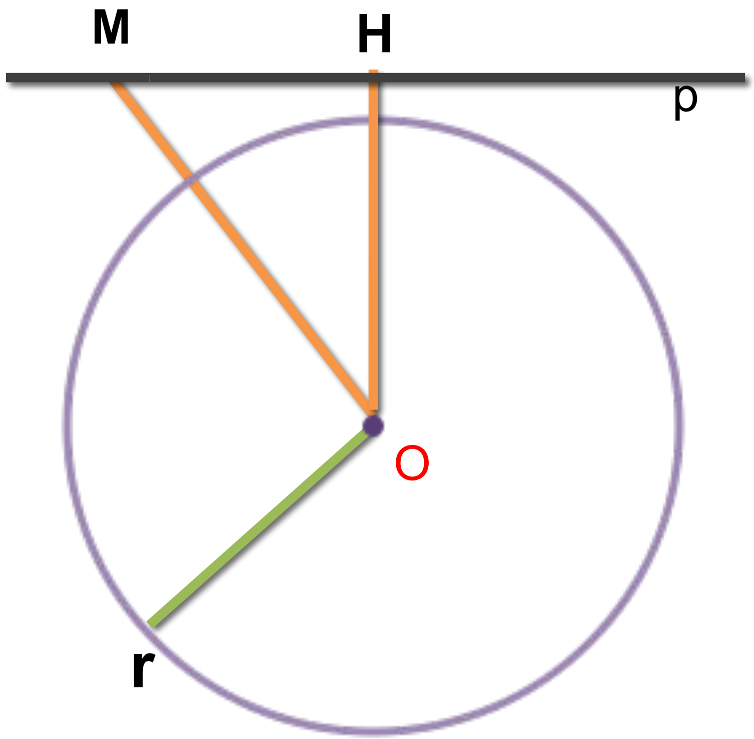
Итак, если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

3) d > r

В этом случае OH > r, поэтому для любой точки M прямой p OM > OH > r

Следовательно, точка M не лежит на окружности.



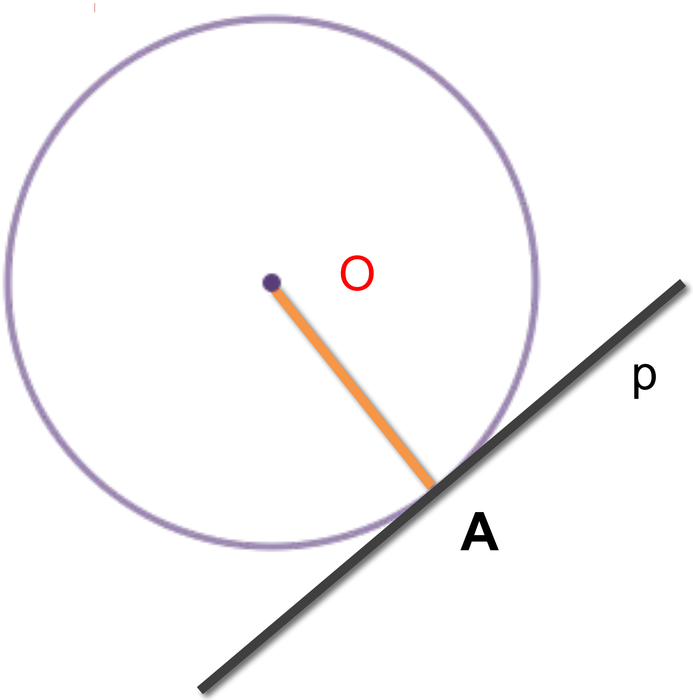
Итак, если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Прямая и окружность могут иметь одну или две общие точки и могут не иметь ни одной общей точки.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

На рисунке прямая p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания.



КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

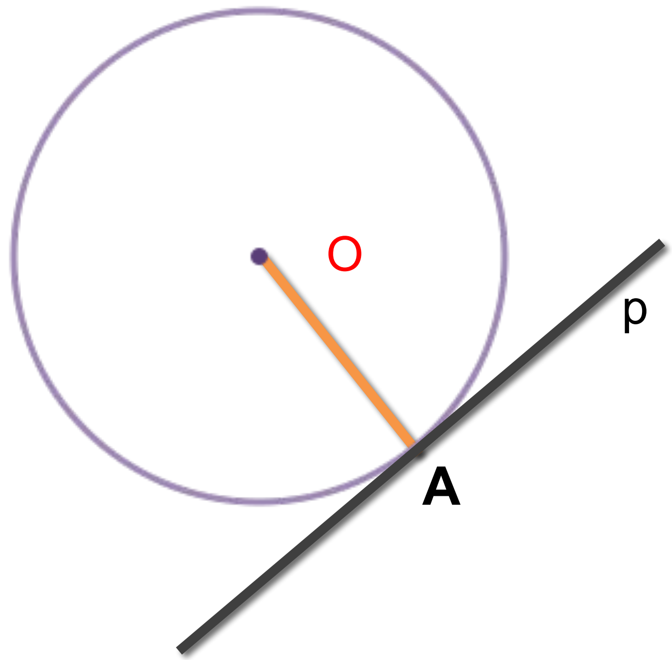
Теорема о свойстве касательной к окружности

Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство

Пусть p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания. Докажем, что касательная p перпендикулярна к радиусу OA.



Предположим, что это не так.

Тогда радиус OA является наклонной к прямой p. Так как перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой p, меньше наклонной OA, то расстояние от центра O окружности до прямой p меньше радиуса. Следовательно, прямая p и окружность имеют две общие точки.

Но это противоречит условию: прямая p — касательная.

Т.о., прямая p перпендикулярна к радиусу OA. **Теорема доказана.**

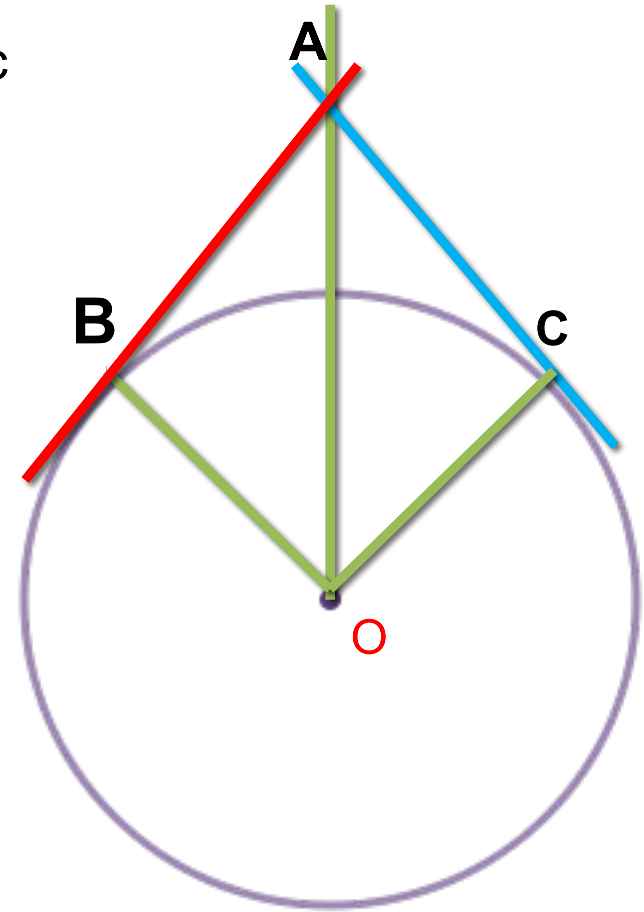
КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрим две касательные к окружности с центром О, проходящие через точку А и касающиеся окружности в точках В и С.

Отрезки АВ и АС назовем отрезками касательных, проведенными из точки А.

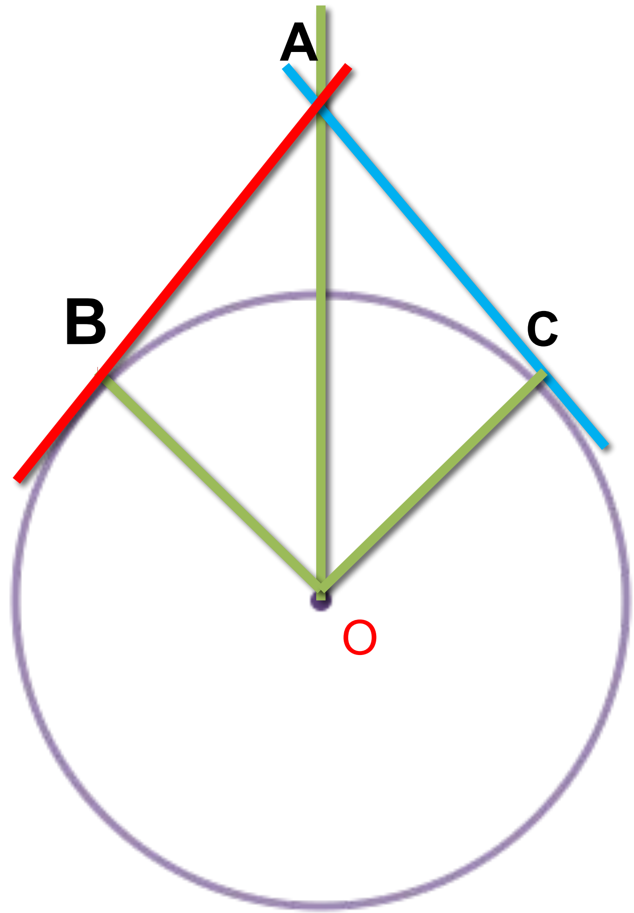
Они обладают следующим свойством, вытекающим из доказанной теоремы:

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Доказательство:
По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники АВО и АСО прямоугольные.
Они равны, так как имеют общую гипотенузу ОА и равные катеты ОВ и ОС. Следовательно, АВ=АС и 3=4, ч.т.д.

Теорема, обратная теореме о свойстве касательной (признак касательной)

Теорема

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство

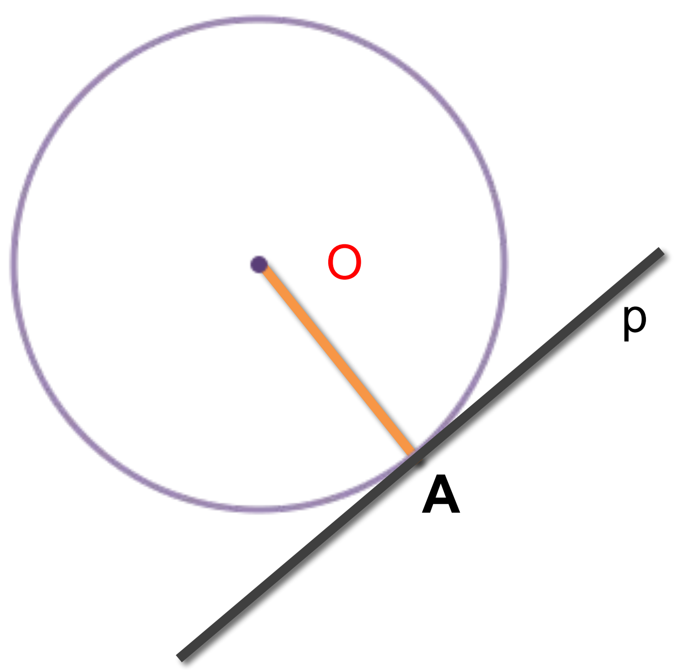
Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра окружности к данной прямой. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Но это и означает, что данная прямая является касательной к окружности. Теорема доказана.

Теорема, обратная теореме о свойстве касательной (признак касательной)

На этой теореме основано решение задач на построение касательной. Решим одну из таких задач.

Задача

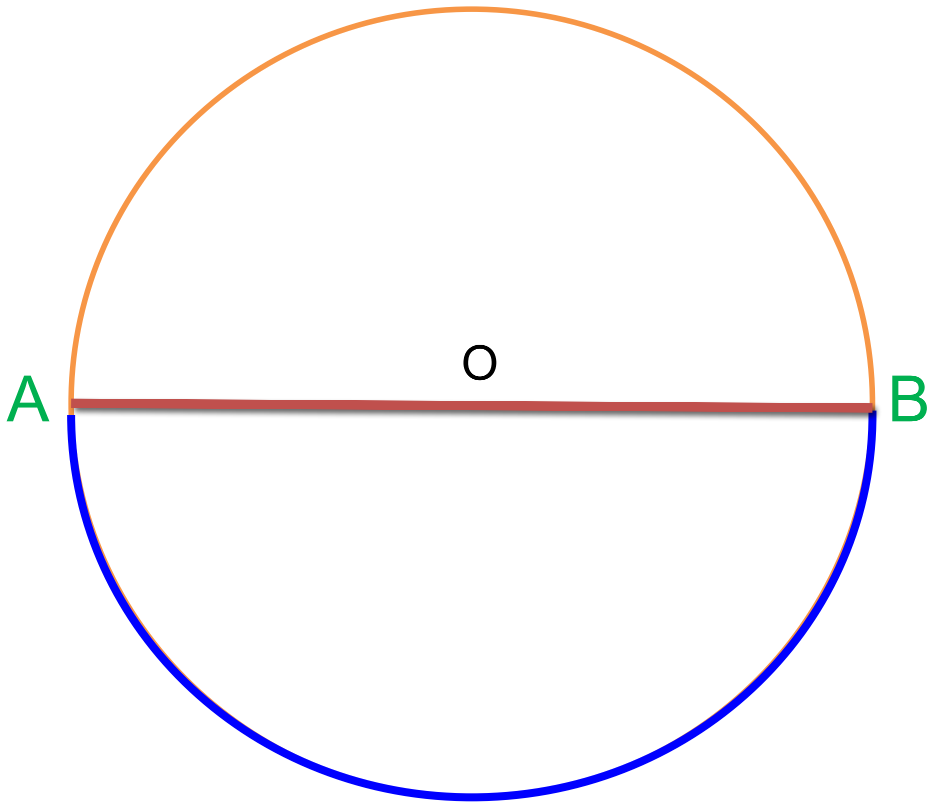
Через данную точку А окружности с центром О провести касательную к этой окружности.



Решение

Проведем прямую ОА, а затем построим прямую p, проходящую через точку А перпендикулярно к прямой ОА. По признаку касательной прямая p является искомой касательной.

Дуга называется **полуокружностью**, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности



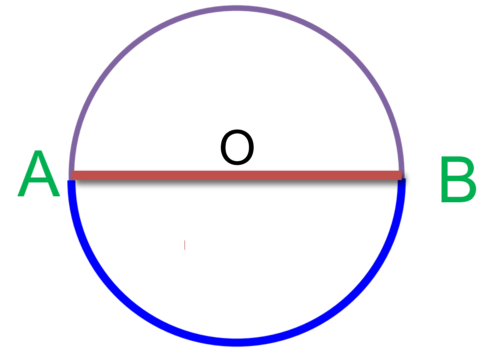
Угол с вершиной в центре окружности называется ее центральным углом. Пусть стороны центрального угла окружности с центром O пересекают ее в точках A и B.

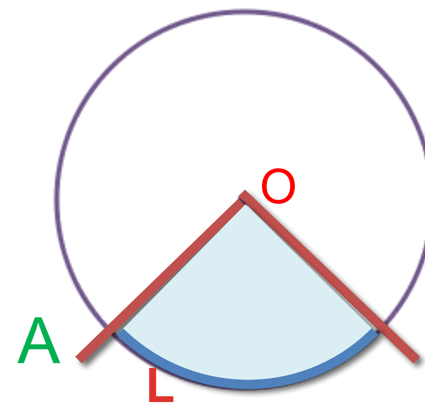
Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B

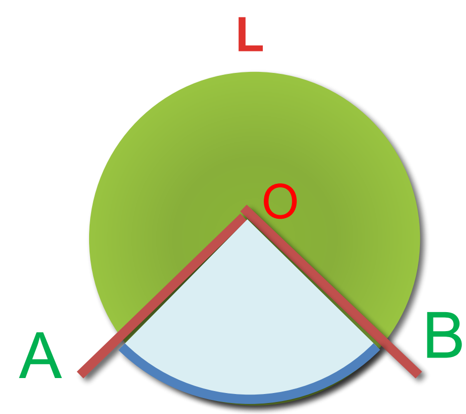
Если <AOB развернутый, то ему соответствуют две полуокружности

Если <AOB неразвернутый, то говорят, что дуга AB, расположенная внутри этого угла, меньше полуокружности.

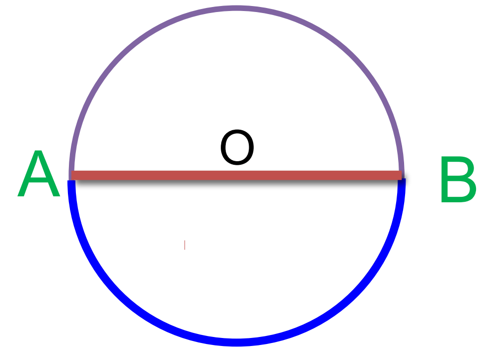
Про другую дугу с концами A и B говорят, что она больше полуокружности (дуга ALB)

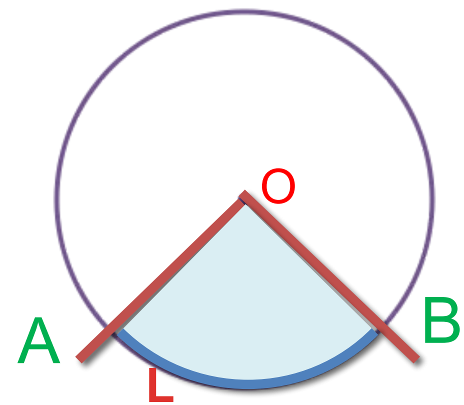




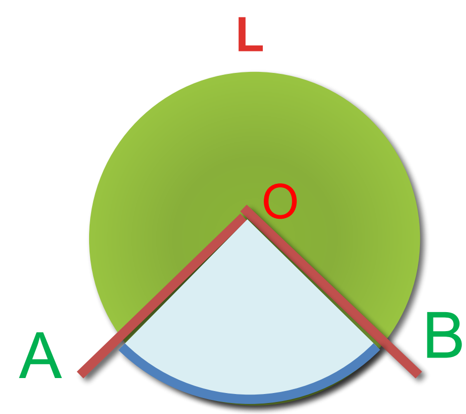


Дугу окружности можно измерять в градусах. Если дуга АВ окружности с центром в точке О меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее градусная мера считается равной градусной мере центрального угла



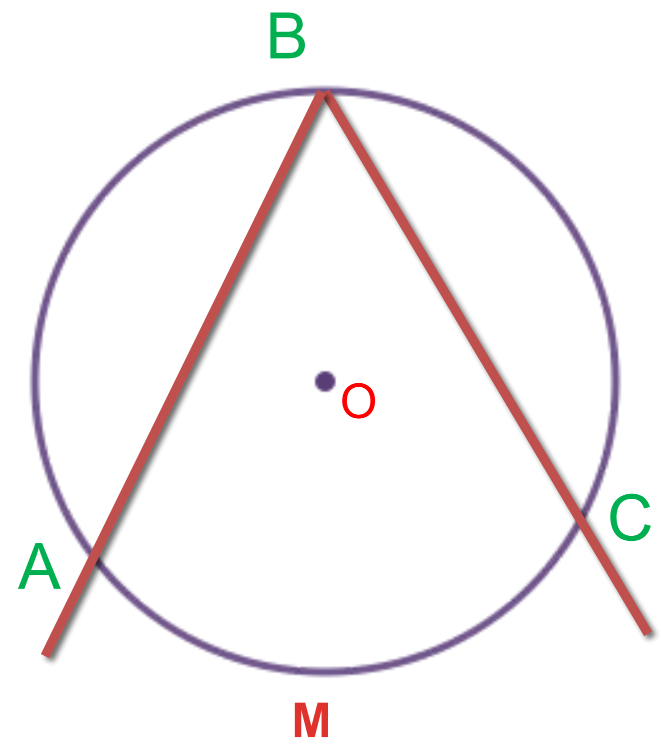


Если же дуга АВ больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной $360° - \angle AOB$



ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

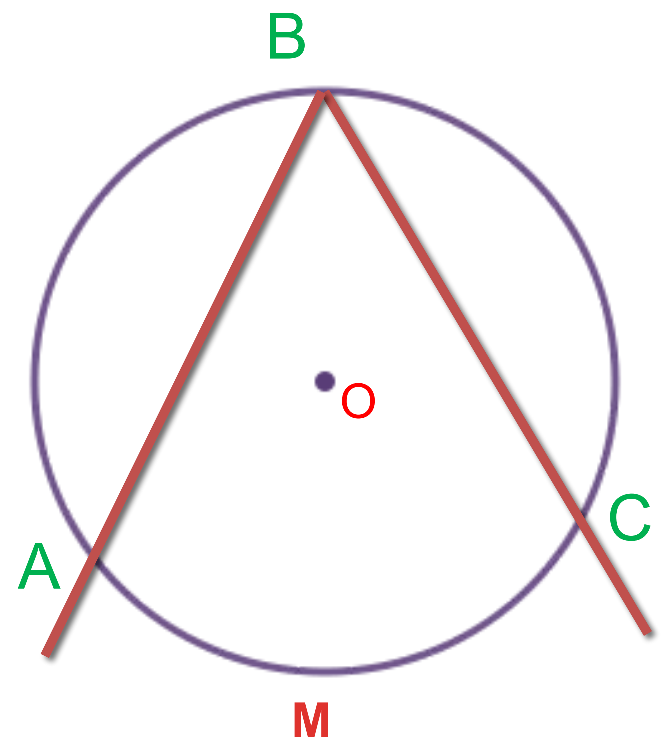
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается



ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

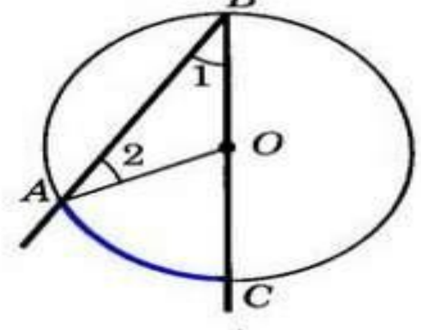
Доказательство

Пусть < АВС — вписанный угол окружности с центром О, опирающийся на дугу АС.
Докажем, что < АВС= = 0,5 АС. Рассмотрим три возможных случая расположения луча ВО относительно угла АВС.



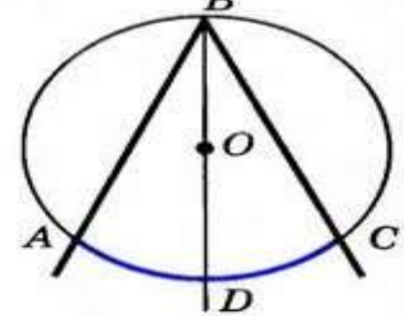
Три возможных случая расположения луча ВО относительно угла АВС

1) *Луч ВО совпадает с одной из сторон угла АВС* (Рис.а)



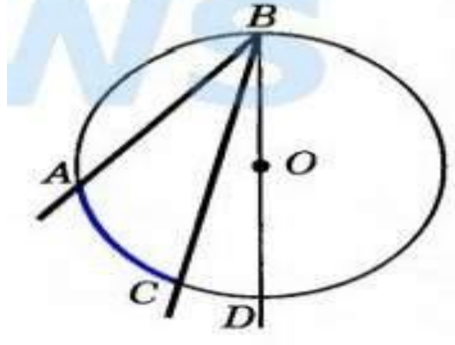
а)

2) Луч ВО делит угол АВС на два угла (Рис. б)



б)

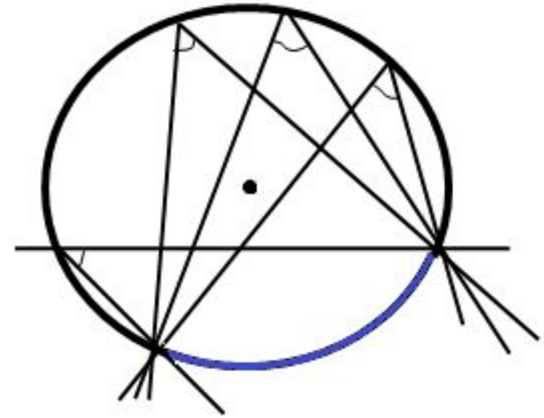
3) Луч ВО не делит угол АВС на два угла и не совпадает со стороной этого угла (Рис. в)



в)

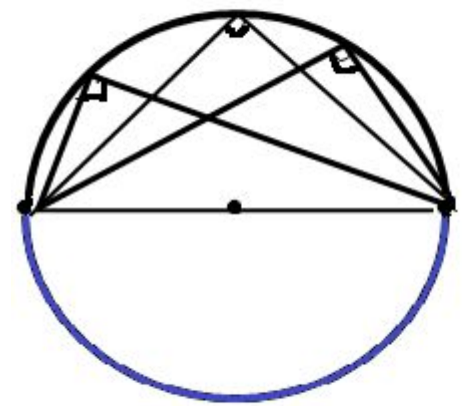
Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны



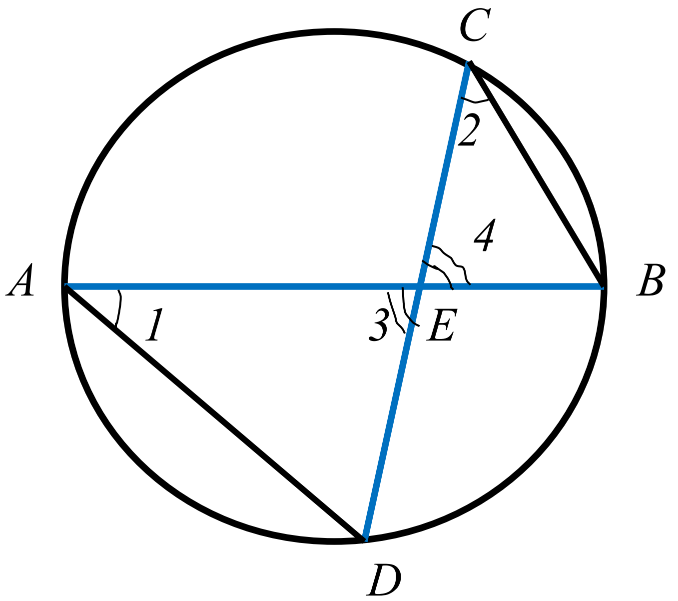
Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – прямой



Теорема

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды



Доказательство

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E
Докажем, что

$AE \cdot BE = CE \cdot DE$

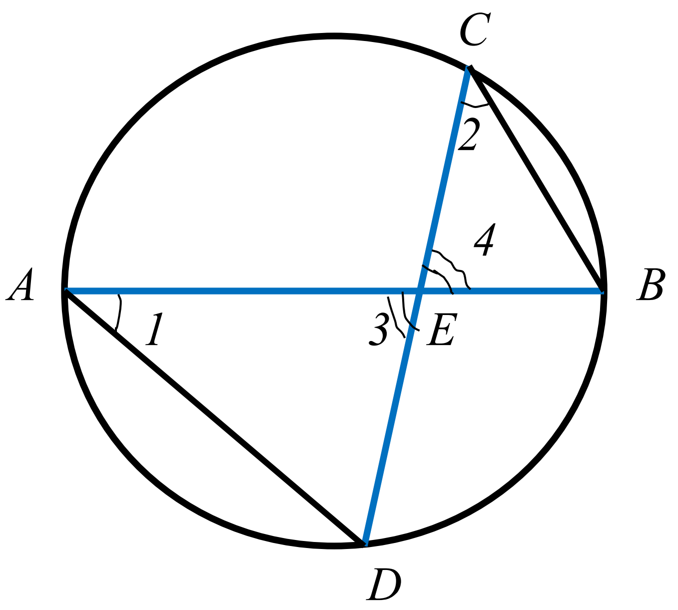
Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные.

По первому признаку подобия треугольников $\triangle ADE \sim \triangle CBE$

Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$,или

$AE \cdot BE = CE \cdot DE$

Теорема доказана.



ОРНАМЕНТЫ