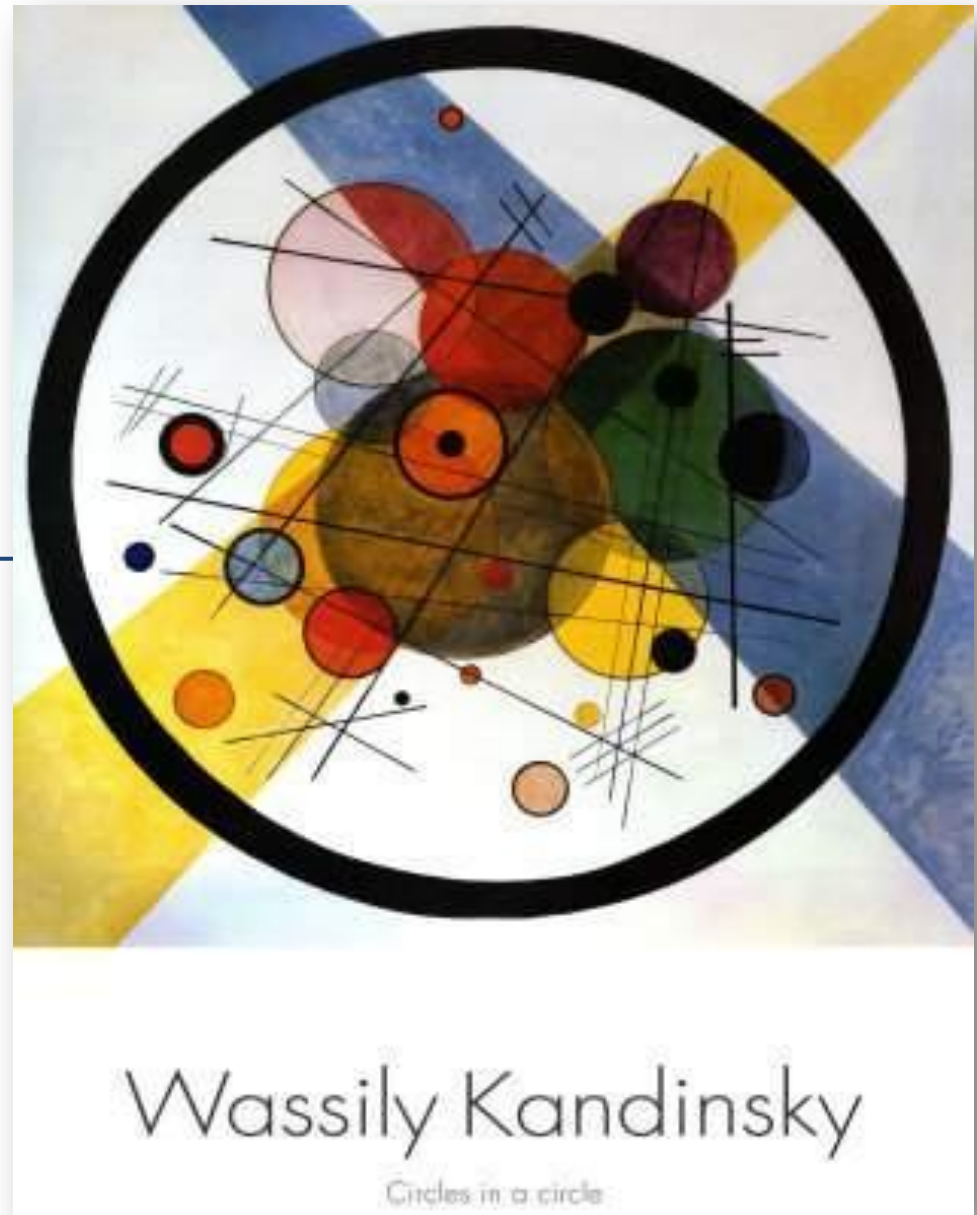


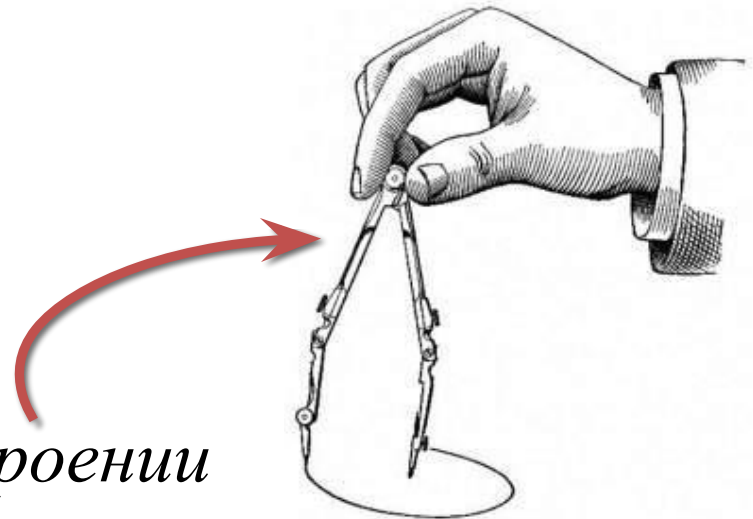
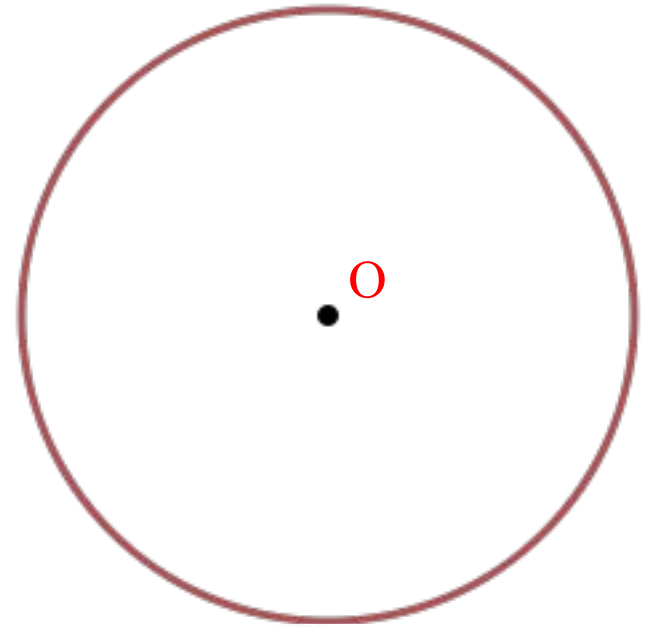
Окружность

Занимательная
математика



Определение

Окружность — геометрическое место всех точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой центром, на заданное ненулевое расстояние, называемое её радиусом.



Используйте циркуль при построении окружности

ВСПОМНИ!!!

Центр окружности - точка, от которой равноудалены на заданное расстояние все точки окружности. O - центр окружности

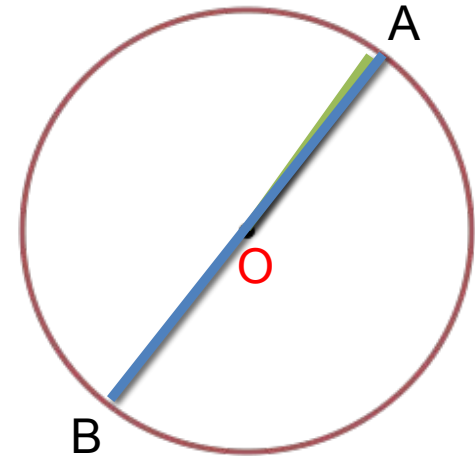
Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, а также его длина, называется **радиусом окружности**.

OA - радиус окружности

Диаметром окружности называется хорда данной окружности, проходящая через ее центр.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой окружности**, а также хордой ограниченного ей круга.

AB - хорда, проходящая через ее центр O



Свойства окружности

Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (*касательная*); иметь с ней две общие точки (*секущая*).

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.

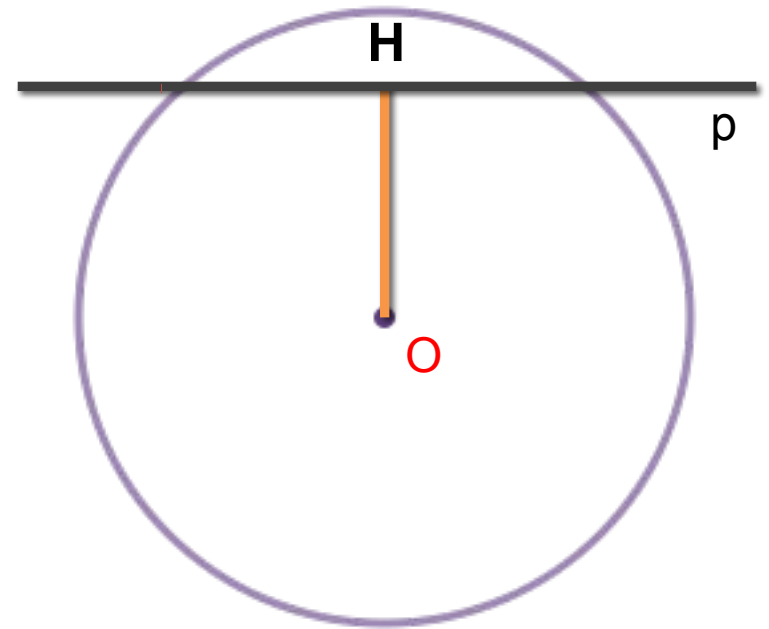
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

И ОКРУЖНОСТИ

Если прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках — концах диаметра, лежащего на этой прямой.

Пусть прямая p не проходит через центр o окружности радиуса r .

Проведем перпендикуляр OH к прямой p и обозначим буквой d длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от центра данной окружности до прямой



ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

1) $d < r$

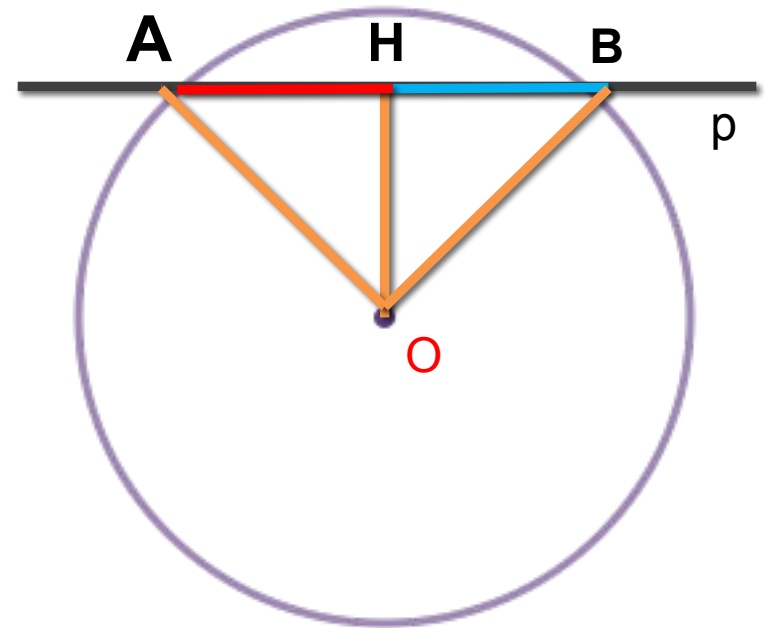
На прямой p от точки H отложим два отрезка HA и $HВ$ длины которых равны $r^2 - d^2$

По теореме Пифагора

$$OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r,$$

$$OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r.$$

Следовательно, точки A и B лежат на окружности и, значит, являются общими точками прямой p и данной окружности.



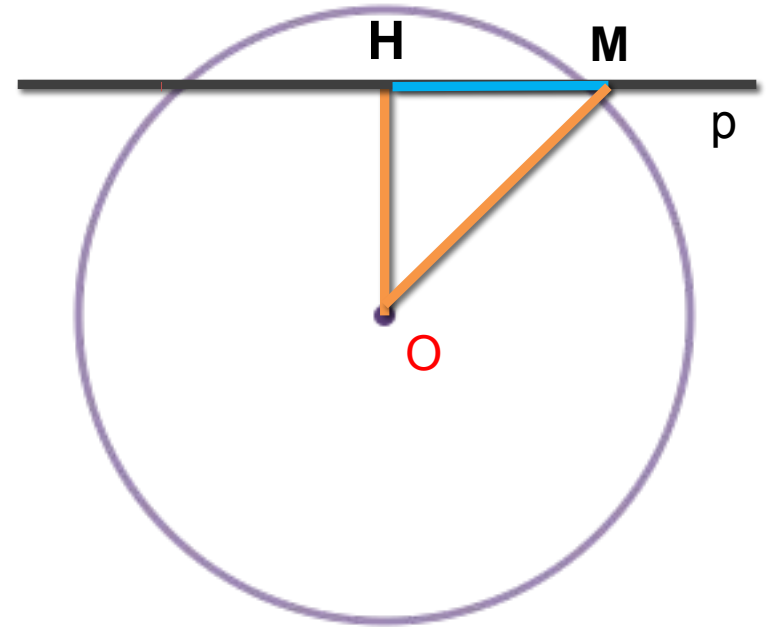
Итак, если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности ($d < r$), то прямая и окружность имеют две общие точки. В этом случае прямая называется секущей по отношению к окружности.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

2) $d = r$

В этом случае $OH = r$, т. е. точка H лежит на окружности и, значит, является общей точкой прямой и окружности

Прямая p и окружность не имеют других общих точек, так как для любой точки M прямой p , отличной от точки H , $OM > OH = r$ (наклонная OM больше перпендикуляра OH), и, следовательно, точка M не лежит на окружности.



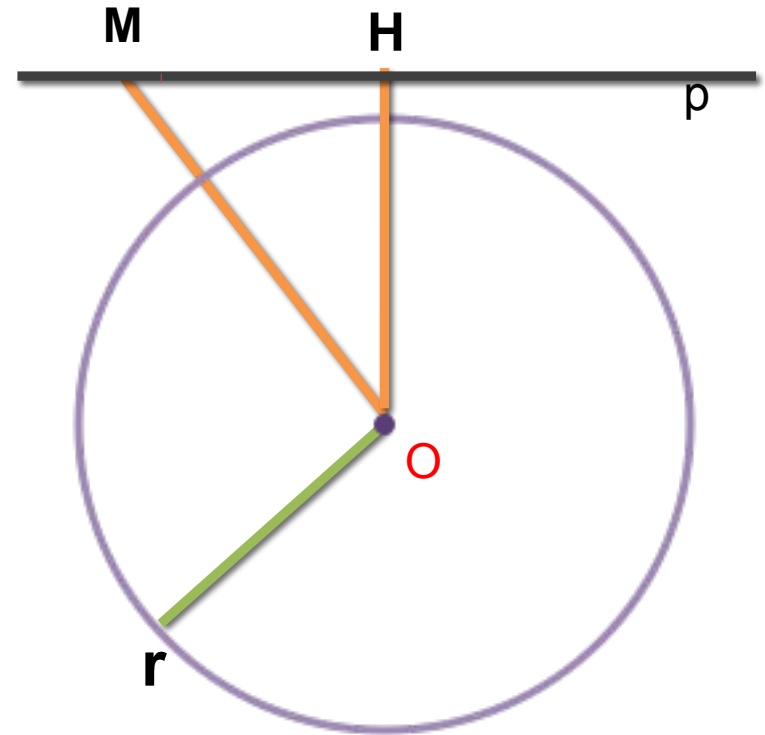
Итак, если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

3) $d > r$

В этом случае $OH > r$, поэтому для любой точки M прямой p $OM > OH > r$

Следовательно, точка M не лежит на окружности.



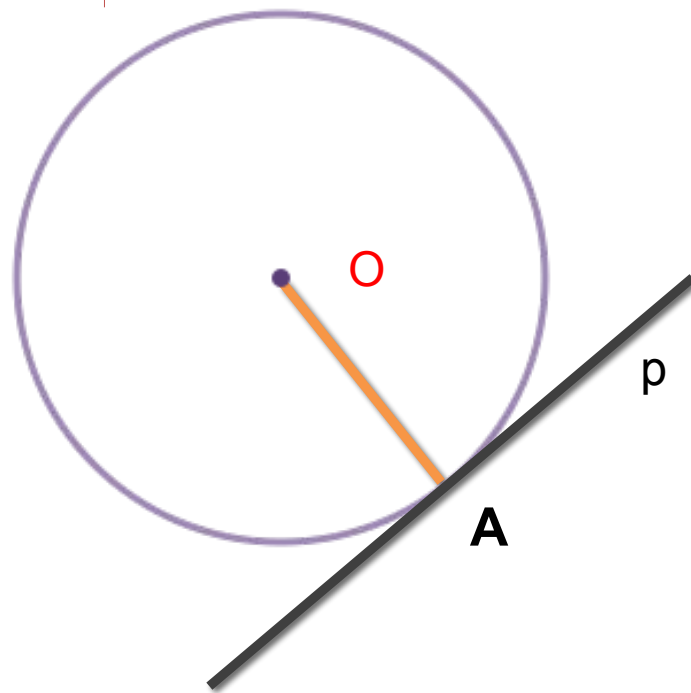
Итак, если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Прямая и окружность могут иметь одну или две общие точки и могут не иметь ни одной общей точки.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

На рисунке прямая p — касательная к окружности с центром O , A — точка касания.



КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Теорема о свойстве касательной к окружности

Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство

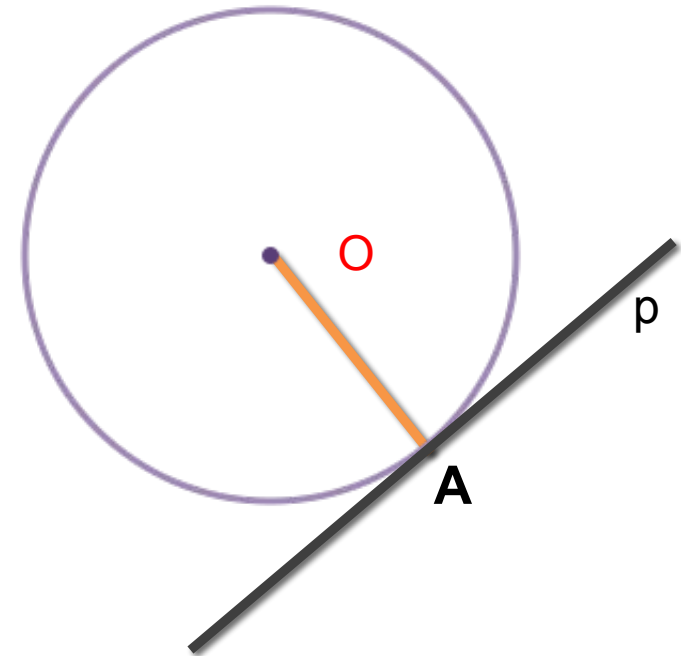
Пусть p — касательная к окружности с центром O , A — точка касания. Докажем, что касательная p перпендикулярна к радиусу OA .

Предположим, что это не так.

Тогда радиус OA является наклонной к прямой p . Так как перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой p , меньше наклонной OA , то расстояние от центра O окружности до прямой p меньше радиуса. Следовательно, прямая p и окружность имеют две общие точки.

Но это противоречит условию: прямая p — касательная.

Т.о., прямая p перпендикулярна к радиусу OA . **Теорема доказана.**



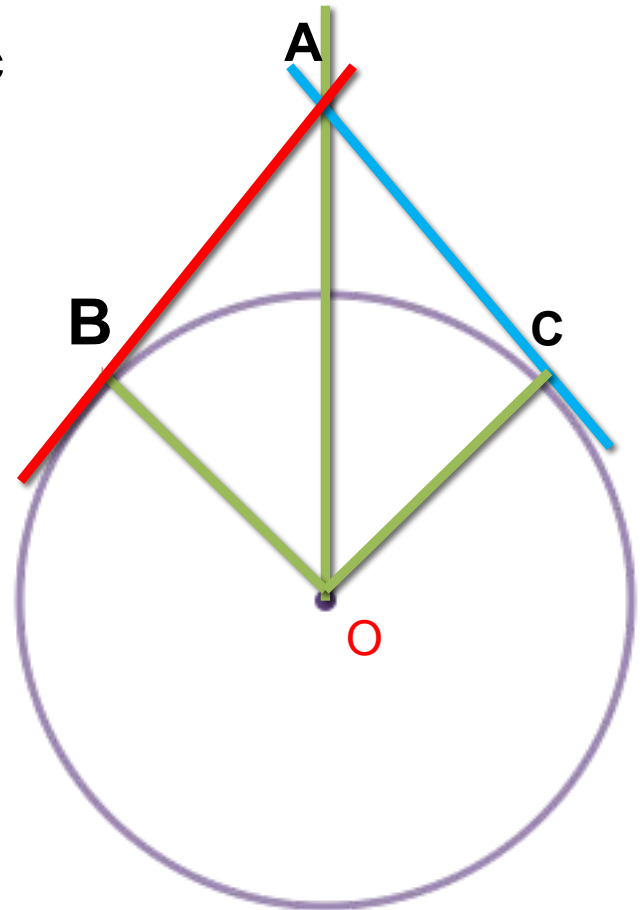
КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрим две касательные к окружности с центром O , проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C .

Отрезки AB и AC назовем отрезками касательных, проведенными из точки A .

Они обладают следующим свойством, вытекающим из доказанной теоремы:

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



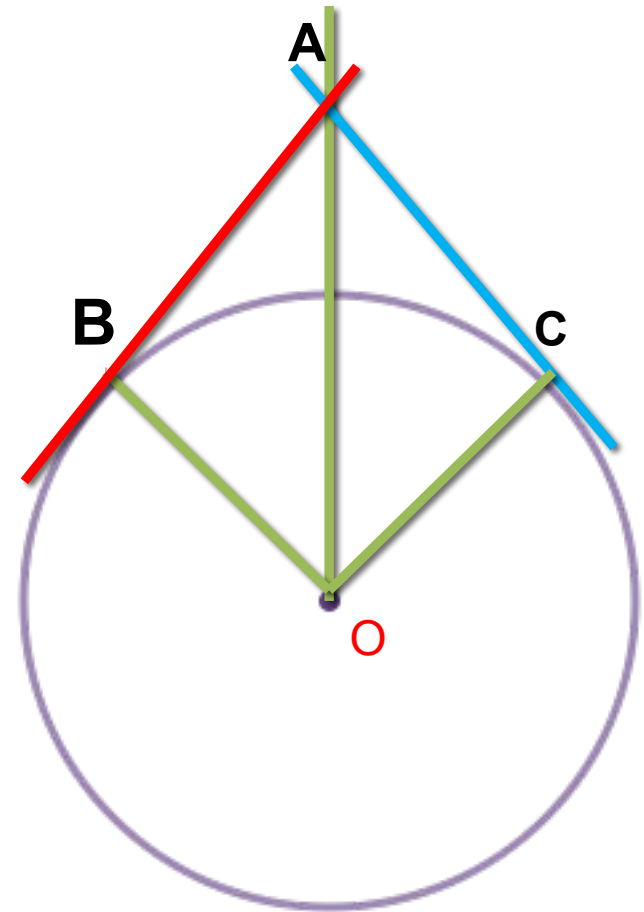
КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Доказательство:

По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники ABO и ACO прямоугольные.

Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC . Следовательно, $AB=AC$ и $\angle 3=\angle 4$, ч.т.д.



Теорема, обратная теореме о свойстве касательной (признак касательной)

Теорема

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра окружности к данной прямой. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Но это и означает, что данная прямая является касательной к окружности. Теорема доказана.

Теорема, обратная теореме о свойстве касательной (признак касательной)

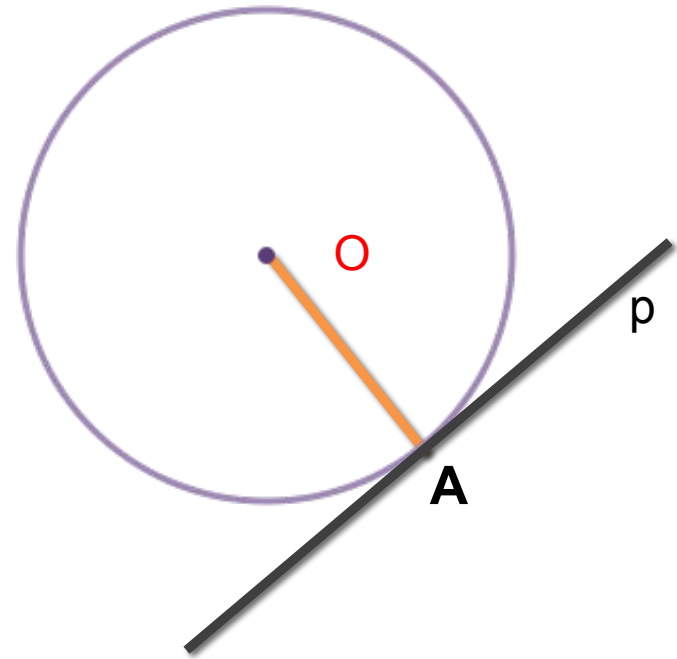
На этой теореме основано решение задач на построение касательной. Решим одну из таких задач.

Задача

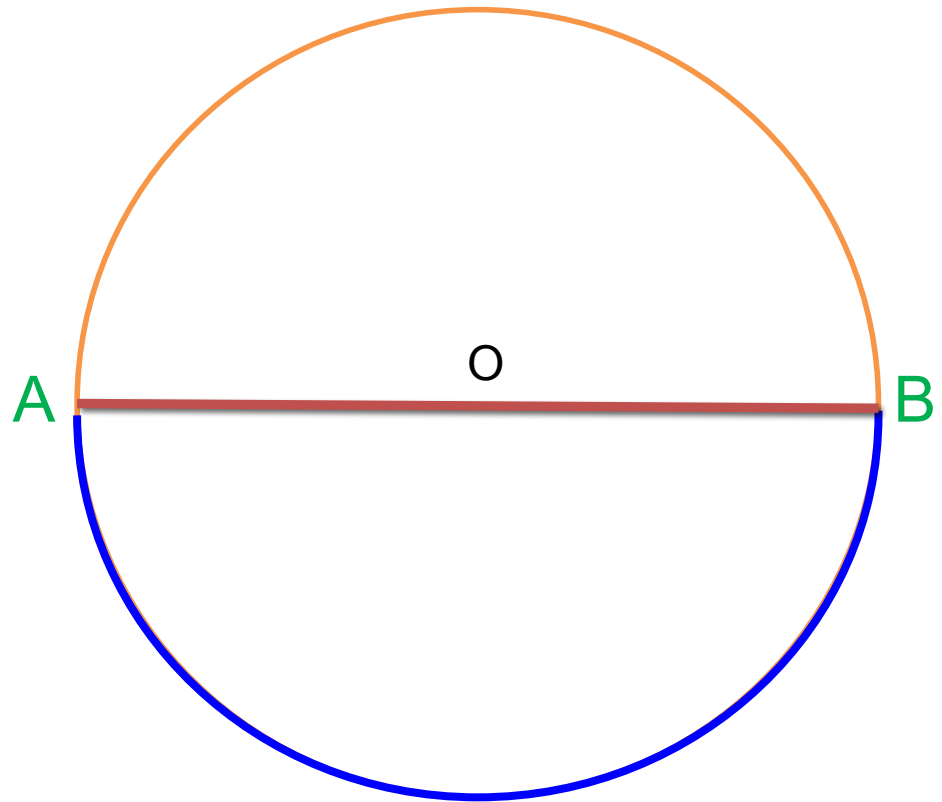
Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.

Решение

Проведем прямую OA , а затем построим прямую p , проходящую через точку A перпендикулярно к прямой OA . По признаку касательной прямая p является искомой касательной.



Дуга называется **полуокружностью**, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности



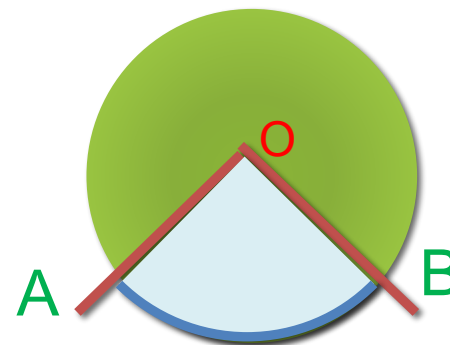
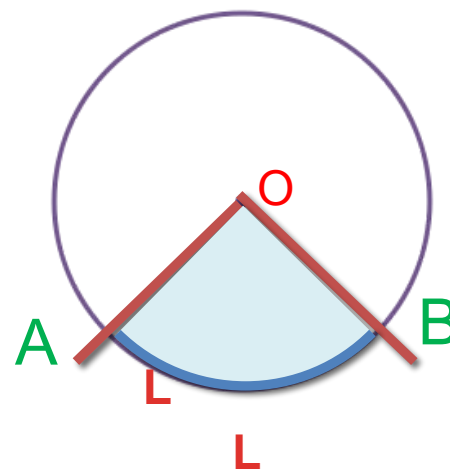
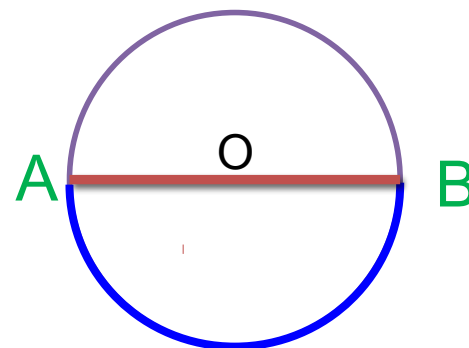
Угол с вершиной в центре окружности называется ее центральным углом. Пусть стороны центрального угла окружности с центром O пересекают ее в точках A и B .

Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B

Если $\angle AOB$ развернутый, то ему соответствуют две полуокружности

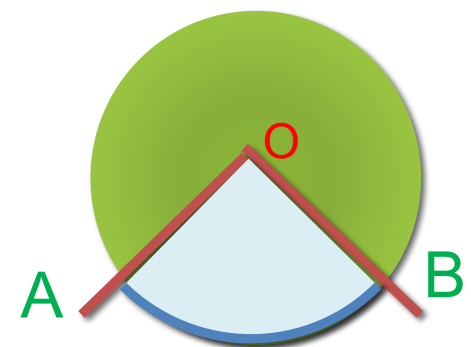
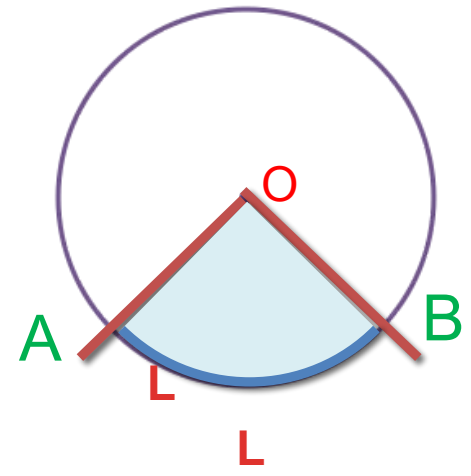
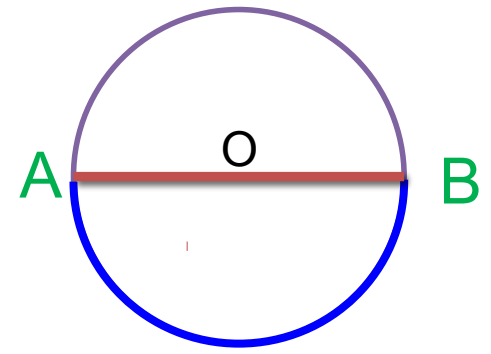
Если $\angle AOB$ неразвернутый, то говорят, что дуга AB , расположенная внутри этого угла, **меньше** полуокружности.

Про другую дугу с концами A и B говорят, что она **больше** полуокружности (дуга ALB)



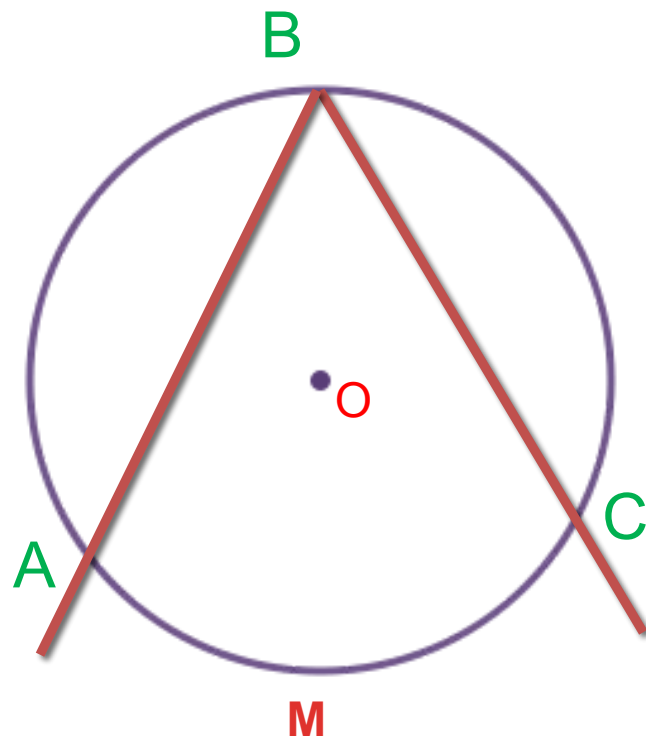
Дугу окружности можно измерять в градусах. Если дуга АВ окружности с центром в точке О меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее градусная мера считается равной градусной мере центрального угла

Если же дуга АВ больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной $360^\circ - \angle AOB$



ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

Вписанный угол
измеряется
половиной дуги,
на которую он
опирается

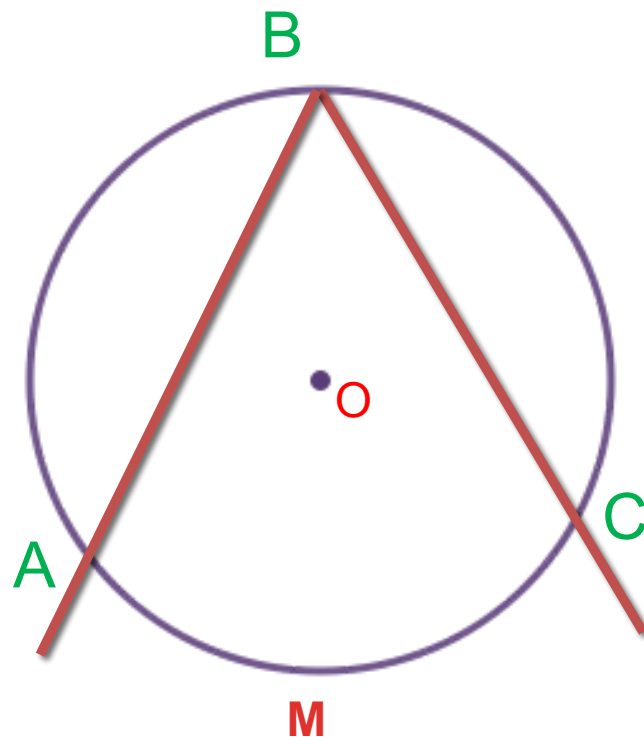


ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

Доказательство

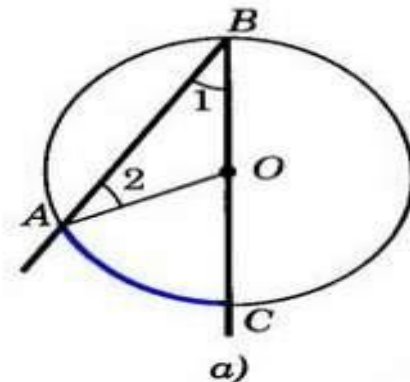
Пусть $\angle ABC$ — вписанный угол окружности с центром O , опирающийся на дугу AC .

Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC .

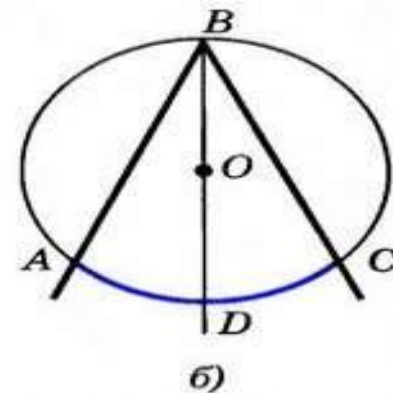


Три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC

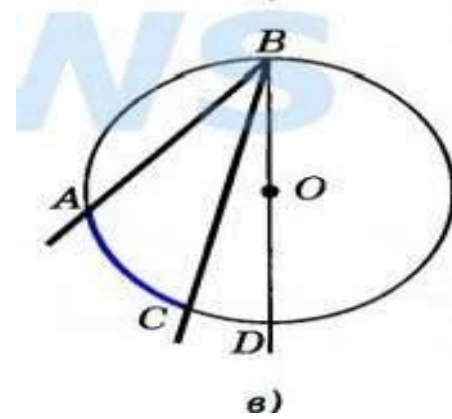
1) Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC (Рис.а)



2) Луч BO делит угол ABC на два угла (Рис. б)

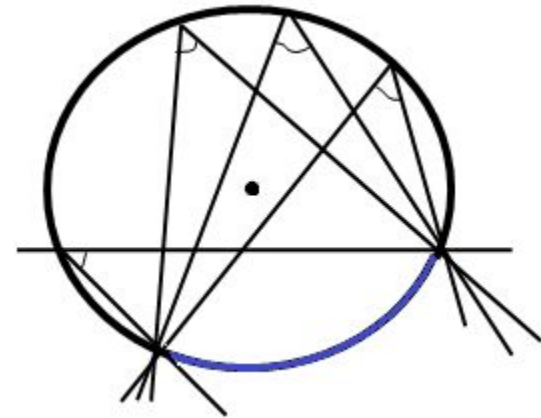


3) Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла (Рис. в)



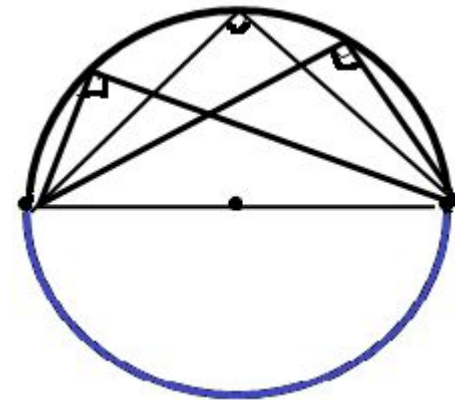
Следствие 1

Вписанные углы,
опирающиеся на одну
и ту же дугу, равны



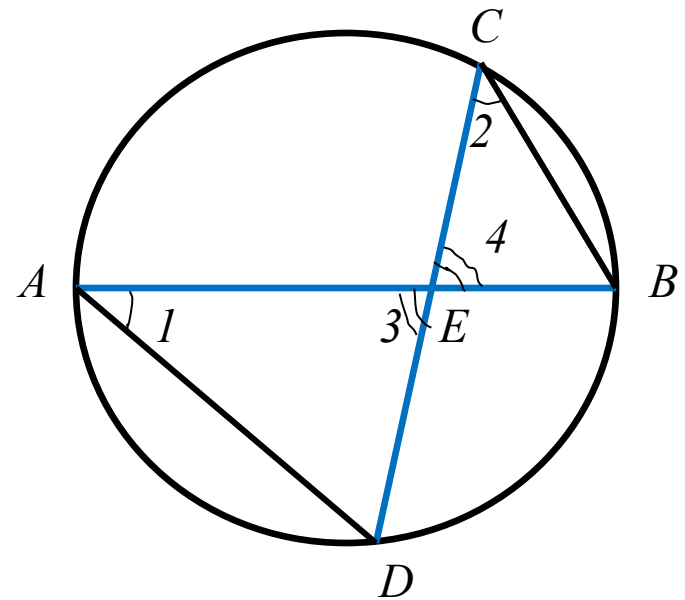
Следствие 2

Вписанный угол,
опирающийся на
полуокружность –
прямой



Теорема

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды



Доказательство

Пусть хорды АВ и CD
пересекаются в точке E

Докажем, что

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

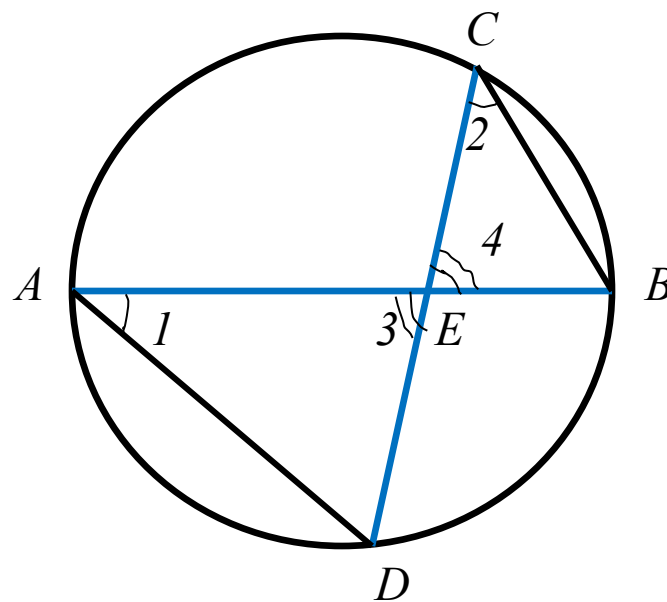
Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные.

По первому признаку подобия
треугольников $\triangle ADE \sim \triangle CBE$

Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, или

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

Теорема доказана.



ОРНАМЕНТЫ

