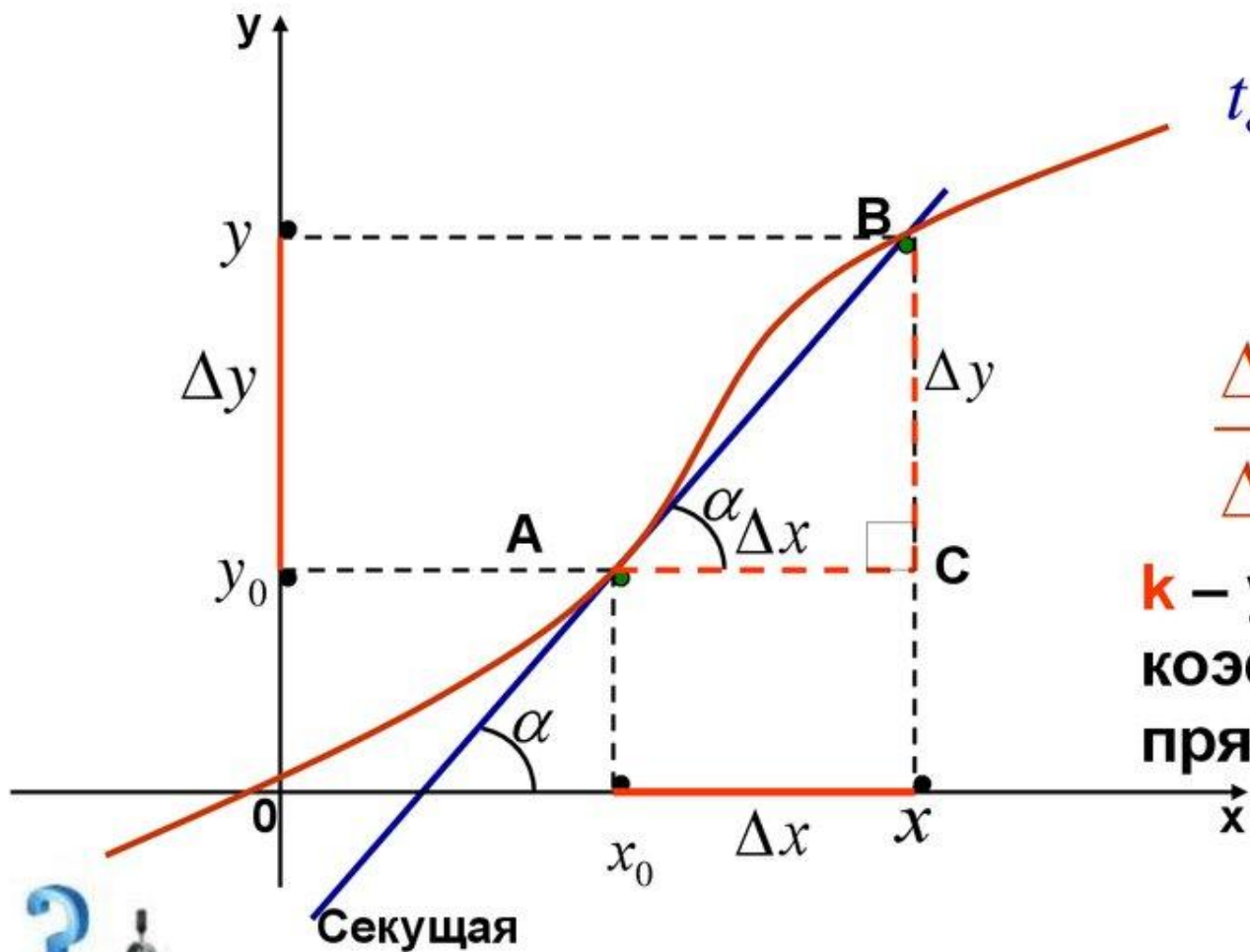


# Геометрический и физический смысл производной.





$$tg \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

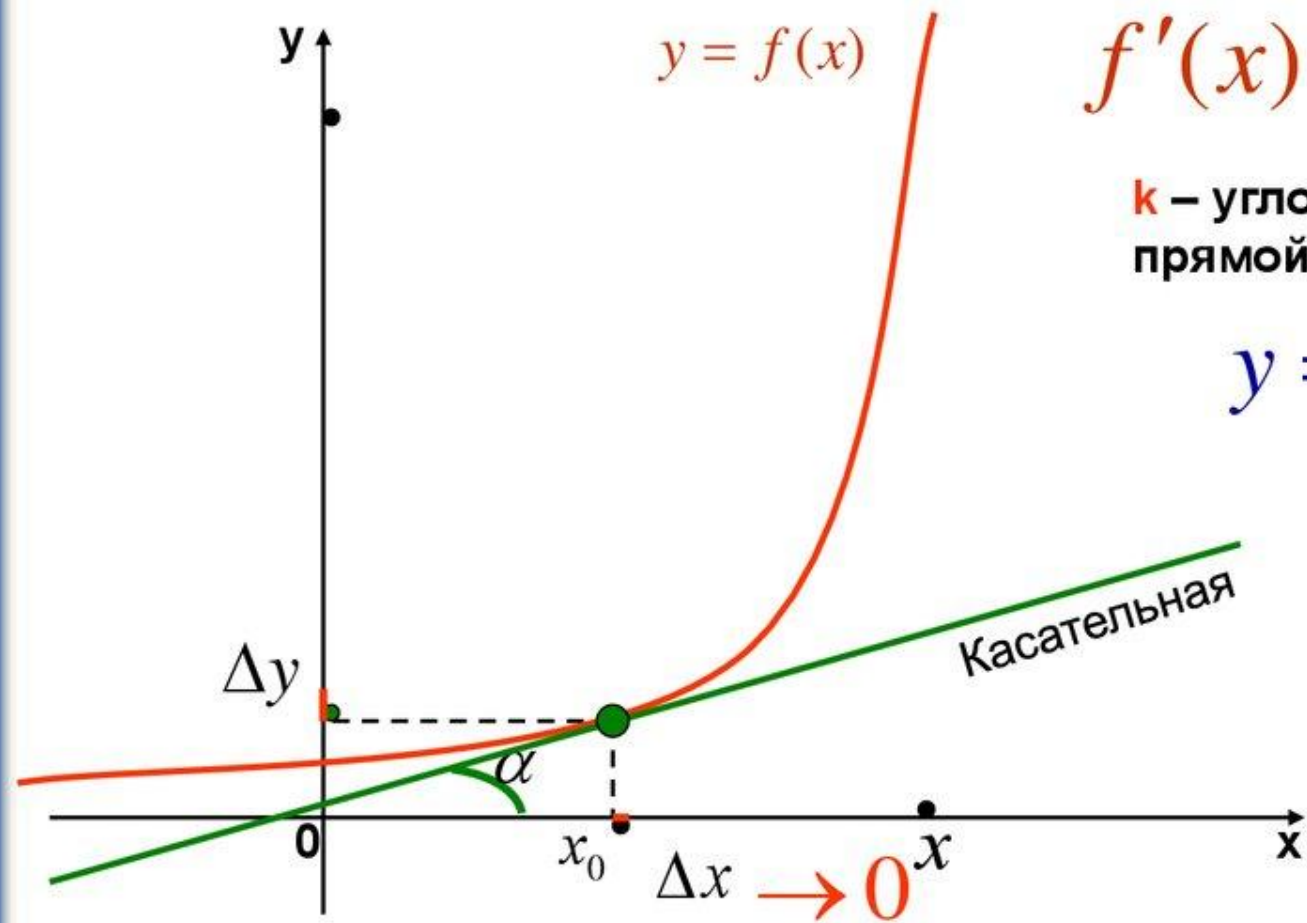
Итак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg \alpha = k$$

**k** – угловой коэффициент прямой (секущей)

$$y = kx + b$$





$$y = f(x)$$

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

$k$  – угловой коэффициент  
прямой (касательной)

$$y = kx + b$$

Касательная

## Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна **угловому коэффициенту касательной**, проведенной к графику функции в этой точке.

# Аналитический способ

## решения

### Задача 1.

Найдите значение производной функции  $f(x) = \frac{x^5}{3} + x^2 + \frac{x}{3} - 1,5$  в точке  $x_0 = 2$

**Решение**

а) Найдем значение производной функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x^5}{3} + x^2 + \frac{x}{3} - 1,5\right)' = \left(\frac{1}{3}x^5\right)' + (x^2)' + \left(\frac{x}{3}\right)' - (1,5)' = \frac{5x^4}{3} + 2x + \frac{1}{3}$$

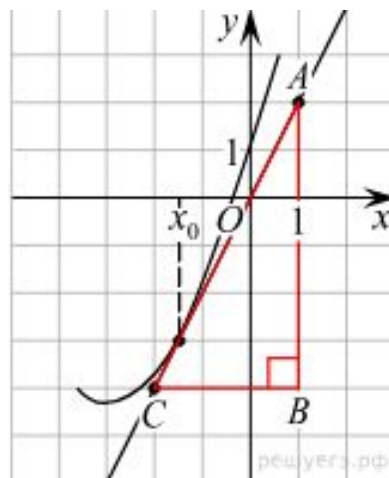
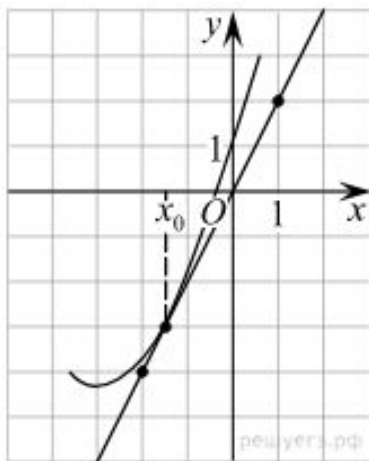
б) Найдем значение производной функции в точке  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \frac{5 \cdot 2^4}{3} + 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} = \frac{80}{3} + 4 + \frac{1}{3} = 27 + 4 = 31$$

**Ответ: 31**

### Задача:

На рисунке изображён график функции  $y=f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



### Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках  $A(1; 2)$ ,  $B(1; -4)$ ,  $C(-2; -4)$ . Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу  $ACB$ :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.

## 2. Физический и геометрический смысл производной

### 1) Физический смысл производной.

Если функция  $y = f(x)$  и ее аргумент  $x$  являются физическими величинами, то производная  $f'(x)$  – *скорость изменения величины  $y$  относительно величины  $x$ .*

### ПРИМЕРЫ.

- а) Пусть  $S = S(t)$  – расстояние, проходимое точкой за время  $t$ .  
Тогда производная  $S'(t_0)$  – *скорость в момент времени  $t_0$ .*
- б) Пусть  $q = q(t)$  – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени  $t$ .  
Тогда  $q'(t_0)$  – *скорость изменения количества электричества в момент времени  $t_0$ , т.е. сила тока в момент времени  $t_0$ .*
- в) Пусть  $m = m(x)$  – масса отрезка  $[a ; x]$ .  
Тогда  $m'(x)$  – *скорость изменения массы в точке  $x_0$ , т.е. линейная плотность в точке  $x_0$ .*

# Физический ( механический ) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь  $s$ , пройденный точкой, есть функция от времени  $t$ , т.е.  $s = s(t)$ , то **скорость** точки есть **производная** от пути по времени, т.е.  $v(t) = s'(t)$ .

**Производная** выражает **мгновенную скорость** в момент времени  $t$ .

# Физический смысл производной функции в данной точке

- Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то скорость ее движения  $v(t)$  в момент времени  $t$  равна производной  $x'(t)$ , т.е. **производная от координаты по времени есть скорость**  $(v(t) = x'(t))$ .

- **Производная от скорости по времени есть ускорение:**

$$a = v'(t).$$

Ускорение движения есть скорость изменения скорости, поэтому ускорение движения в момент времени  $t$  равно производной  $v'(t)$ .



$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$



# Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону

$$S(t) = 2t^3 - 3t.$$

Вычислите скорость движения точки:

- а) в момент времени  $t$ ;
- б) в момент времени  $t=2c$ .

Решение.

$$\text{а) } V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$$

$$\text{б) } V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(\text{м/с})$$



# Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону

$$S(t) = t^2 + 2t + 3:$$

а) в момент времени  $t$ ;

б) в момент времени  $t=3\text{с}$ .

Решение.

$$а) V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$б) V(3) = 2 * 3 + 2 = 8(\text{м/с})$$

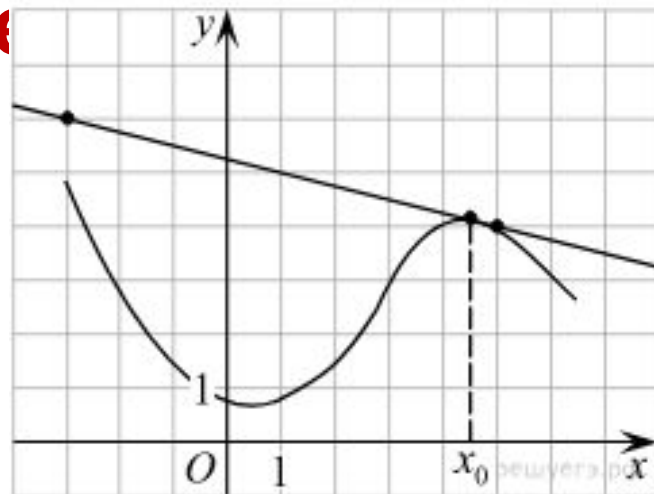
$$a(3) = 2(\text{м/с}^2)$$



# Домашнее задание

Задача 1:

На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Задача 2:

Вычислить производную функции  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$  в точке  $x = 5$

Задача 3:

Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения  $s(t)$  задан формулой:

1)  $s(t) = \frac{3}{2}t^2$ ;      2)  $s(t) = 5t^2$ .