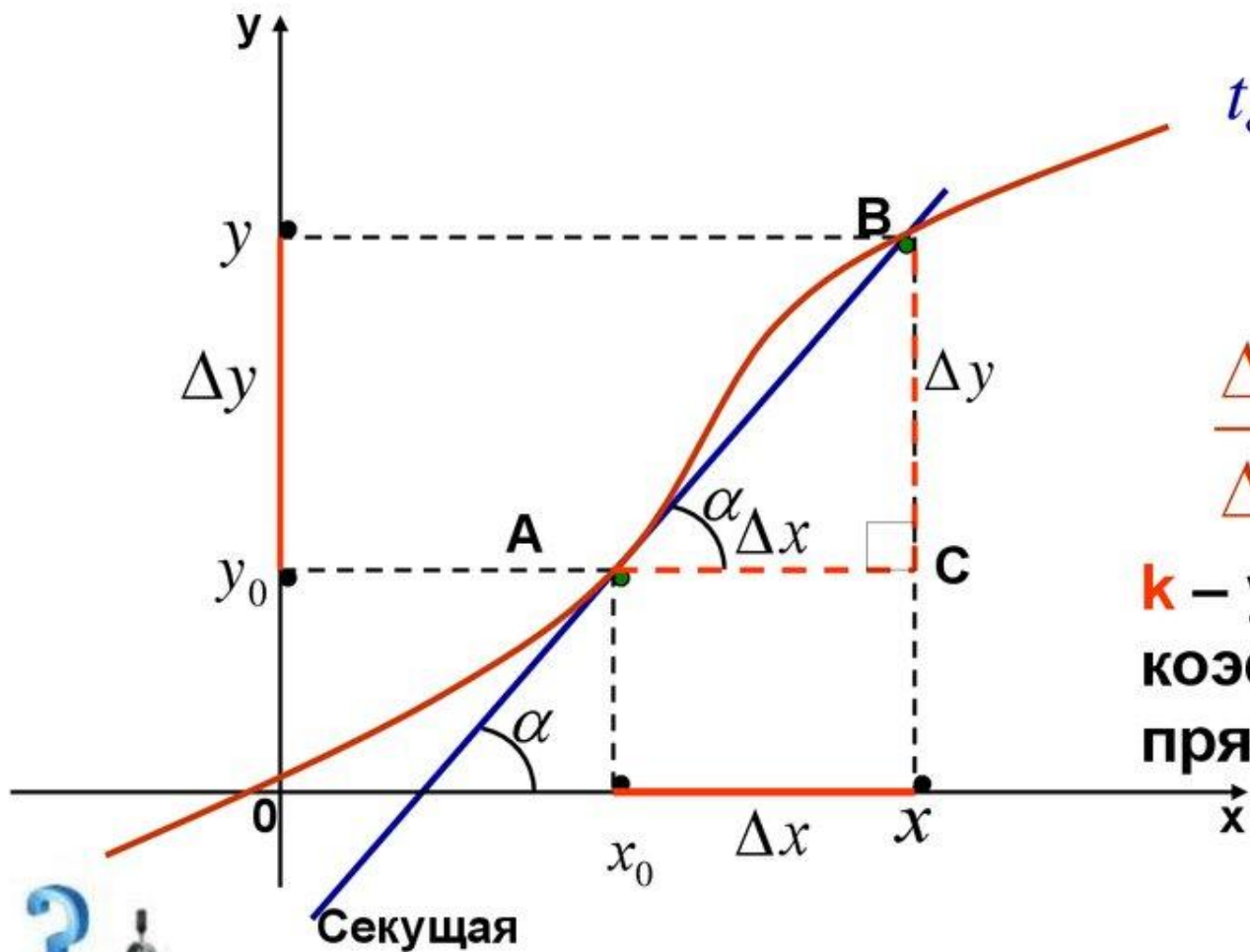


Геометрический и физический смысл производной.





$$tg \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

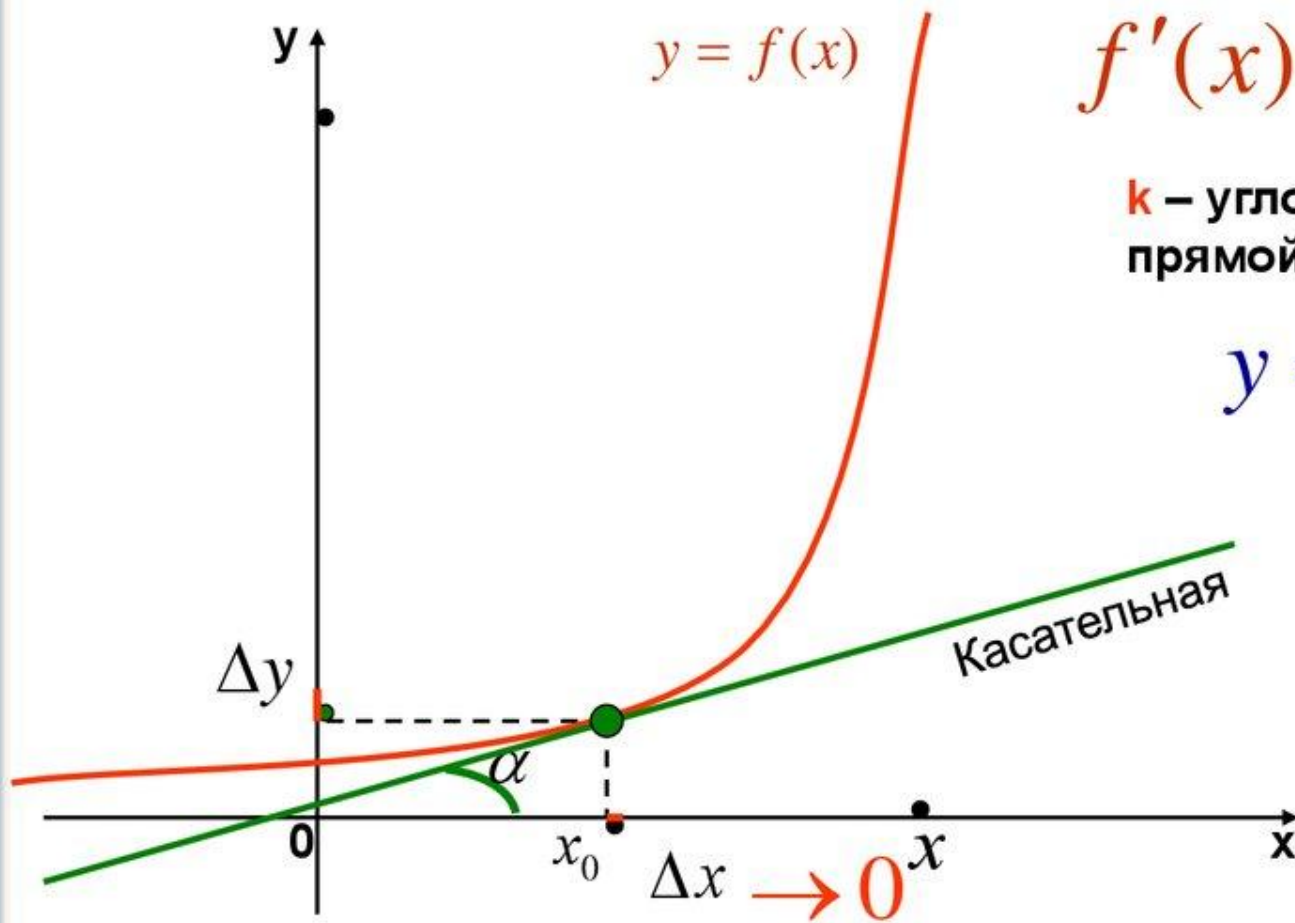
Итак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg \alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой (секущей)

$$y = kx + b$$





$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

k – угловой коэффициент
прямой (касательной)

$$y = kx + b$$

Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна **угловому коэффициенту касательной**, проведенной к графику функции в этой точке.

Аналитический способ

решения

Задача 1.

Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^5}{3} + x^2 + \frac{x}{3} - 1,5$ в точке $x_0 = 2$

Решение

а) Найдем значение производной функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x^5}{3} + x^2 + \frac{x}{3} - 1,5\right)' = \left(\frac{1}{3}x^5\right)' + (x^2)' + \left(\frac{x}{3}\right)' - (1,5)' = \frac{5x^4}{3} + 2x + \frac{1}{3}$$

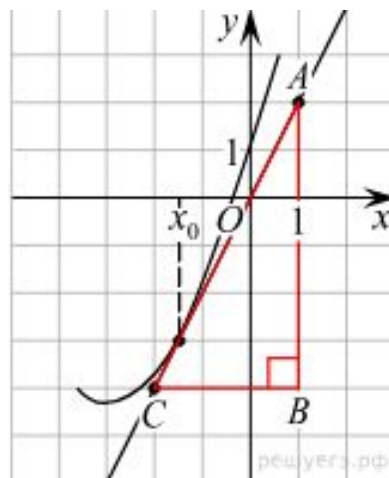
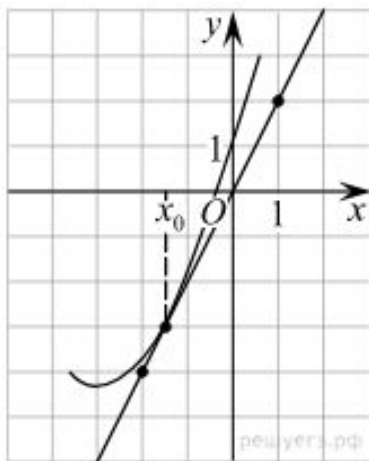
б) Найдем значение производной функции в точке x_0 :

$$f'(x_0) = \frac{5 \cdot 2^4}{3} + 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} = \frac{80}{3} + 4 + \frac{1}{3} = 27 + 4 = 31$$

Ответ: 31

Задача:

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(1; 2)$, $B(1; -4)$, $C(-2; -4)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.

2. Физический и геометрический смысл производной

1) Физический смысл производной.

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то производная $f'(x)$ – *скорость изменения величины y относительно величины x .*

ПРИМЕРЫ.

- а) Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t .
Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени t_0 .*
- б) Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t .
Тогда $q'(t_0)$ – *скорость изменения количества электричества в момент времени t_0 , т.е. сила тока в момент времени t_0 .*
- в) Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a ; x]$.
Тогда $m'(x)$ – *скорость изменения массы в точке x_0 , т.е. линейная плотность в точке x_0 .*

Физический (механический) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь s , пройденный точкой, есть функция от времени t , т.е. $s = s(t)$, то **скорость** точки есть **производная** от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.

Производная выражает **мгновенную скорость** в момент времени t .

Физический смысл производной функции в данной точке

- Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то скорость ее движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $x'(t)$, т.е. **производная от координаты по времени есть скорость** $(v(t) = x'(t))$.

- **Производная от скорости по времени есть ускорение:**

$$a = v'(t).$$

Ускорение движения есть скорость изменения скорости, поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной $v'(t)$.



$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону

$$S(t) = 2t^3 - 3t.$$

Вычислите скорость движения точки:

- а) в момент времени t ;
- б) в момент времени $t=2c$.

Решение.

а) $V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$

б) $V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(м/с)$



Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону

$$S(t) = t^2 + 2t + 3:$$

а) в момент времени t ;

б) в момент времени $t=3$ с.

Решение.

$$а) V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$б) V(3) = 2 * 3 + 2 = 8(м/с)$$

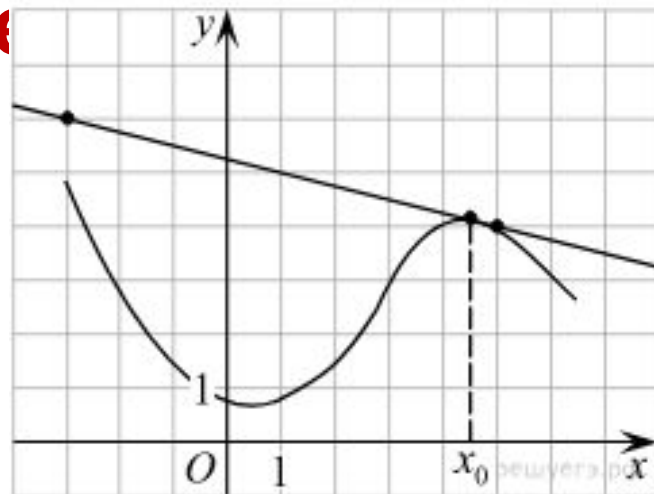
$$a(3) = 2(м/с^2)$$



Домашнее задание

Задача 1:

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Задача 2:

Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ в точке $x = 5$

Задача 3:

Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения $s(t)$ задан формулой:

1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.