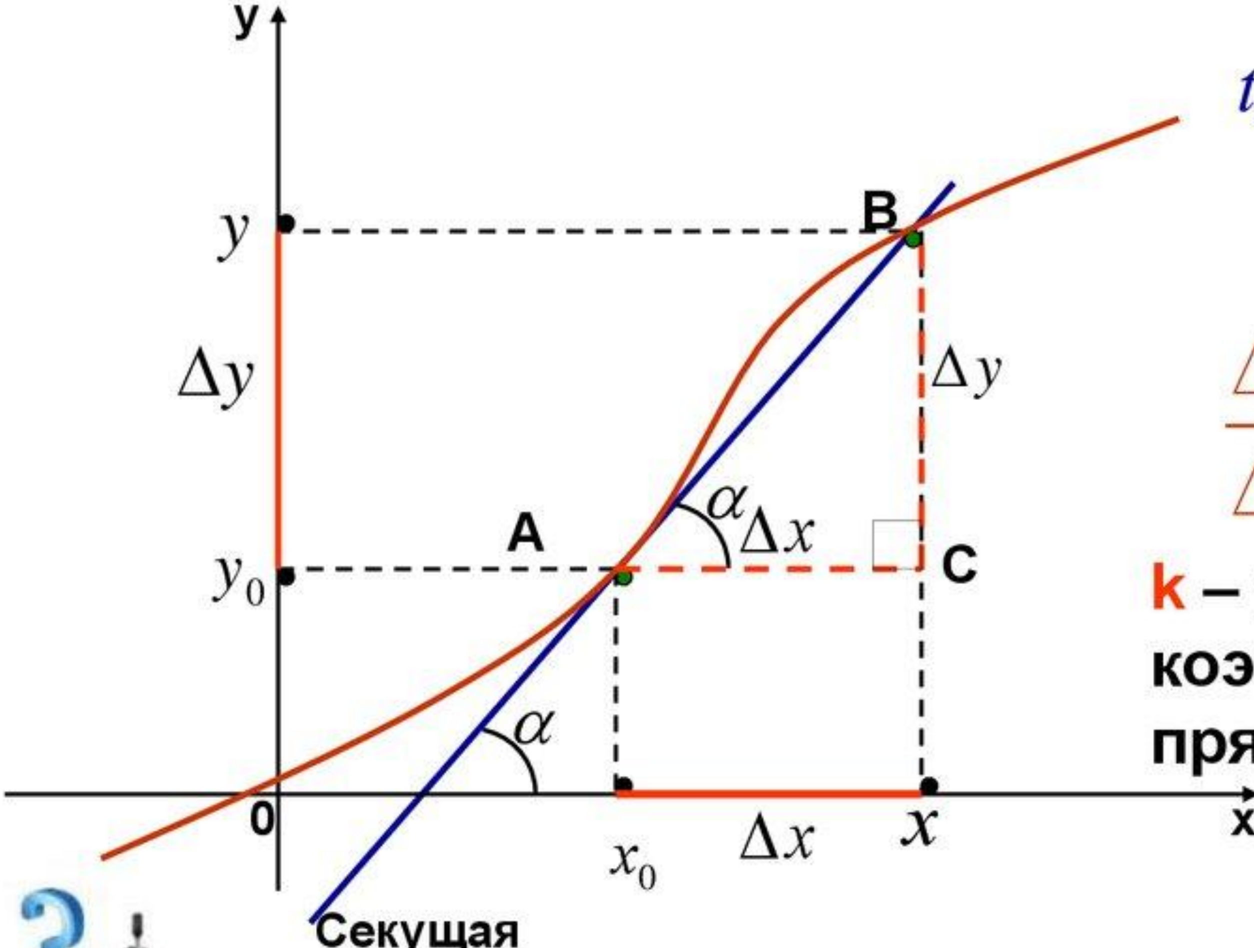
Геометрический и физический смысл производной.



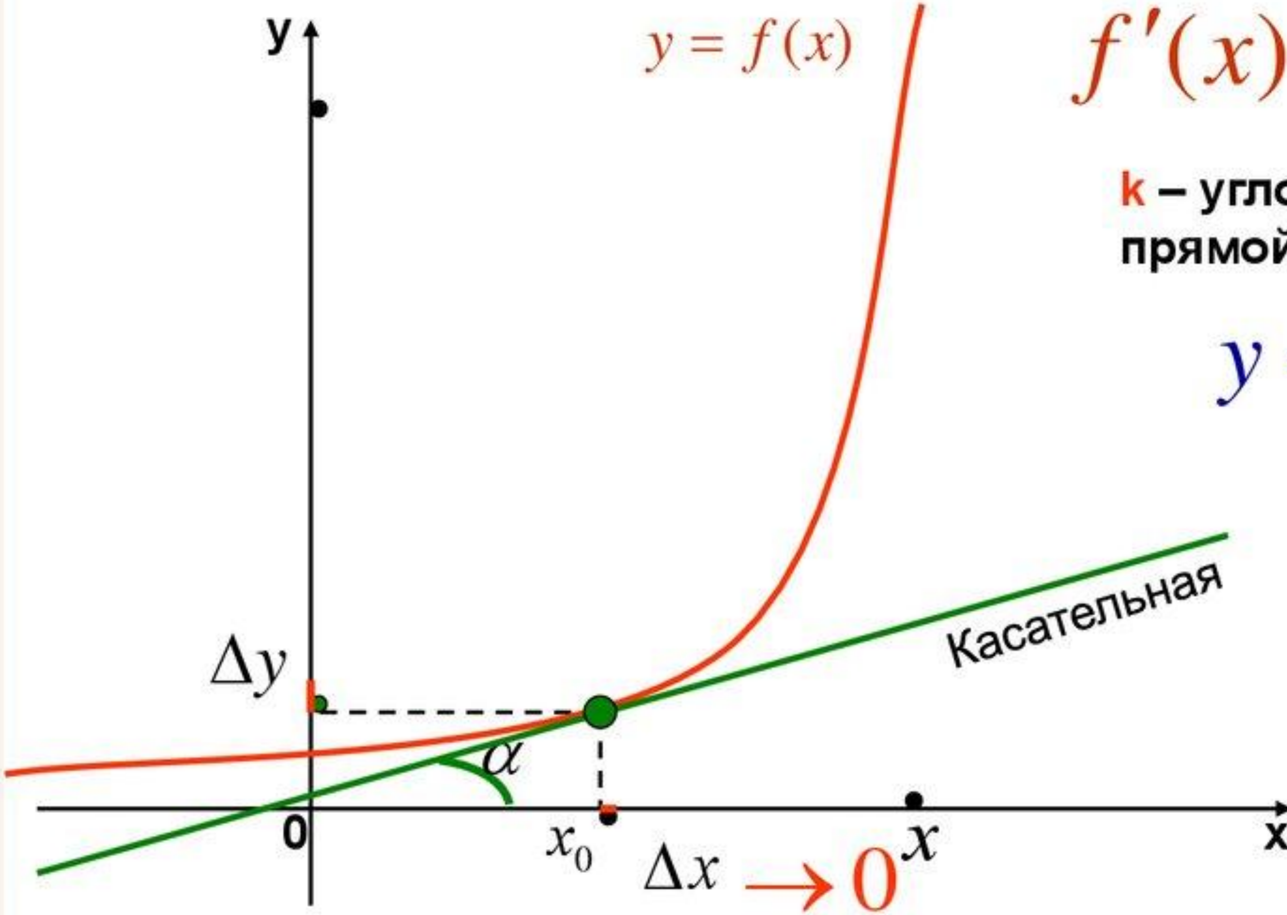
$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Итак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(секущей)

$$y = kx + b$$



$$f'(x) = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(касательной)

$$y = kx + b$$

Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной к графику функции в этой точке.

Аналитический способ решения

Задача 1.

Найдите значение производной функции $f(x)=\frac{x^5}{3}+x^2+\frac{x}{3}-1{,}5$ в точке $X_0=2$

Решение

а) Найдем значение производной функции:

$$f'(x)=(\frac{x^5}{3}+x^2+\frac{x}{3}-1{,}5)'=(\frac{1}{3}x^5)'+(x^2)'+(\frac{x}{3})'-(1{,}5)'=\frac{5x^4}{3}+2x+\frac{1}{3}$$

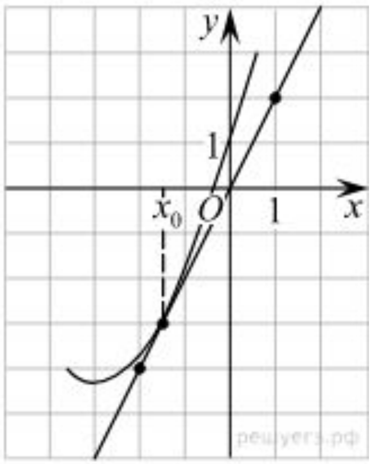
б) Найдем значение производной функции в точке x0:

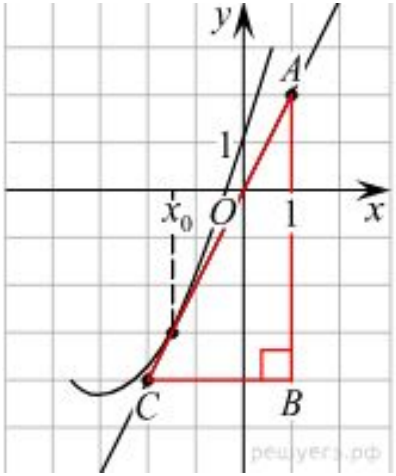
$$f'(x_0)=\frac{5\cdot 2^4}{3}+2\cdot 2+\frac{1}{3}=\frac{80}{3}+4+\frac{1}{3}=27+4=31$$

Ответ: 31

Задача:

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.





Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C(−2; −4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу *ACB*:

$$y'\ (x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.

2. Физический и геометрический смысл производной

1) **Физический смысл производной**.

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то *производная* $f'(x)$ – *скорость изменения величины* y *относительно величины* x.

ПРИМЕРЫ.

а) Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t. Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0.

б) Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t. Тогда $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, т.е. *сила тока в момент времени* t_0.

в) Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a\,;x]$. Тогда $m'(x)$ – скорость изменения массы в точке x_0, т.е. *линейная плотность в точке* x_0.

Физический (механический) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь s, пройденный точкой, есть функция от времени t, т.е. $s = s(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.

Производная выражает мгновенную скорость в момент времени t.

Физический смысл производной функции в данной точке

- Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону ***x(t)***, то скорость ее движения ***v(t)*** в момент времени ***t*** равна производной $x'(t)$, т.е. **производная от координаты по времени есть скорость** $(v(t) = x'(t))$.

- **Производная от скорости по времени есть ускорение:**

$$a = v'(t).$$

Ускорение движения есть скорость изменения скорости, поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной $v'(t)$.

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 3t.$

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени *t;*

б) в момент времени *t=2c.*

Решение.

а) $V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$

б) $V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(м/с)$

Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону $S(t)=t^2+2t+3$:

а) в момент времени *t;*

б) в момент времени *t=3с.*

Решение.

$$a)V(t)=S'(t)=(t^2+2t+3)'=2t+2$$

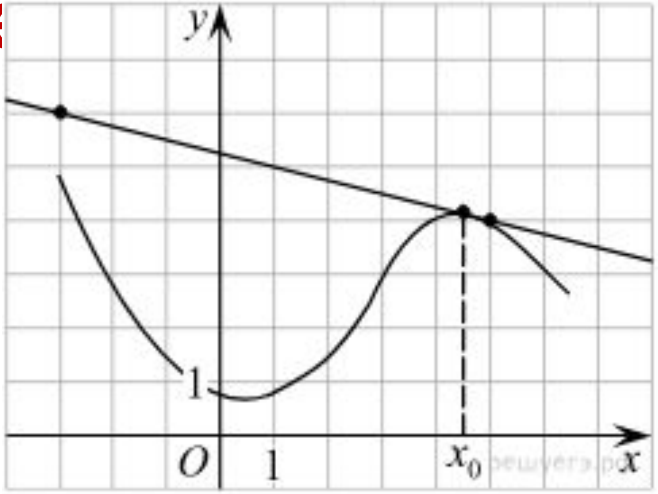
$$a(t)=V'(t)=S''(t)=2$$

$$б)V(3)=2*3+2=8(м/с)$$

$$a(3)=2(м/с^2)$$

Домашнее задание

Задача 1:
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Задача 2:

Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ в точке $x = 5$

Задача 3:

Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения $s(t)$ задан формулой:

1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.