Διδακτική Ενότητα Δ: Δεσμευμένη Πιθανότητα & Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Οικονομία και Διοίκηση Ι

Εμμανουήλ Ζαχαριάδης
Επίκουρος Καθηγητής ΟΠΑ
email: ezach@aueb.gr

Ακαδημαϊκό Έτος 2017-2018

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Πολλές φορές η πληροφόρηση για την έκβαση ενός πειράματος δεν είναι μηδενική
- Μερική πληροφόρηση για το αποτέλεσμα ενός πειράματος
- Υπολογισμός πιθανότητας αποτελέσματος λαμβάνοντας υπόψιν τη μερική πληροφόρηση: *Δεσμευμένη Πιθανότητα*

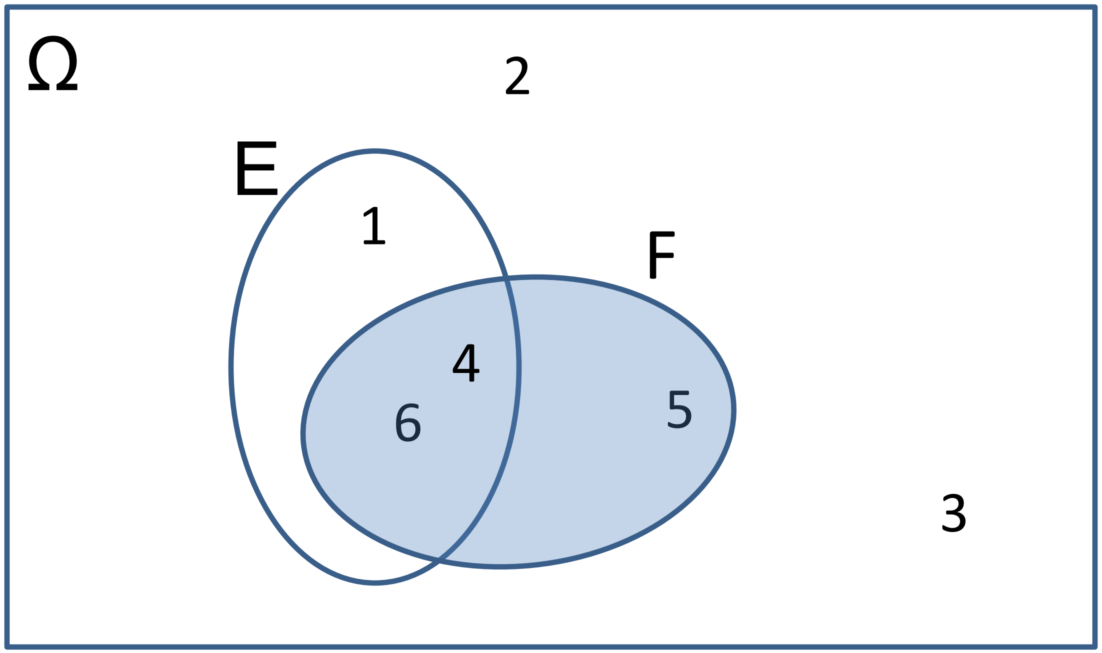
Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Ρίψη Ενός Ζαριού
- Ποια η Πιθανότητα το ζάρι να έφερε 1, 4 ή 6?
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E = \{1, 4, 6\}$
- $P(E) = 3/6$
- Ένας φίλος που έχει δει το αποτέλεσμα της ρίψης μας ενημερώνει πως το αποτέλεσμα ήταν μεγαλύτερο του 3:

  Ενδεχόμενο $F = \{4, 5, 6\}$
- Πλέον μπορούμε να επιλέξουμε με βάση τη νέα πληροφορία μεταξύ των $\{4, 5, 6\}$, άρα η πιθανότητα του E με δεδομένο το F είναι $|E \cap F|/|F|$, αφού ο νέος δειγματικός μας χώρος είναι το F
- Η νέα πιθανότητα συμβολίζεται ως

$$P(E|F) = |E \cap F|/|F| = 2/3$$

Σχηματική Απεικόνιση Δεσμευμένης Πιθανότητας



$$P(E) = |E|/|\Omega| = 3/6$$
$$P(E|F) = |E \cap F|/|F| = 2/3$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου E με δεδομένο ένα ενδεχόμενο F
$$P(F \mid E)$$
- Σύνολο αποτελεσμάτων του πειράματος που ικανοποιούν τα ενδεχόμενα E και F ταυτόχρονα: $E \cap F$
- Υπολογίζουμε την Πιθανότητα να έχει συμβεί το $E \cap F$ με νέο δειγματικό χώρο το F
- Ορισμός:

Αν $P(F) > 0,$
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Παράδειγμα 1

<u>Πρόβλημα</u>

- Ρίψη δύο ζαριών
- Ποιά η πιθανότητα το άθροισμά τους να είναι μεγαλύτερο από 7 με δεδομένο ότι το πρώτο ζάρι έφερε 5?

Παράδειγμα 1

Λύση

- Ορισμός ενδεχομένων:
- E: Άθροισμα των δύο ζαριών μεγαλύτερο από 7
- A: Πρώτο ζάρι έφερε 5 $\Longrightarrow\ P(A) = 1/6$
- $\mathrm{P(E|A) = P(E \cap A) / P(A) = (4 / 36)/ (1 / 6) = 4 / 6}$

Εναλλακτική Λύση

- Δέσμευση του δειγματικού χώρου
- Με δεδομένο ότι το πρώτο ζάρι έφερε 5, ο δειγματικός μας χώρος γίνεται πλεόν $\Omega = \{(5,1),(5,2),(\mathbf{5},\mathbf{3}),(\mathbf{5},\mathbf{4}),(\mathbf{5},\mathbf{5}),(\mathbf{5},\mathbf{6})\}$
- Πόσα από τα ισοπίθανα αποτελέσματα ικανοποιούν το Ε?
- $\mathrm{P(E \mid A) = 4 / 6}$

Παράδειγμα 2

Πρόβλημα

- Τραβάμε διαδοχικά φύλλα από μία τράπουλα

  α) Ποια η πιθανότητα να τραβήξουμε έναν άσσο

  β) Ποια η πιθανότητα να τραβήξουμε έναν άσσο με δεδομένο πως το πρώτο φύλλο ήταν άσσος

  γ) Ποια η πιθανότητα να τραβήξουμε έναν άσσο με δεδομένο πως το πρώτο φύλλο δεν ήταν άσσος

Παράδειγμα 2

<u>Λύση α)</u>

- Ενδεχόμενο Ε1: Ασσός στην πρώτη επιλογή, $\mathrm{P(E1)} = 4/52$

<u>Λύση β)</u>

- Ενδεχόμενο Ε2: Άσσος στη 2η επιλογή
- $\mathrm{P(E2|E1)} = \mathrm{P(E2} \cap \mathrm{E1)/P(E1)}$
- $\mathrm{P(E2} \cap \mathrm{E1)} = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = 6/1362$ και $P(E1) = 4/52$
- $\Rightarrow \mathrm{P(E2|E1)} = \dfrac{\mathrm{P(E2} \cap \mathrm{E1)}}{P(E1)} = \dfrac{52 \cdot 6}{1326 \cdot 4} = \dfrac{312}{5304} = 3 / 51$
- Στο συγκεκριμένο παράδειγμα (και σε πολλά άλλα) θα ήταν πολύ πιο εύκολο να **δεσμεύσουμε το δειγματικό χώρο**:

  Με δεδομένο πως η πρώτη επιλογή ήταν άσσος, έχουν απομείνει 51 φύλλα και 3 άσσοι

  $\Rightarrow \mathrm{P(E2|E1)} = 3 / 51$

Παράδειγμα 2

<u>Λύση γ)</u>

- Ενδεχόμενο Ε3: Όχι άσσος στην πρώτη επιλογή
- $\mathrm{P(E2|E3)} = \mathrm{P(E2} \cap \mathrm{E3)/P(E3)}$
- $\mathrm{P(E2} \cap \mathrm{E3)} = \dfrac{48 \times 4}{52 \times 51} = 192/2652$ και $P(E1) = 48/52$

  (48 επιλογές για το 1^{o} φύλλο κ 4 επιλογές για το 2^{o})
- $\Longrightarrow \mathrm{P(E2|E3)} = \dfrac{\mathrm{P(E2} \cap \mathrm{E3)}}{P(E3)} = \dfrac{52 \cdot 192}{2652 \cdot 48} = \dfrac{9984}{127296} = 4\,/\,51$

Εναλλακτικά, με δέσμευση του δειγματικού χώρου

- Με δεδομένο πως η πρώτη επιλογή δεν ήταν άσσος, έχουν απομείνει 51 φύλλα και 4 άσσοι στη δεύτερη επιλογή
  $\Longrightarrow \mathrm{P(E2|E1)} = 4\,/\,51$

Παράδειγμα 3

<u>Πρόβλημα</u>

- Στρίψιμο δίκαιου νομίσματος (Κ/Γ) 2 φορές

  α) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε Κ και στις 2 ρίψεις (ΚΚ)?

  β) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να φέρουμε ΚΚ με δεδομένο πως στο 1ο στρίψιμο φέραμε Κ?

  γ) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να φέρουμε ΚΚ με δεδομένο πως σε ένα στρίψιμο φέραμε Κ?

Παράδειγμα 3

Λύση α)

$$P((\mathrm{K},\mathrm{K})) = |\{(\mathrm{K},\mathrm{K})\}| \,/\, |\{(\mathrm{K},\mathrm{K})\ (\mathrm{K},\Gamma)\ (\Gamma,\mathrm{K})\ (\Gamma,\Gamma)\}| = 1\,/\,4$$

Λύση β)

Ενδεχόμενο $\mathrm{B} = \{(\mathrm{K},\mathrm{K})\}$

Ενδεχόμενο $F = \{\{\mathrm{K},\mathrm{K}\},(\mathrm{K},\Gamma)\}$

$$P(B|F) = P(B\cap F)/P(F) = (1/4)\,/\,(2/4) = 1\,/\,2$$

Λύση γ)

Ενδεχόμενο $\mathrm{B} = \{(\mathrm{K},\mathrm{K})\}$

Ενδεχόμενο $G = \{\{\mathrm{K},\mathrm{K}\},(\mathrm{K},\Gamma),(\Gamma,\mathrm{K})\}$

$$P(B|G) = P(B\cap G)/P(G) = (1/4)\,/\,(3/4) = 1\,/\,3$$

Το πληροφοριακό περιεχόμενο του F (Κορώνα στην πρώτη ρίψη) και του G (Κορώνα σε μία τουλάχιστον ρίψη) είναι διαφορετικό! (Το F είναι πιο πλούσιο σε πληροφορία!)

Το G επιτρέπει ένα περισσότερο αποτέλεσμα (Γ, Κ) το οποίο δεν περιέχεται στο B

Επομένως, με δεδομένο G έχουμε μικρότερη πιθανότητα για το B σε σχέση με την περίπτωση του δεδομένου F

Παράδειγμα 4

Παράδειγμα

- Εξέταση με όριο μίας ώρας
- Η πιθανότητα ένας φοιτητής να παραδώσει σε λιγότερο από x ώρες είναι $x/2$.
- Με δεδομένο ότι ο φοιτητής γράφει μετά από 45 λεπτά, ποια η πιθανότητα να εξαντήσει ολόκληρη την ώρα

Παράδειγμα 4

Λύση

- Συμβολίζουμε ως E_x το ενδεχόμενο ο φοιτητής να παραδώσει σε χρόνο μικρότερο του x
- A: Ενδεχόμενο πως ο φοιτητής θα χρησιμοποιήσει ολόκληρη την ώρα

$$\mathrm{P(A)} = (E_1)^C = 1 - \mathrm{E}_1 = 0.5$$

- B: Ενδεχόμενο πως ο φοιτητής γράφει (δεν έχει παραδώσει) μετά από 45 min

$$P(B) = (E_{0.75})^C = 1 - E_{0.75} = 1 - 0.375 = 0.625$$

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)/P(B) = 0.5 / 0.625 = 0.8$$

Ανάγνωση Πινάκων

- Πολλές φορές οι πίνακες παρουσιάζουν κάποιες πληροφορίες αθροιστικά αλλά και σε επιμέρους κατηγορίες
- Π.χ. Αγαπημένο μάθημα φοιτητών ενός πανεπιστημίου

Μάθημα	1ο ετος	2ο έτος	3ο έτος	4ο έτος	Σύνολο
Πιθανότητες (Π)	67	72	50	84	273
Επ. Έρυνα (Ε)	34	54	40	45	173
Βάσεις Δεδομένων (Β)	24	30	46	21	121
Άλλο (Α)	33	15	30	25	103
Σύνολα	158	171	166	175	670

Ανάγνωση Πινάκων

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι στο 3^o ετος?
- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να του αρέσουν οι Π?
- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να έιναι στο 4^o έτος και να του αρέσουν οι Βάσεις Δεδομένων?

Μ	1^o	2^o	3^o	4^o	Σύν
(Π)	67	72	50	84	273
(Ε)	34	54	40	45	173
(Β)	24	30	46	21	121
(Α)	33	15	30	25	103
Σύνολα	158	171	166	175	670

Ανάγνωση Πινάκων

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι στο 3° ετος?

  $P(E3) = 166/670$

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να του αρέσουν οι Π?

  $P(\Pi) = 273/670$

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι στο 4° έτος και να του αρέσουν οι Βάσεις Δεδομένων?

  $P(B \cap E4) = 21/670$

M	1°	2°	3°	4°	Σύν
(Π)	67	72	50	84	273
(Ε)	34	54	40	45	173
(Β)	24	30	46	21	121
(Α)	33	15	30	25	103
Σύνολα	158	171	166	175	670

Ανάγνωση Πινάκων

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να του αρέσουν οι Π με δεδομένο ότι είναι στο 1^{ο} έτος?

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι στο 2^{ο} έτος με δεδομένο ότι το αγαπημένο του μάθημα είναι η Επιχ. Έρευνα?

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι στο 1^{ο} ή στο 3^{ο} έτος με δεδομένο ότι το αγαπημένο του μάθημα δεν είναι οι Π, οι ΒΔ κ η Ε?

Μ	**1^{ο}**	**2^{ο}**	**3^{ο}**	**4^{ο}**	**Σύν**
(Π)	67	72	50	84	273
(Ε)	34	54	40	45	173
(Β)	24	30	46	21	121
(Α)	33	15	30	25	103
Σύνολα	158	171	166	175	670

Ανάγνωση Πινάκων

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να του αρέσουν οι Π με δεδομένο ότι είναι στο 1ο έτος?

  $$P(\Pi|E1) = 67/158$$

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι στο 2ο έτος με δεδομένο ότι το αγαπημένο του μάθημα είναι η Επιχ. Έρευνα?

  $$P(E2|E) = 54/173$$

- Πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι στο 1ο ή στο 3ο έτος με δεδομένο ότι το αγαπημένο του μάθημα δεν είναι οι Π, οι ΒΔ κ η Ε?

  $$P(E1 \cup E3|A) = (33 + 30)/103$$

Μ	1ο	2ο	3ο	4ο	Σύν
(Π)	67	72	50	84	273
(Ε)	34	54	40	45	173
(Β)	24	30	46	21	121
(Α)	33	15	30	25	103
Σύνολα	158	171	166	175	670

Παράδειγμα 5

Παράδειγμα

- Δοχείο με b μπλέ & r κόκκινες μπάλες
- Εξάγουμε διαδοχικά n από αυτές ($n \leq b + r$)
- Ποια η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι μπλε αν το σύνολο των μπλε μπαλών που εξήχθησαν είναι k?

Παράδειγμα 5

<u>Παράδειγμα</u>

- Δοχείο με b μπλέ & r κόκκινες μπάλες
- Εξάγουμε διαδοχικά n από αυτές ($n \leq b + r$)
- Ποια η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι μπλε αν το σύνολο των μπλε μπαλών που εξήχθησαν είναι k?

<u>Λύση (Περιορισμός του δειγματικού χώρου)</u>

- Έστω ότι οι μπάλες ειναι αριθμημένες με $1, \dots, \ b, b + 1, \dots, b + r$
- Οι μπλε μπαλες από 1 έως b και οι κόκκινες μπάλες από $b + 1$ έως r
- Το απότέλεσμα της επιλογής είναι ένα διάνυσμα ακεραίων με $(x_1, \dots, x_n)$
- Κάθε τιμή x_i είναι η μπάλα που βγήκε στην i-στη επιλογή ($1 \leq x_i \leq b + r$)
- Το διανυσμα θα περιέχει k τιμές που ανταποκρίνονται σε μπλε μπάλες και $n - k$ τιμές που αναποκρίνονται σε κόκκινες μπάλες
- Κάθε διάνυσμα έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης
- Άρα το x_1 θα μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις k και $n - k$ τιμές ισοπίθανα
- Πιθανότητα η πρώτη μπλε $k \,/\, n$.

Παράδειγμα 5

Εναλλακτική Λύση

- Ορισμός ενδεχομένων:
  - Β η πρώτη μπάλα ειναι μπλε
  - B_k επιλέγονται συνολικά k μλπε μπάλες

$$P(B|B_k) = \frac{P(B \cap B_k)}{P(B_k)} = \frac{P(B_k|B)P(B)}{P(B_k)}$$

- Υπολογισμός $P(B_k|B)$
  - Είναι η πιθανότητα να επιλεγούν συνολικά k μπλε μπάλες με δεδομένο πως η πρώτη μπάλα είναι μπλε
  - Επιλογή $k - 1$ μπλε & $n - \kappa$ κόκκινων μπαλών από ένα δοχείο που περιέχει $b - 1$ μπλε και r κόκκινες μπάλες
  - $P(B_k|B) = \frac{\binom{b-1}{k-1}\binom{r}{n-k}}{\binom{r+b+1}{n-1}}$

Παράδειγμα 5

-
- Υπολογισμός $P(B)$
  – Η πιθανότητα η πρώτη επιλογή να οδηγήσει σε μπλε μπάλα
  – $\mathrm{P(B)} = \frac{b}{r+b}$
- Υπολογισμός $P(B_k)$
  – $P(B_k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$
- Υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας
  – $P(B|B_k) = \frac{P(B \cap B_k)}{P(B_k)} = \frac{P(B_k|B)P(B)}{P(B_k)} = \frac{k}{n}$

Πολλαπλασιαστικός Κανόνας

- Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)},$$

για την τομή δύο ενδεχομένων ισχύει

$$P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$$

- Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί και σε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = P(E_1) \cdot P(E_2|E1) \cdot P(E3|E1 \cap E2) \cdot \cdots \cdot P(E_\mathrm{n}|\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i)$$

Παράδειγμα 6

<u>Πρόβλημα</u>

- Θέλουμε να αγοράσουμε ένα βιβλίο εκ των Α και Β
- Θεωρούμε πως το Α θα μας αρέσει κατά 70%
- Θεωρουμε πως το Β θα μας αρέσει κατά 50%
- Το Α είναι ακριβότερο, έτσι θα το αποφασίσουμε στρίβοντας ένα νόμισμα.

- Ποια η πιθανότητα να αγοράσουμε και να μας αρέσει το Α?

Παράδειγμα 6

<u>Λύση</u>

- Ορισμός ενδεχομένων

  A: Αγορά Α,

  B: Αγορα Β,

  I: Ικανοποίηση από το βιβλίο που αγοράσαμε

- Το ζητούμενο ενδεχόμενο που ορίζεται από την τομή των Α και Ι (Αγορά βιβλίου Α & Ικανοποίηση από το Βιβλίο που αγοράσαμε)
- $P(A \cap I) = P(A)P(I|A) \ = \ 0.5\ 0.7 \ = \ 0.35$

Παράδειγμα 7

Πρόβλημα

- Μία τράπουλα με 52 φύλλα κόβεται τυχαία σε 4 στοίβες των 13 φύλλων
- Ποια η πιθανότητα κάθε στοίβα να έχει έναν άσσο
- Σημείωση: Το πρόβλημα το έχουμε ξαναδεί στην προηγούμενη ενότητα μετρώντας τα εμπλεκόμενα σύνολα.

Παράδειγμα 7

Λύση

- Η χρήση πολλαπλασιαστικού κανόνα διευκολύνει την προσέγγιση
- Ορισμός Ενδεχομένων
  - E1 = {Ασσος μπαστούνι βρίσκεται σε μία στοίβα}
  - E2 = {Άσσος μπαστούνι & άσσος κούπα σε διαφορετικές στοίβες}
  - E3 = {Άσσος μπαστούνι & άσσος κούπα & άσσος σπαθί σε διαφορετικές στοίβες}
  - E4 = {Και οι 4 άσσοι σε διαφορετικές στοίβες}
- $P(E1 \cap E2 \cap E3 \cap E4) =$

$$P(E1)P(E2|E1)\,P(E3|E1 \cap E2)\,P(E4|E1 \cap E2 \cap E3)$$

Παράδειγμα 7

Λύση

- Υπολογισμοί Πιθανοτήτων ενδεχομένων
  - $P(E1) = 1$
  - $P(E2|E1) = 39/51$

    Θέσεις εκτός της στοιβας του μπαστουνιού : 39 θέσεις,

    Δυνατές θέσεις: 51 θέσεις
  - $P(E3|E1 \cap E2) = 26/50$

    Θέσεις εκτός των στοιβών των δύο άσσων: 26 θέσεις,

    Δυνατές θέσεις : 50 θέσεις
  - $P(E4|E1 \cap E2 \cap E3) = 13/49$

    Θέσεις εκτός των στοιβών των τριών άσσων: 13 θέσεις,

    Δυνατές θέσεις : 49 θέσεις
- $P(E1 \cap E2 \cap E3 \cap E4) =$

$$= P(E1)P(E2|E1)P(E3|E1 \cap E2)P(E4|E1 \cap E2 \cap E3) =$$

$$(39 \times 26 \times 13) / (51 \times 50 \times 49)$$

Παράδειγμα 8

<u>Πρόβλημα</u>

- Μία τάξη με n φοιτητές
- Ποια η πιθανότητα να υπάρχει ένα ζεύγος ανθρώπων με γενέθλια την ίδια μέρα του χρόνου;

Παράδειγμα 8

Λύση

- Ορίζουμε ως E την πιθανότητα να μην έχει κανένα ζεύγος κοινή μέρα γενεθλίων
- A: υπάρχει ζεύγος με την ίδια μέρα γενέθλια, $P(A) = 1 - P(E)$
- Υπολογισμός $\mathrm{P(E)}$
- Χρήση πολλαπλασιαστικού κανόνα διευκολύνει την προσέγγιση
- Ορισμός Ενδεχομένων
  - E_1 = {Φοιτητής 1 δεν έχει ίδια μέρα γενέθλια με κάποιον άλλο φοιτητή}
  - E_2 = {Φοιτητής 2 δεν έχει ίδια μέρα γενέθλια με κάποιον άλλο φοιτητή}
  - …
  - E_n = {Φοιτητής n δεν έχει ίδια μέρα γενέθλια με κάποιον άλλο φοιτητή}

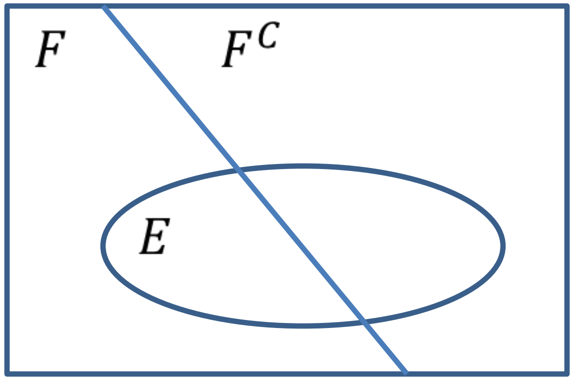
$$P(E) = P(\cap_{i=1}^{n} En) = P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3|E_1 \cap E_2)\, P(E_n| \cap_{i=1}^{n-1} E_n)$$

$$= 1\ (364/365)\ (363/365)\ \ldots\ ((365 - n + 1)/365)$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Έστω E και F ενδεχόμενα
- Το Ε μπορεί να εκφραστεί ως $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^C)$
- $(E \cap F)$ & $(E \cap F^C)$ προφανώς αλληλοαποκλειόμενα
- Επομένως,

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^C)$$
$$= P(E|F)\, P(F) + P(E|F^C)\, P(F^C)$$
$$= P(E|F)\, P(F) + P(E|F^C)\, (1 - P(F))$$



Σχόλιο: Η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο Ε ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων να συμβεί μαζί με το F και μαζί με το F^C

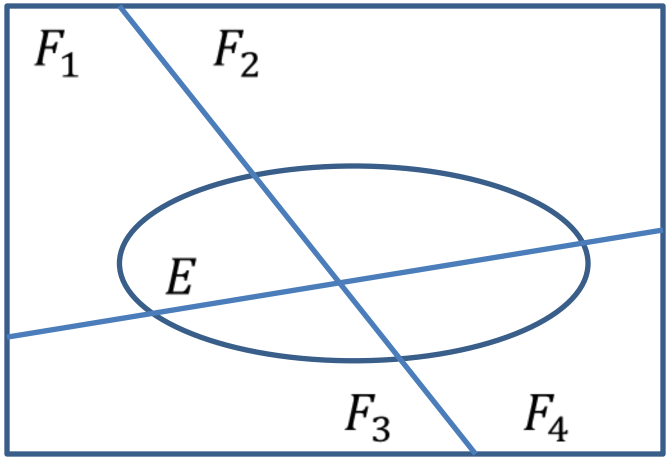
Π.χ. Ο Μάνος πάει για τρέξιμο (E), είτε με ήλιο (F), είτε χωρίς ήλιο(F^C)

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Η (1) μπορεί να γενικευθεί για περισσότερα από ένα ενδεχόμενα
- Έστω $F_1, F_2, \dots, F_n$ αμοιβαία αλληλοαποκλειομενα ενδεχόμενα
- $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \Omega$ δηλαδή ένα από τα F_i για $(i = 1, \dots, n)$ θα συμβεί
- Το E μπορεί να εκφραστεί ως

  $E = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i)$,
- Επομένως,

  $P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)$



<u>Σχόλιο</u>: Η πιθανότητα του E είναι ίση την πιθανότητα του αθροίσματος των τομών του ενδεχομένου E με το σύνολο των αλληλοαποκλειόμενων ενδεχομένων που μπορούν να συμβούν μαζί του.

Π.χ. Ο Μάνος πάει για τρέξιμο (E), με ήλιο (F_1), με βροχή (F_2), με χιόνι (F_3)

Τύπος του Bayes

- Αν υποθέσουμε πως το E έχει συμβεί και θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα του F_j να συνέβη μαζί του, χρησιμοποιούμε την παρακάτω σχέση:

$$P(F_j|E) = \frac{P(E \cap F_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

  η οποία είναι γνωστή ώς ο τύπος του Bayes.

- Μία διαφορετική μορφή του τύπου του Bayes η οποία επικεντρώνεται σε δύο ενδεχόμενα E και F έχει ως εξής:

$$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$$

Παράδειγμα 9

Πρόβλημα

- Αν βρέξει, ο Γιώργος βγαινει για τρέξιμο με πιθανότητα 20%
- Αν δε βρέξει, βγαινει για τρέξιμο με πιθανότητα 70%
- Στην πόλη του Γιώργου το 60% των ημερών δε βρέχει
- Ποια η πιθανότητα ο Γιώργος να πάει για τρέξιμο μία τυχαία μέρα;
- Αν μία μέρα γνωρίζουμε πως έτρεξε ποια η πιθανότητα αυτή τη μέρα να είχε βρέξει;

Παράδειγμα 9

Λύση

- Ενδεχόμενα
  - B: Βρέχει
  - T: τρέξιμο

α) Πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα ο Γ να τρέξει με βροχή και χωρίς βροχή

$$P(T) = P\big((T \cap B) \cup (T \cap B^C)\big) = P(T|B)P(B) \; + \; P(T|B^C)P(B^{\,C}) \; =$$
$$= \; 0.2\; 0.4 \; + \; 0.7\; 0.6 \; = \; 0.08 \; + \; 0.42 \; = \; 0.5$$

Η πιθανότητα του να τρέξει με βροχή και η πιθανότητα του να τρέξει χωρις βροχή

β) Εφαρμόζοντας τον τύπο του Bayes

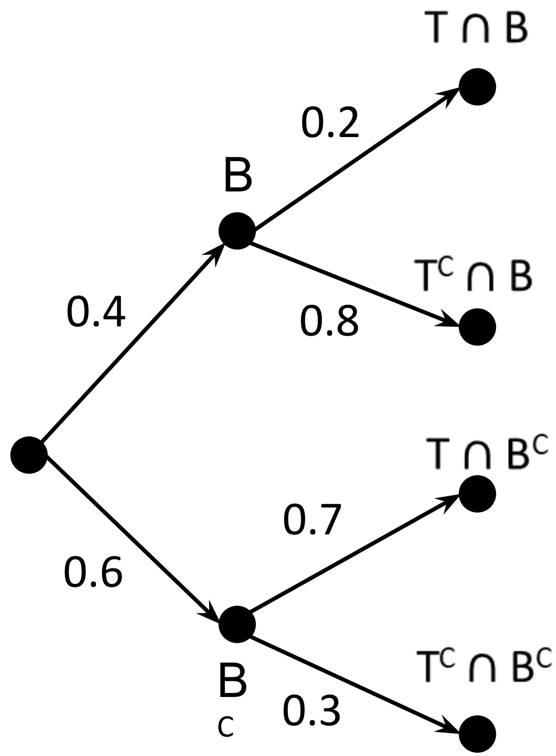
$$P(B|T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{P(B)P(T|B)}{P(T)} = \frac{0.4\; 0.2}{0.5} = \; 0.16$$

Παράδειγμα 9

Λύση με χρήση δέντρων

α) $P(T) = P(T|B)P(B) + P(T|B^C)P(B^C) = 0.2\ 0.4 + 0.7\ 0.6 = 0.08 + 0.42 = 0.5$

β) $P(B|T) = P(B \cap T)/P(T) = P(B)\ P(T|B)/P(T) = (0.4\ 0.2)/0.5 = 0.16$



$P(T \cap B) = 0.4\ 0.2 = 0.08$

$P(T^C \cap B) = 0.4\ 0.8 = 0.32$

$P(T \cap B^C) = 0.6\ 0.7 = 0.42$

$P(T^C \cap B^C) = 0.6\ 0.3 = 0.18$

Παράδειγμα 10

Πρόβλημα

- Ένα διαγώνισμα αποτελείται από ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με m επιλογές για κάθε ερώτηση.
- Αν ένας μαθητής έχει πιθανότητα p να γνωρίζει την απάντηση, ποια η πιθανότητα να γνωρίζει την απάντηση με δεδομένο ότι απάντησε σωστά;

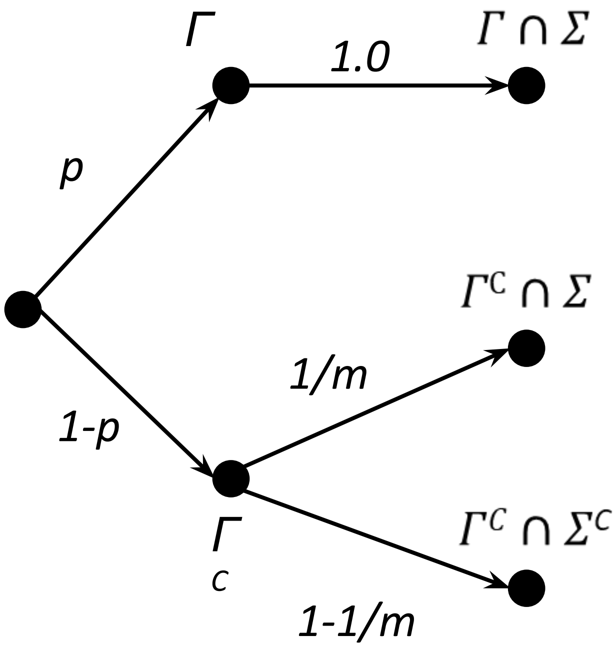
Παράδειγμα 10

<u>Λύση με χρήση δέντρων</u>

Ενδεχόμενα

Γ: γνωρίζει την απάντηση

Σ: Απαντά σωστά



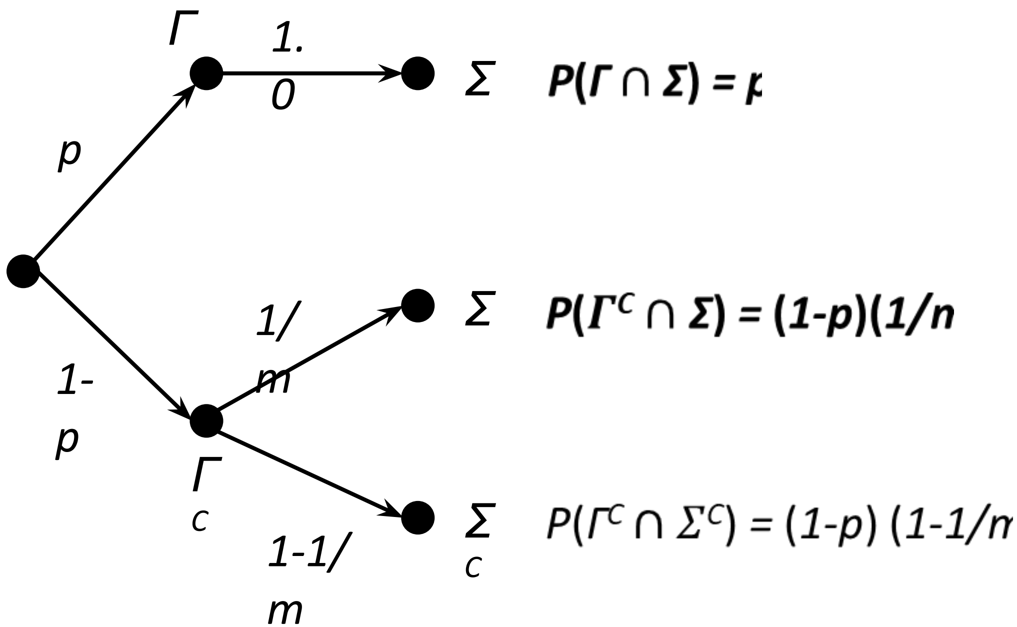
$\boldsymbol{P(\Gamma \cap \Sigma) = p}$

$\boldsymbol{P(\Gamma^C \cap \Sigma) = (1\text{-}p)(1/m)}$

$P(\Gamma^C \cap \Sigma^C) = (1\text{-}p)\ (1\text{-}1/m)$

Παράδειγμα 10

- $$P(\Gamma|\Sigma) = \frac{P(\Sigma|\Gamma)P(\Gamma)}{P(\Sigma)} = \frac{P(\Sigma|\Gamma)P(\Gamma)}{P(\Sigma|\Gamma)P(\Gamma) + P(\Sigma|\Gamma^C)P(\Gamma^C)} =$$
$$= \frac{p}{p + \frac{1}{m}(1-p)}$$



Παράδειγμα 11

<u>Πρόβλημα</u>

- Κουτί με λαμπτήρες τριών τύπων (Α, Β, Γ)
- 20% τύπου Α, 30% τύπου Β, 50% τύπου Γ
- Πιθανότητα Α να λειτουργήσει για τουλάχιστον 100 ώρες 0.7
- Πιθανότητα Β να λειτουργήσει για τουλάχιστον 100 ώρες 0.4
- Πιθανότητα Γ να λειτουργήσει για τουλάχιστον 100 ώρες 0.3

- Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσει πάνω από 100 ώρες ένας λαμπτήρας που έχει εξαχθεί τυχαία από το κουτί;
- Αν ο λαμπτήρας δεν καεί πριν τις 100 ώρες ποια η πιθανότητα να είναι τύπου Α, Β, Γ?

Παράδειγμα 11

Λύση

α) $P(K) = P(A \cap K) + P(B \cap K) + P(\Gamma \cap K) =$

$$= 0.14 + 0.12 + 0.15 = 0.41$$

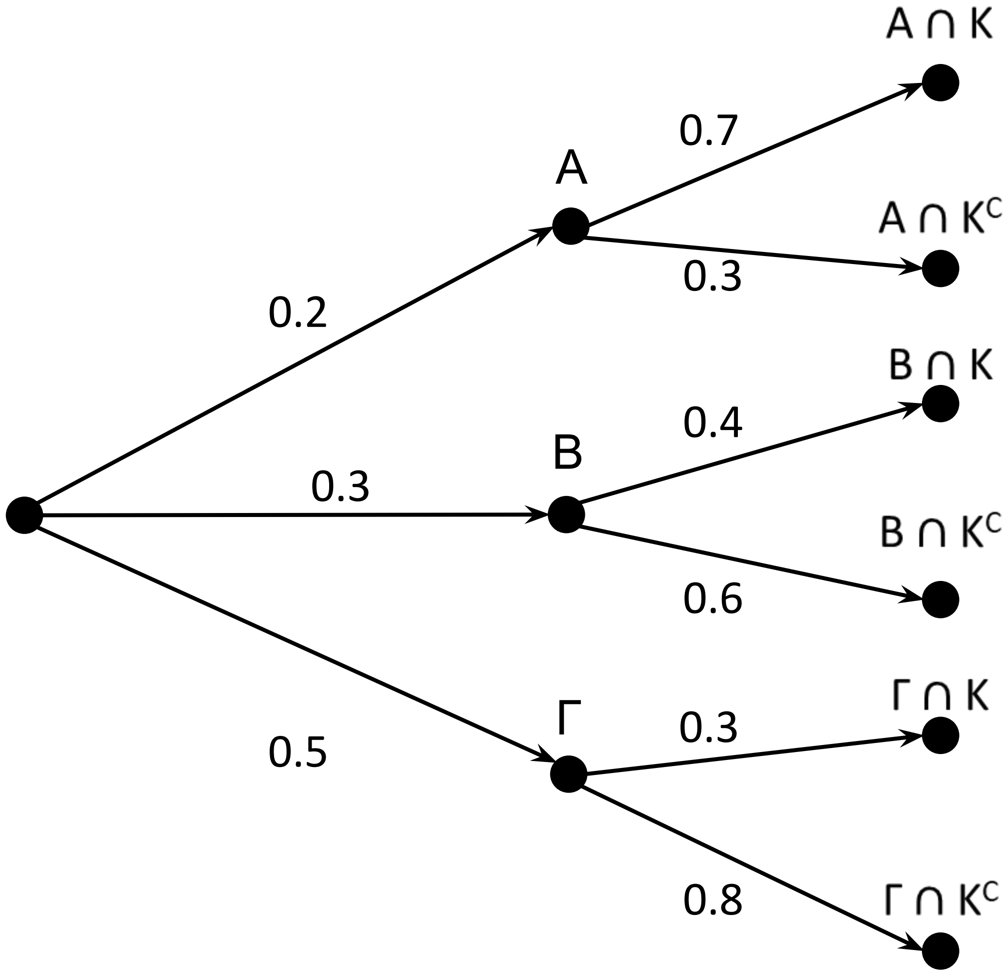
(αλληλοαποκλειόμενα ενδεχόμενα)

β) Τύπος Α: $P(A|K) = P(A \cap K)/ P(K) = 0.14 / 0.41$

Τύπος Β: $P(B|K) = P(B \cap K)/ P(K) = 0.12 / 0.41$

Τύπος Γ: $P(\Gamma|K) = P(\Gamma \cap K)/ P(K) = 0.15 / 0.41$

Παράδειγμα 11



P($A \cap K$**) = 0.14**

$P(A \cap K^C) = 0.06$

P($B \cap K$**) = 0.12**

$P(B \cap K^C) = 0.18$

P($\Gamma \cap K$**) = 0.15**

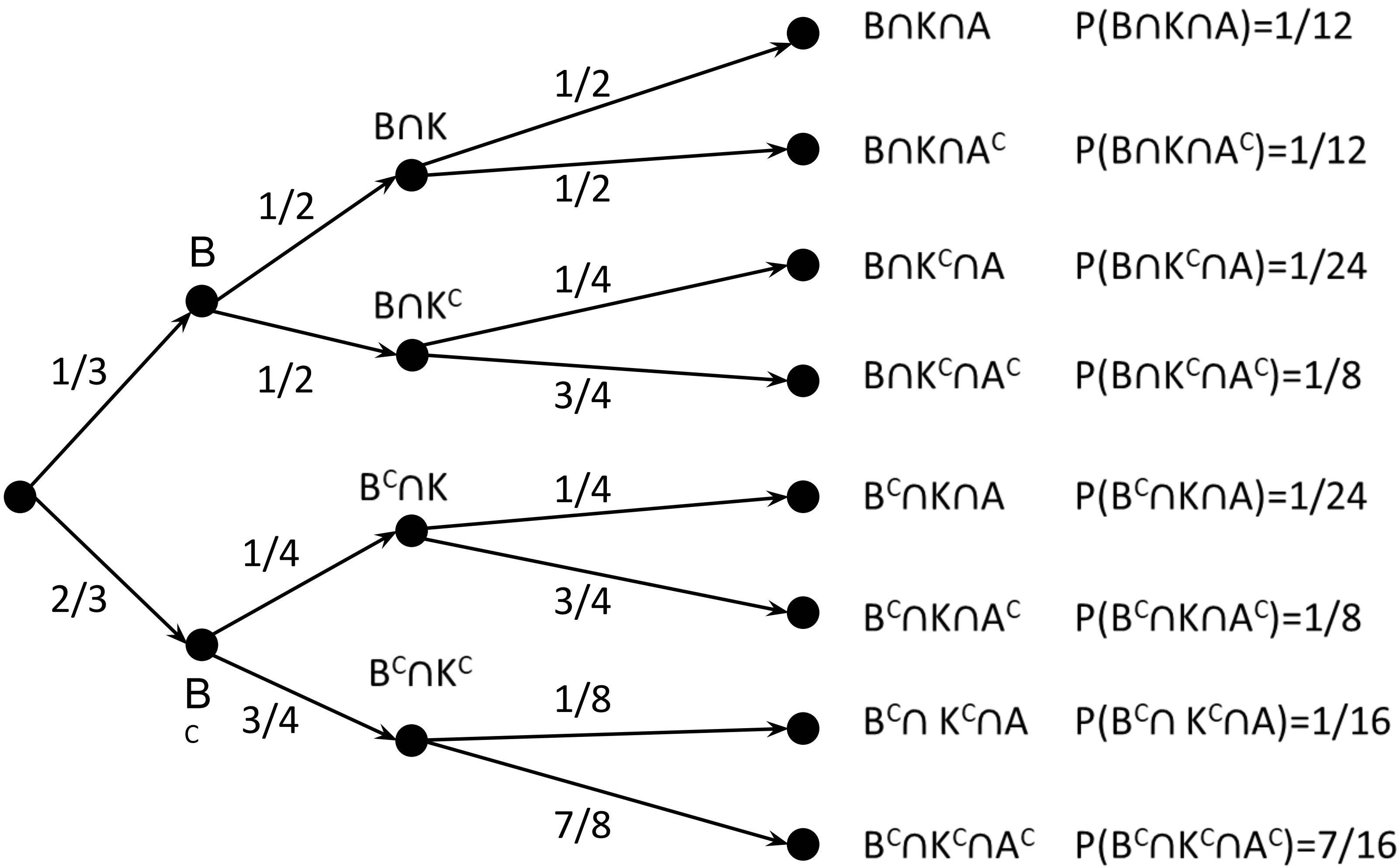
$P(\Gamma \cap K^C) = 0.40$

Παράδειγμα 12

Πρόβλημα

- Σε μία πόλη βρέχει το 1/3 των ημερών
- Όταν βρέχει, οι δρόμοι έχουν κίνηση με πιθανότητα 50%, ενώ η πιθανότητα κίνησης υποδιπλασιάζεται όταν δε βρέχει.
- Όταν βρέχει και έχει κίνηση αργώ στην εργασία μου με πιθανότητα 50%
- Αντίθετα, όταν δε βρέχει και δεν έχει κίνηση αργώ στη δουλειά μόνο 1 στις 8 φορές
- Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις αργώ κατά 25%
- α) Ποια η πιθανότητα πως δε βρέχει και έχει αυξημένη κίνηση και φτάνω στη δουλειά στην ώρα μου?
- β) Ποια η πιθανότητα να φτάσω αργά στη δουλειά μου?
- γ) Με δεδομένο ότι άργησα, ποια η πιθανότητα να έβρεξε τη συγκεκριμένη μέρα?

Παράδειγμα 12



Παράδειγμα 12

- Λύση

α) Πιθανότητα πως δε βρέχει και έχει αυξημένη κίνηση και φτάνω στη δουλειά στην ώρα μου;

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}^C \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{A}^C) = \mathrm{P}(\mathrm{B}^C \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{A}^C) = \mathrm{P}(\mathrm{B}^C)\, P(K|\mathrm{B}^C)\, P(\mathrm{A}^C|K \cap \mathrm{B}^C) =$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

β) Πιθανότητα να φτάσω αργά στη δουλειά μου?

Άθροισμα των αλληλοαποκλειόμενων ενδεχομένων που περιέχουν το A

(όλοι οι διαφορετικοί τρόποι να αργήσω)

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}^C \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}^C \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}^C \cap \mathrm{K}^C \cap \mathrm{A}) =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16} = \frac{11}{48}$$

γ) Πιθανότητα να βρέχει αν έφτασα αργά στη δουλειά μου

P(B|A) = P(B∩A) / P(A) = (1/12 + 1/24) / (11/48) = (3/24)/(11/48) = 6/11

Παράδειγμα 12

- Λύση (συνέχεια)

γ) Πιθανότητα να βρέχει αν έφτασα αργά στη δουλειά μου

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{24}}{\frac{11}{48}} = \frac{6}{11}$$

Ανεξάρτησία Ενδεχομένων

- $P(E|F)$: Η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο, αν λάβουμε πληροφόρηση πως το ενδεχόμενο F έχει συμβεί
- Υπάρχουν ενδεχόμενα για E για τα οποία η πληροφόρηση πως το F συνέβη δεν τροποποιεί την πιθανότητα τους.
- Παραδείγματα τέτοιων ενδεχομένων
  - E: George φέρνει γράμματα στην Αμερική &
    F: Μάνος φέρνει έξι στο ζάρι
  - E: Στο 1ο στρίψιμο το νόμισμα φέρνει Κ &
    F: Στο 2ο στρίψιμο το νόμισμα φέρνει Κ
  - E: Στο 1ο στρίψιμο το νόμισμα φέρνει Κ &
    F: Στο 2ο στρίψιμο το νόμισμα φέρνει Γ

Ανεξάρτησία Ενδεχομένων

- Δύο ενδεχόμενα E και F είναι *ανεξάρτητα*, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}|\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$$

- Ή ισοδύναμα λόγω της $P(E \cap F) = P(F)\, P(E|F)$, δύο ενδεχόμενα E και F είναι *ανεξάρτητα*, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})$$

- Κυκλικότητα:

Επειδή $P(E \cap F) = P(\mathrm{E})\, P(F|E)$, ισχύει:

$$\mathrm{P}(F|E) = P(F),$$

δηλαδή όταν το E είναι ανεξάρτητο του F, τότε και το F είναι ανεξάρτητο του E

Ανεξάρτησία Ενδεχομένων

- Αν δύο ενδεχόμενα E και F είναι ανεξάρτητα, τα E και F^c είναι επίσης ανεξάρτητα

Απόδειξη:

$$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P(E} \cap F) + \mathrm{P(E} \cap F^c) = P(E)\,P(F) + \mathrm{P(E} \cap F^c)$$

Επόμένως,

$$\mathrm{P(E} \cap F^c) = \mathrm{P(E)} - \left(\mathrm{P(E)P(}F)\right) = P(E)\,(1 - P(F)) = P(E)\,P(F^c)$$

Παράδειγμα 13

Πρόβλημα

- Επιλέγουμε τυχαία ένα φύλλο από μία τράπουλα
- Ενδεχόμενο A: Το φύλλο είναι 7
- Ενδεχόμενο B: Το φύλλο είναι μπαστούνι
- Είναι τα A και B ανεξάρτητα?

Παράδειγμα 13

Πρόβλημα

- Επιλέγουμε τυχαία ένα φύλλο από μία τράπουλα
- Ενδεχόμενο A: Το φύλλο είναι 7
- Ενδεχόμενο B: Το φύλλο είναι μπαστούνι
- Είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Λύση

- $P(A) = 4/52$
- $P(A|B) = 1 / 13 = P(B)$ ανεξάρτητα!, ή
- $P(A)\,P(B) = 4/52\;13/52 = 1/52 = P(A \cap B)$

Παράδειγμα 14

Πρόβλημα

- Στρίβουμε ένα δίκαιο νόμισμα δύο φορές
- Ενδεχόμενα
  - $E1$: Το 1ο στρίψιμο Κορώνα
  - $E2$: Το 2ο στρίψιμο Κορώνα
- $P(E1)$ = |{(Κ, Κ), (Κ, Γ)}| / |{(Κ, Κ), (Κ, Γ), (Γ, Κ), (Γ, Γ)}| = 2/4
- $P(E2)$ = |{(Κ, Κ), (Γ, Κ)}| / |{(Κ, Κ), (Κ, Γ), (Γ, Κ), (Γ, Γ)}| = 2/4
- $P(E1 \cap E2)$ = |{(Κ, Κ)}| / |{(Κ, Κ), (Κ, Γ), (Γ, Κ), (Γ, Γ)}| = 1/4 = $P(E1)\, P(E2) \Longrightarrow$ $E1$ και $E2$ είναι ανεξάρτητα!

Παράδειγμα 15

Πρόβλημα

- Ρίχνουμε δύο δίκαια εξάπλευρα ζάρια A και B
- Ποια η πιθανότητα του αθροίσματος των ζαριών είναι να είναι 6 με δεδομένο πως το πρώτο ζάρι φέρνει 1;

Παράδειγμα 15

Λύση

- $E1$: Το ενδεχόμενο το άθροισμα των ζαριών να είναι έξι
- $E2$: Το ενδεχόμενο το 1ο ζάρι να φέρει 1
- $P(E1) \ = \ 5/36$ (Αποτελέσματα: $\{(1{,}5), (2{,}4), (3{,}3), (4{,}2), (5{,}1)\}$)
- $P(E2) \ \ = 6/36$ (Αποτελέσματα: $\{(1{,}5), (1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (1{,}5), (1{,}6)\}$)
- $P(E1 \cap E2) = \ |(1{,}5)|/36 \ = \ 1/36$
- Σχόλιο: Η γνώση πως το Ε2 συμβαίνει σαφώς τροποποιεί την πιθανότητα του Ε1. Ξέρουμε πως δε φέραμε 6 στο 1ο ζάρι οπότε γλυτώσαμε το ανεπιθύμητο σενάριο του να χάσουμε από την 1ο στίψιμο. Έτσι το Ε1 γίνεται πιο πιθανό:

$$P(E1|E2) \ = \ |(1{,}5)| \ / \ |\{(1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (1{,}5), (1{,}6)\}| \ = \ 1/6$$

$$P(E1) \ = \ 5/36$$

Ανεξαρτησία Πολλαπλών Ενδεχομένων

- Τρία ενδεχόμενα E, F και G είναι *ανεξάρτητα*, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boldsymbol{P(E \cap F \cap G) = P(E)\,P(F)\,P(G)}$$
$$\boldsymbol{P(E \cap F) = P(E)\,P(F)}$$
$$\boldsymbol{P(E \cap G) = P(E)\,P(G)}$$
$$\boldsymbol{P(F \cap G) = P(F)\,P(G)}$$

- Αν τα E, F και G είναι ανεξάρτητα τότε το E είναι ανεξάρτητο από οποιαδήποτε ενδεχόμενο σχηματίζεται από τα F και G, (π.χ. $F \cup G$)
- Γενικεύοντας για περισσότερα ενδεχόμενα E_1, E_2,…, E_n:

  Τα $E_1, E_2, \dots, E_n$ είναι ανεξάρτητα αν για κάθε υποσύνολο αυτών ($E_{1'}, E_{2'}, \dots, E_{k'}$), με $k < n$, ισχύει:

$$P\left(\bigcap_{i=1'}^{k} E_{i'}\right) = P(E_{1'})P(E_{2'}) \dots P(E_{k'})$$

Παράδειγμα 16

Πρόβλημα

- Ρίχνουμε ένα δίκαιο εξάπλευρο ζάρι τρεις φορές.
- Οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες

  α) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε και τις τρεις φορές έξι?

  β) Ποια η πιθανότητα να μη φέρουμε καμία φορά έξι?

  γ) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε ακριβώς δύο φορές έξι?

Παράδειγμα 16

Λύση

- Έστω A, B, Γ, τα ενδεχόμενα να φέρουμε έξι την 1η, 2η και 3η φορά αντίστοιχα.
- Έχουμε $P(A) = P(B) = P(\Gamma) = 1/6$

α) $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma) = (1/6)^3 = 1/216$ (Ανεξαρτησία)

β) $P(A^C \cap B^C \cap \Gamma^C) = P(A^C)\,P(B^C)\,P(\Gamma^C) = (5/6)^3 = 125/216$ (Ανεξαρτησία)

γ) Μπορούμε να φέρουμε ακριβώς δύο εξάρια με τρεις αλληλοαποκλειόμενους τρόπους:

$P(A \cap B \cap \Gamma^C) = P(A)\,P(B)\,P(\Gamma^C) = (1/6)\,(1/6)\,(5/6) = 5/216$ (Ανεξαρτησία)
$P(A \cap B^C \cap \Gamma) = P(A)\,P(B^C)\,P(\Gamma^C) = (1/6)\,(5/6)\,(5/6) = 5/216$ (Ανεξαρτησία)
$P(A^C \cap B \cap \Gamma) = P(A^C)\,P(B)\,P(\Gamma) = (5/6)\,(1/6)\,(5/6) = 5/216$ (Ανεξαρτησία)

Επομένως, για το ενδεχόμενο K: ακριβώς δύο εξάρια $P(K) = 15/216$

Παράδειγμα 17

Πρόβλημα

- Ακολουθία n ανεξάρτητων πειραμάτων
- Κάθε πείραμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p
- Ποια η πιθανότητα

  α) Να προκύψει τουλάχιστον μία επιτυχία στις n δοκιμές?

  β) Να προκύψουν ακριβώς k επιτυχίες στις πρώτες n δοκιμές

  γ) Να προκύψει επιτυχία σε όλες τις δοκιμές

Παράδειγμα 17

<u>Λύση</u>

Έστω E_i το ενδεχόμενο επιτυχίας στη δοκιμή i $(1 \leq i \leq n)$

Προφανώς, η πιθανότητα του $P(E_i) = p$

α) Έστω A το ενδεχόμενο τουλάχιστον μία επιτυχίας και B το ενδεχόμενο καμίας απολύτως επιτυχίας. Προφανώς, $P(A) = 1 - P(B)$

Το ενδεχόμενο να μην έχουμε επιτυχίες ορίζεται ως η τομή των συμπληρωμάτων των E_i, δηλαδή:

$P(B) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} {E_i}^c\right) = P({E_1}^c)P({E_2}^c)\ldots P({E_n}^c) = (1-p)^n$ (Ανεξαρτησία)

Επομένως, $P(A) = 1 - (1-p)^n$

Παράδειγμα 17

Λύση

β) Για να έχουμε ακριβώς k επιτυχίες, σημαίνει ότι έχουμε $(n\ -\ k)$ αποτυχίες.

Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ διαφορετικές ακολουθίες n δοκιμών με k επιτυχίες και $n-k$ αποτυχίες.

Η πιθανότητα να έχει μία ακολοθία k επιτυχίες και $(n-k)$ αποτυχίες είναι ίση με $p^k(1-p)^{n-k}$

Κάθε μία από τις $\binom{n}{k}$ ακολουθίες αποτελεί ένα διαφορετικό ενδεχόμενο για την ακολουθία των πειραμάτων.

Τα ενδεχόμενα αυτά είναι αλληλοαποκλειόμενα, οπότε η συνολική πιθανότητα να έχουμε ακριβώς k επιτυχίες είναι

$$P(ακριβώς\ k\ επιτυχιες) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Παράδειγμα 17

<u>Λύση</u>

γ) Το ενδεχόμενο να έχουμε όλες τις δοκιμές επιτυχημένες, αντιστοιχεί στην τομή όλων των E_i για $(1 \le i \le n)$:

$$P(n\ \varepsilon\pi\iota\tau\upsilon\chi\iota\varepsilon\varsigma) = P(\cap_{i=1}^{n} E_i) = P(E_1)P(E_2)\ldots P(E_n) = p^n$$ (Ανεξαρτησία)

Η $P(\cdot\,|F)$ είναι μία Πιθανότητα

- Οι δεσμευμένες πιθανότητες ικανοποιούν τα τρία αξιώματα των πιθανοτήτων

- Αξίωμα 1:

$$0 \leq P(E|F) \leq 1$$

- Αξίωμα 2:

$$P(\Omega|F) = 1$$

- Αξίωμα 3:

  Αν τα ενδεχόμενα $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$ είναι αλληλοαποκλειόμενα τότε

$$P((\bigcup_{1}^{\infty} E_i)|F) = \sum_{1}^{\infty} P(E_i|F)$$

Δεσμευμένη Ανεξαρτησία

- Ορισμός Ανεξάρτητων Ενδεχομένων:
  - Δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, όταν

  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ή ισοδύναμα $P(A|B) = P(A)$

- Υπάρχουν ενδεχόμενα τα οποία δεν είναι ανεξάρτητα, αλλά είναι ανεξάρτητα όταν συμβαίνει ένα τρίτο ενδεχόμενο
- Δεσμευμένη Ανεξαρτησία

  Δύο ενδεχόμενα A και B είναι δεσμευμένα ανεξάρτητα με δεδομένο ένα Ενδεχόμενο C, όταν

$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$$

Δεσμευμένη Ανεξαρτησία

- Όταν $P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$,

  έχουμε:

$$P(A|B \cap \mathrm{C}) = \frac{P(A \cap B \cap \mathrm{C})}{P(B \cap \mathrm{C})} = \frac{P(C)P(A \cap B|C)}{P(C)P(B|C)} =$$

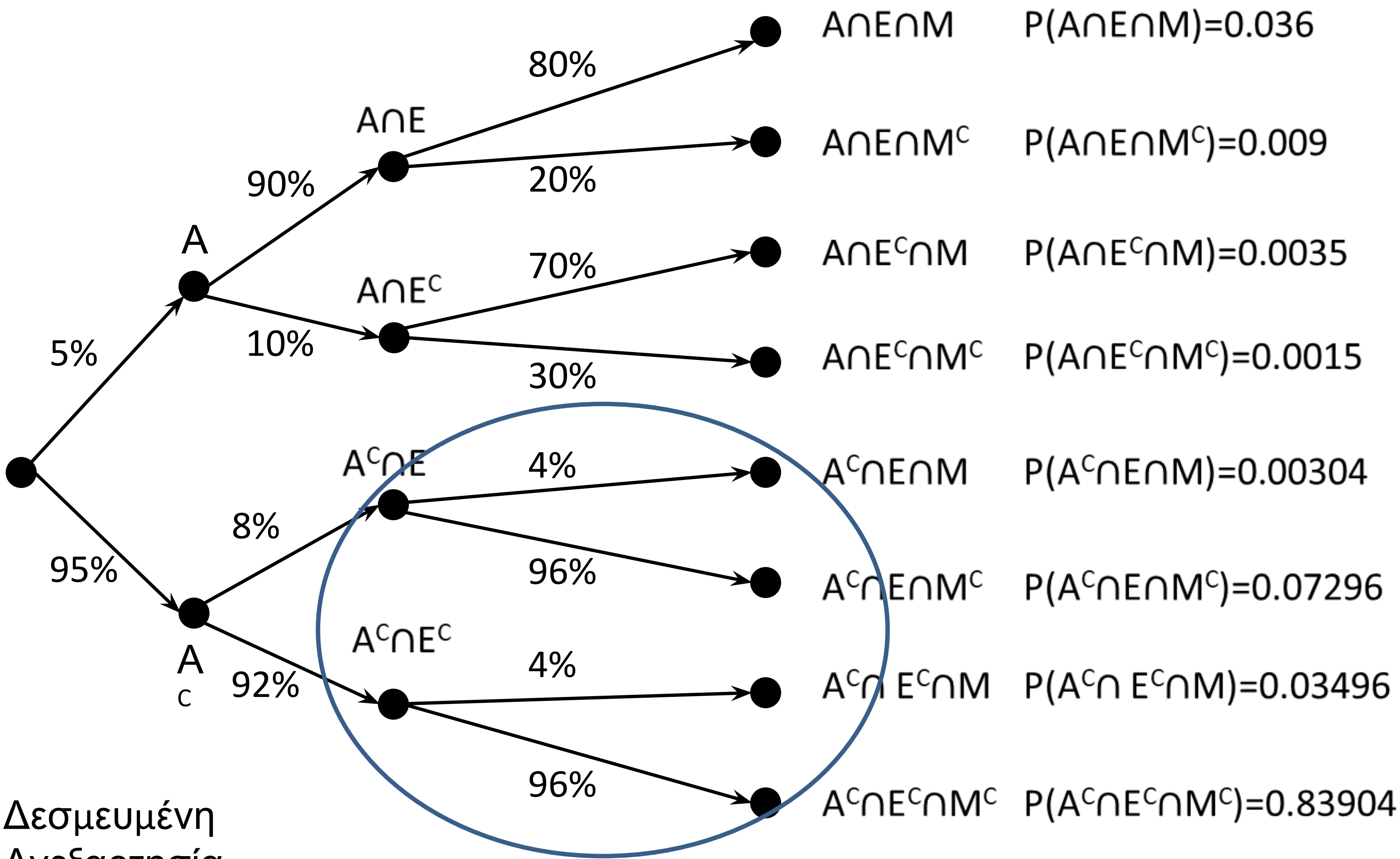
$$= \frac{P(A|C) \cdot P(B|C)}{P(B|C)} = P(A|C)$$

<u>Σχόλιο</u>: Η πιθανότητα του A με δεδομένο το $B \cap \mathrm{C}$ είναι ίση με την πιθανότητα του A με δεδομένο το C. Δηλαδή, όταν ισχύει το C, η πληροφόρηση για το αν ισχύει το B, δε μας προσφέρει τίποτα στον προσδιορισμό της πιθανότητας του A.

Παράδειγμα 18

- Η Έλενα και η Μαρία δουλεύουν σε μία εταιρεία
- Η Έλενα ζει στα ΒΠ και η Μαρία ζει στα ΝΠ
- Εργάζονται σε μία εταιρία στο κέντρο της πόλης.
- Μέχρι το Νοέμβριο θεωρούσαμε πως το ενδεχόμενο η Ε να αργοπορήσει στην εργασία της είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενο η Μ να αργοπορήσει στην εργασία της.
- Το Νοέμβριο είχαμε απεργιακές κινητοποιήσεις στα ΜΜΜ, και καταλήξαμε στα εξής
  - Όταν δεν έχουμε απεργίες, η Ε έχει πιθανότητα 8% να αργήσει στην εργασία της, ενώ η Μ έχει πιθανότητα 4% να αργήσει. Τα ενδεχόμενα αργοπορίας είναι ανεξάρτητα
  - Όταν έχουμε απεργίες, η Ε αργεί με πιθανότητα 90% και όταν η Ε αργεί, η Μ αργεί με πιθανότητα 80%. Αν η Ε φθάσει στην ώρα της, η Μ αργοπορεί με πιθανότητα 70%.
  - Κάθε μέρα έχει 5% πιθανότητα για απεργιακές κινητοποιήσεις στα ΜΜΜ
- Ποια η πιθανότητα να αργήσει η Μ μία τυχαία μέρα;
- Αν άργησε η Ε, ποια η πιθανότητα να αργήσει η Μ;
- Αν άργησε η Μ, ποια η πιθανότητα να έχουμε απεργία;

Παράδειγμα 18



Δεσμευμένη
Ανεξαρτησία

Παράδειγμα 18

Λύση

- Αρχικά εφαρμόζουμε τον πολλαπλασιαστικό κανόνα για τον υπολογισμό των διάφορων τομών των τριών ενδεχομένων

α) Η πιθανότητα να αργήσει η M ισούται με το άθροισμα των αλληλοαποκλειόμενων ενδεχομένων που περιέχουν την αργοπορία της M (όλοι οι τρόποι που αργεί η M)

$$P(M) = P(A \cap E \cap M) + P(A \cap E^C \cap M) + P(A^C \cap E \cap M) + P(A^C \cap E^C \cap M)$$
$$= 0.036 + 0.0035 + 0.00304 + 0.03496 = 0.0775$$

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes και αθροίζοντας τα αλληλοαποκλειόμενα ενδεχόμενα, έχουμε:

$$P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} =$$

$$= \frac{P(A \cap E \cap M) + P(A^C \cap E \cap M)}{P(A \cap E \cap M) + P(A \cap E \cap M^C) + P(A^C \cap E \cap M) + P(A^C \cap E \cap M^C)} =$$

$$= \frac{0.036 + 0.00304}{0.036 + 0.009 + 0.00304 + 0.07296} = \frac{0.03904}{0.121} = 0.322645$$

Παράδειγμα 19

Λύση (συνέχεια)

γ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes και αθροίζοντας τα αλληλοαποκλειόμενα ενδεχόμενα, έχουμε:

$$P(A|M) = \frac{P(M \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{M})} =$$

$$= \frac{P(A \cap E \cap M) + P(A \cap E^C \cap M)}{P(M)} =$$

$$= \frac{0.036 + 0.0035}{0.0775} = \frac{0.0395}{0.121} = 0.5097$$

Παράδειγμα 20

Πρόβλημα

Περίπτωση 1ου κέρματος

- Στρίβω ένα κέρμα με πιθανότητα Κορώνας k δύο φορές
- Έστω Κ1 το ενδεχόμενο να φέρουμε Κ στην 1η ρίψη
- Έστω Κ2 το ενδεχόμενο να φέρουμε Κ στη 2η ρίψη
- Ποια η πιθανότητα του Ε2 αν ξέρουμε πως το Ε1 συνέβη;

Περίπτωση δύο κέρματων

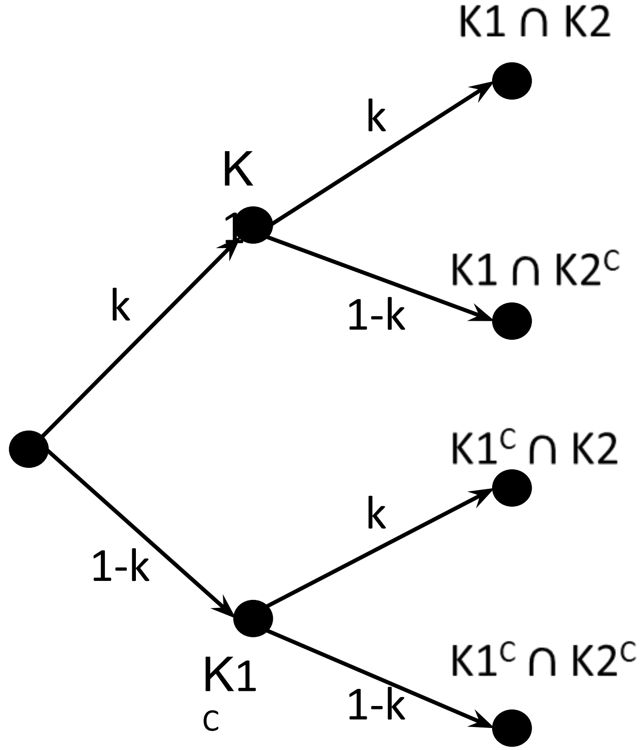
- Αν το κέρμα το έχουμε επιλέξει από ένα κουτί με δύο κέρματα
  - το 1ο κέρμα με πιθανότητα Κορώνας $k1$
  - Το 2ο κέρμα με πιθανότητα Κορώνας $k2$
- Ποια η πιθανότητα του Κ2 αν ξέρουμε πως το Κ1 συνέβη;

Παράδειγμα 20

Λύση

Περίπτωση ενός κέρματος

- Οι ρίψεις ενός συγκεκριμένου νομίσματος είναι ανεξάρτητες
- Επομένως, $P(K2) = P(K2|K1) = k$



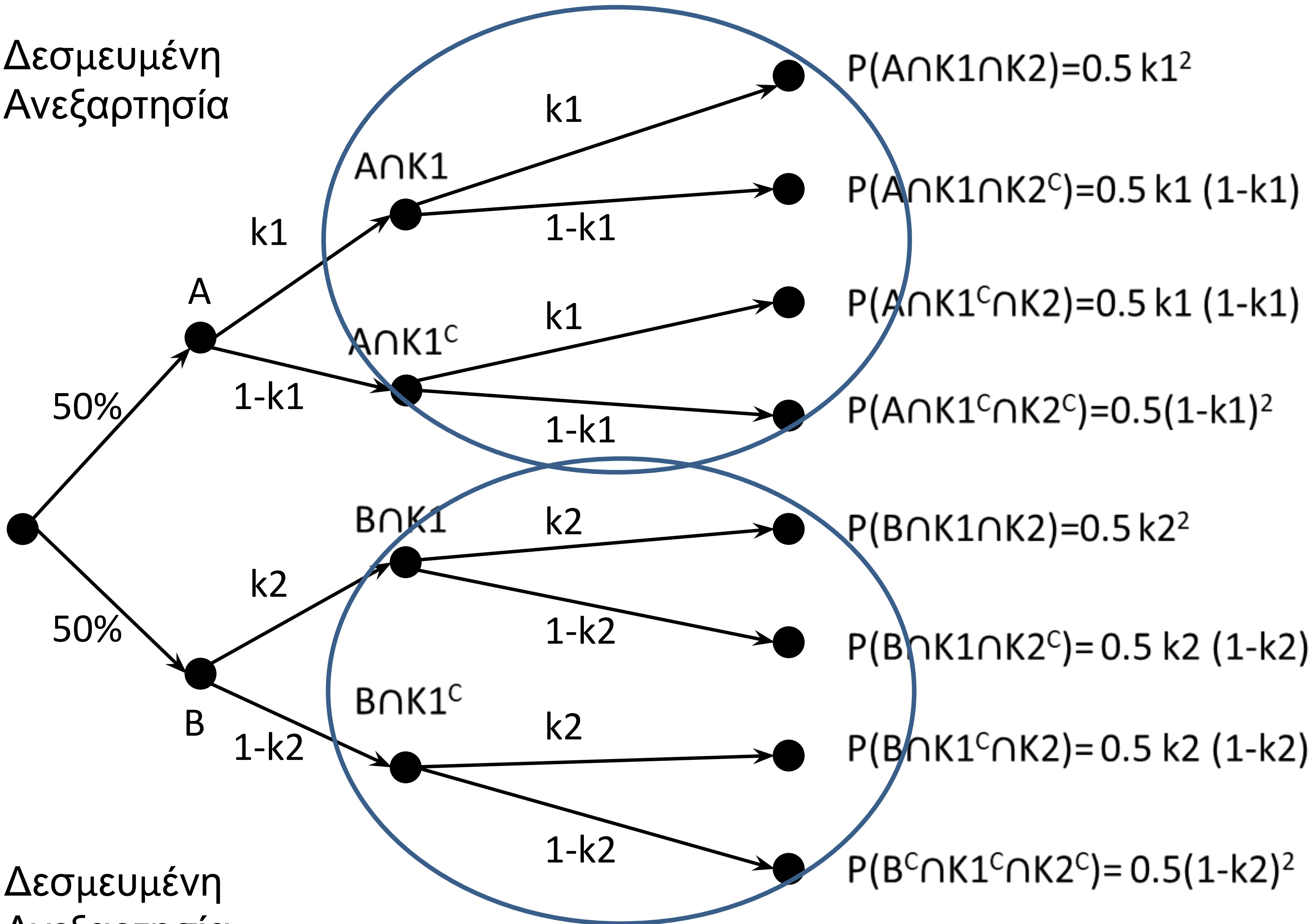
$P(K1 \cap K2) = k^2$

$P(K1 \cap K2^C) = k\,(1-k)$

$P(K1^C \cap K2) = k\,(1-k)$

$P(K1^C \cap K2^C) = (1-k)^2$

Παράδειγμα 20



Παράδειγμα 20

Περίπτωση δύο κερμάτων

- Ποια η πιθανότητα του K2 αν ξέρουμε πως το K1 συνέβη;
- Στην απουσία γνώσης ποιο κέρμα στρίψαμε, το αποτέλεσμα της $1^{ης}$ ρίψης επηρεάζει τις πιθανότητες της δεύτερης ρίψης.
  – Αυτό δε γίνεται γιατί η $1^{η}$ ρίψη επηρεάζει τη «μηχανική» της $2^{ης}$ ρίψης
  – Το αποτέλεσμα της $1^{ης}$ ρίψης μας δίνει πληροφόρηση για το ποιο κέρμα έχει επιλεγεί τυχαία από το κουτί (π.χ. αν k2 = 0 -το κέρμα B δεν φέρνει ποτέ Κορώνα- και εμείς είδαμε Κορώνα στην πρώτη ρίψη, πλέον ξέρουμε πως έχουμε επιλέξει το κέρμα A).
  – Με δεδομένη τη μερική πληροφόρηση για το ποιο κέρμα επιλέχθηκε μπορούμε να προσεγγίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το αποτέλεσμα της $2^{ης}$ ρίψης.

Παράδειγμα 20

Λύση (συνέχεια)

$$P(K2|K1) = \frac{P(K1 \cap K2)}{P(K1)} =$$

$$= \frac{P(A \cap K1 \cap K2) + P(B \cap K1 \cap K2)}{P(A \cap K1 \cap K2) + P(A \cap K1 \cap K2^C) + P(B \cap K1 \cap K2) + P(B \cap K1 \cap K2^C)}$$

$$= \frac{0.5k1^2 + 0.5k2^2}{0.5k1^2 + 0.5k1(1 - k1) + 0.5k2^2 + 0.5k2(1 - k2)}$$

Παράδειγμα 21

Πρόβλημα

- Σε ένα κουτί έχουμε δύο κέρματα.
  - Κέρμα Α: Δίκαιο (50% Κ, 50% Γ)
  - Κέρμα Β: Άδικο (90% Κ, 10% Γ)
- Επιλέγουμε ένα κέρμα και το δίνουμε σε ένα φίλο, ο οποίος το στρίβει 10 φορές και μας λέει πόσες κορώνες μέτρησε.
- Αν μέτρησε 9 κορώνες, ποια η πιθανότητα να πήραμε το κέρμα Α?

Παράδειγμα 21

- Ορισμός Ενδεχομένων

Α: Πήρα το κέρμα Α

Β: Πήρα το κέρμα Β

Γ: Εννέα κορώνες σε 10 ρίψεις

$$\mathrm{P(A)} \;=\; 0.5$$
$$\mathrm{P(B)} \;=\; 0.5$$
$$P(\Gamma|A) \;=\binom{10}{9}0.5^9(0.5)^{10-9}= 10\;0.5^{10} = 0.00976$$
$$P(\Gamma|B) \;=\binom{10}{9}0.9^9(0.1)^{10-9}= 10\;0.5^9 0.1 = 0.38742$$

Παράδειγμα 21

- Υπολογισμός της πιθανότητας να έχω επιλεξει το κέρμα Α αν μετρήσω 9 Κ:

$P(A|\Gamma) = P(A \cap \Gamma) / P(\Gamma)$

Υπολογίζω τη $P(\Gamma)$ ως τη συνολική πιθανότητα να συμβεί το Γ, είτε με το κέρμα A, είτε με το κέρμα B:

$\mathrm{P}(\Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \Gamma) + \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \Gamma) =$
$= 0.00488 + 0.19371 = 0.19859$

Επομένως,

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\Gamma) = 0.00488 / 0.19859 = 0.02457$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα να φέρω 9Κ με δεδομένο πως έχω επιλέξει το άδικο κέρμα Β είναι:

$\mathrm{P}(B|\Gamma) = \mathrm{P}(B \cap \Gamma) / \mathrm{P}(\Gamma) =$
$= 0.19371 / 0.19859 = 0.97542$