



# Электричество и магнетизм

## Лекция 11

### Магнитный диполь. Магнетики

10 ноября 2021 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,  
Ольчак Андрей Станиславович



## Основные законы для векторных полей, не меняющихся со временем (постоянные поля)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = 0$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

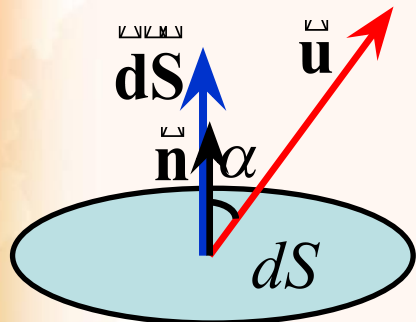
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

$$[\nabla \times \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}$$

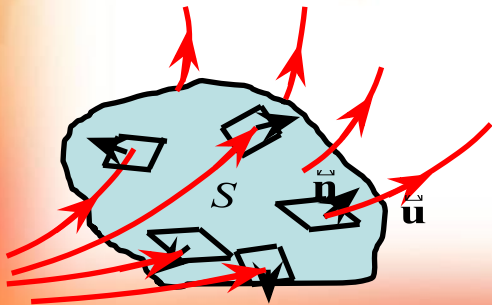
## Поток вектора через замкнутую поверхность

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



$$d\Phi = u dS \cos \alpha$$



Если площадка  $dS$  дифференциально мала («точечная»), то *элементарный поток* вектора  $\mathbf{u}$  через нее  $d\Phi = (\mathbf{u}, d\mathbf{S})$ . Вектор  $d\mathbf{S}$  считаем направленным по нормали к площадке. Поток вектора  $\Phi$  через большую поверхность  $S$  вычисляется как сумма (интеграл) элементарных потоков  $\Delta\Phi$  через все микроскопические площадки  $dS$ , составляющие большую. Нормали для замкнутой поверхности считаются направленными изнутри наружу. Поток пропорционален числу силовых линий поля, пронизывающих площадку (с учетом их направления).



## Дивергенция вектора в данной точке

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = d\Phi/dV = (\sum q_i / \varepsilon_0) dV = \rho / \varepsilon_0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = d\Phi_A/dV = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z$$

Дивергенция вектора в данной точке

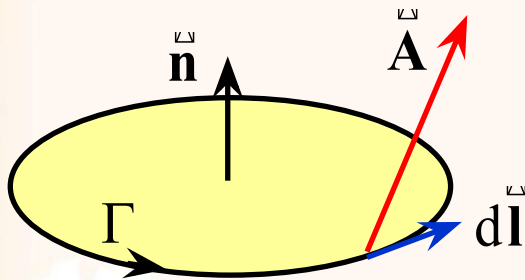
- (1) = предел отношения потока вектора через дифференциально малую поверхность вблизи этой точки к объёму, заключенному внутри этой малой поверхности;
- (2) = сумма производных компонент вектора  $\mathbf{A}$  по соответствующим координатам.



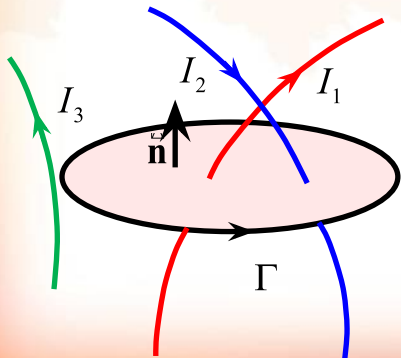
## Циркуляция вектора по замкнутому контуру

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$



Циркуляция вектора  $A$  по замкнутому контуру  $\Gamma$  = сумма скалярных произведений дифференциально малых векторов  $d\vec{l}$ , на которые разбивается контур  $\Gamma$ , и векторов  $A$ , взятых в точках размещения перемножаемых с ними отрезков  $d\vec{l}$



Токи, пронизывающие контур, в циркуляции вектора  $B$  учитываются алгебраически



## Ротор вектора в точке

$$\text{rot } \mathbf{E} = \left[ \nabla \times \mathbf{E} \right] = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \left[ \nabla \times \mathbf{B} \right] = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$(\text{rot} A)_x = d\text{Cir}_{A,x} / dS_{\Gamma_x} = \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z$$

$$(\text{rot} A)_y = d\text{Cir}_{A,y} / dS_{\Gamma_y} = \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x$$

$$(\text{rot} A)_z = d\text{Cir}_{A,z} / dS_{\Gamma_z} = \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y$$

**rot A** – вектор, компоненты которого равны пределам отношений циркуляций вектора  $A$  по дифференциально малым контурам  $\Gamma_{x,y,z}$  вблизи точки вычисления ротора, расположенным в плоскостях, перпендикулярных соответствующим координатным компонентам. Компоненты ротора вычисляются как разности производных от вектора  $A$ , подобно тому, как вычисляются компоненты векторного произведения.



## Ротор вектора и его компоненты

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x - \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left[ \nabla, \mathbf{A} \right] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Векторное поле называется **вихревым**, если ротор этого поля не равен нулю тождественно во всех точках.



**Замечание 1.** Магнитное поле является вихревым, поскольку его ротор  $\text{NE}$  равен нулю тождественно.

**Замечание 2.** *Любое* векторное вихревое поле (в частности – магнитное  $\mathbf{B}$ ) можно представить в виде ротора другой векторной функции:  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$

здесь вектор  $\mathbf{A}$  называют *векторным потенциалом* магнитного поля. Для магнитного поля, создаваемого точечным равномерно

движущимся зарядом  $\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi)q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]/r^3$

$$\mathbf{A} = (\mu_0/4\pi)q\mathbf{v}/r = \mu_0\varepsilon_0\varphi\mathbf{v} = \varphi\mathbf{v}/c^2$$

$$\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2 \text{ (!!!)}$$

*ДЗ: проверить формулу!*





## Основные законы электростатики и магнитостатики

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$(\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

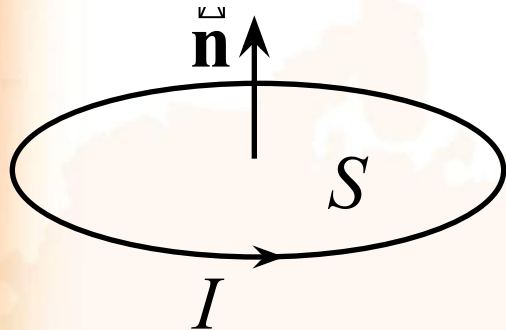
$$[\nabla \times \vec{\mathbf{E}}] = 0$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

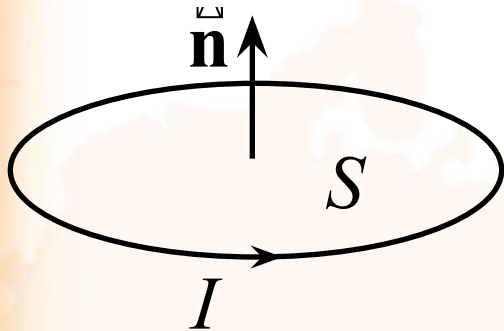
$$[\nabla \times \vec{\mathbf{B}}] = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$



**Точечный магнитный диполь**  
контур с током  $I$ , дифференциально малой площади  $S$ . Магнитный дипольный момент (определение):  $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$

Направление нормали  $\mathbf{n}$  и дипольного момента  $\mathbf{p}_m$  определяется Правилем Правого Винта.

## Магнитное поле точечного магнитного диполя

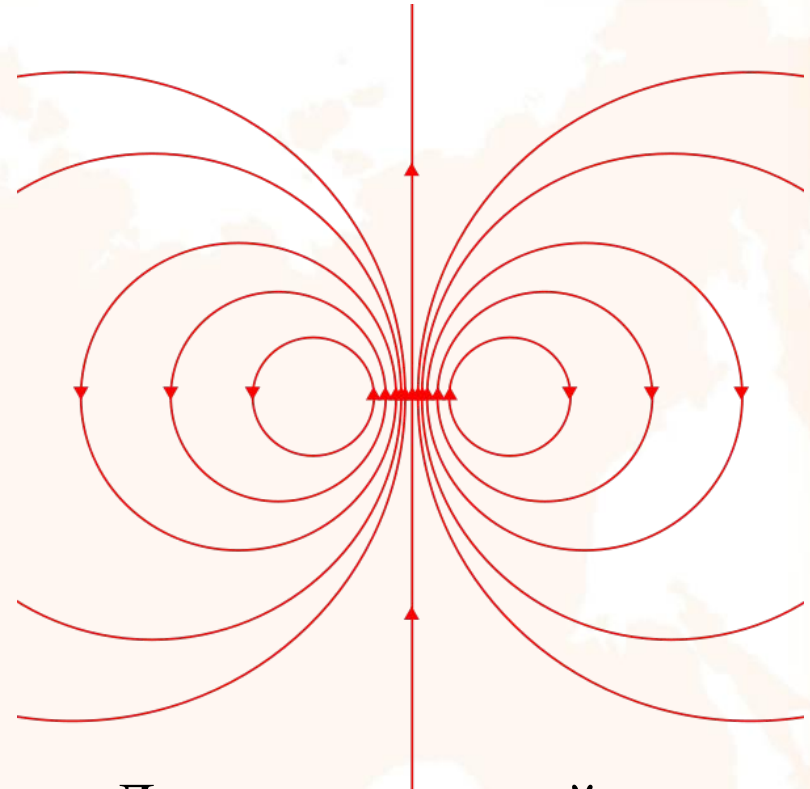


Магнитный дипольный момент

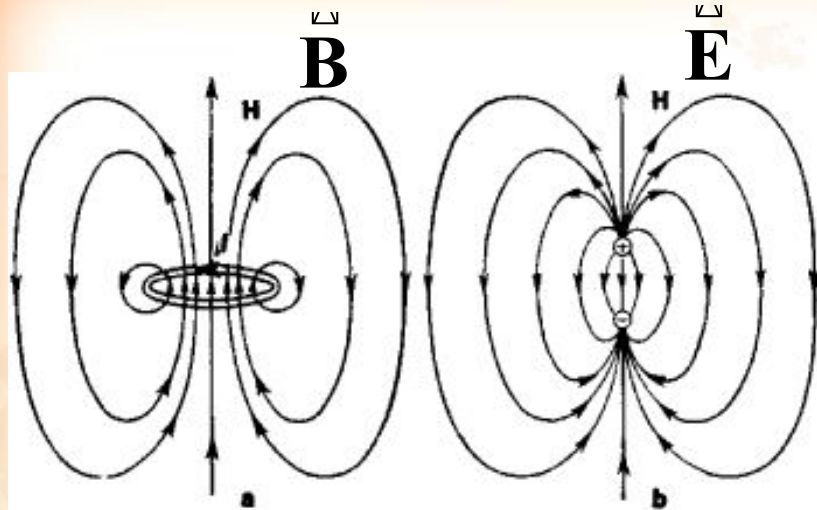
$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

$$r \gg R$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}_m \right\}$$



Линии магнитной индукции магнитного диполя

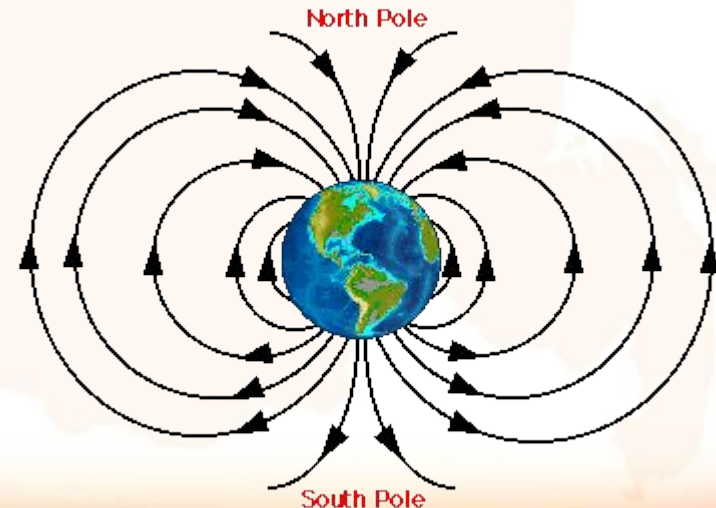


Аналогия между магнитным и электрическим диполями

Приблизительная картина магнитного поля Земли

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}_m \right\}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{d} \right\}$$





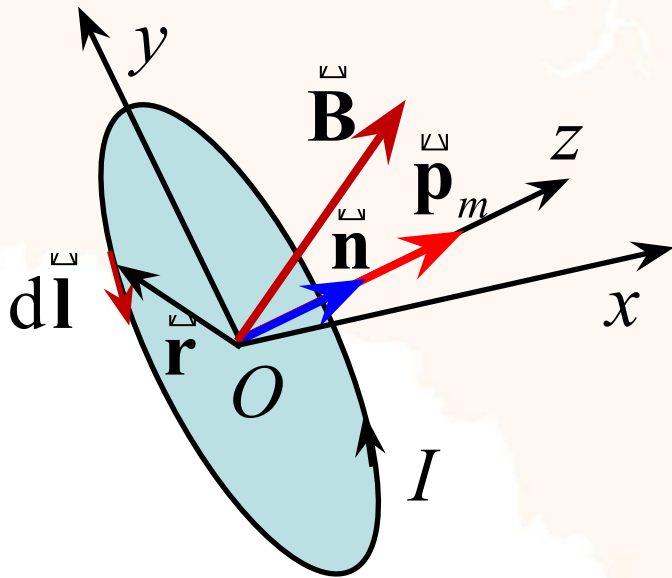


## Контур с током в однородном магнитном поле

### Сила действующая на диполь

$$\vec{\mathbf{B}} = \text{const}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = I \oint_{\Gamma} [d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}] = I \left[ \oint_{\Gamma} d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}} \right] = 0$$



Силы, действующие на элементы контура расположенные диаметрально напротив, попарно компенсируют друг-друга.

Суммарная сила

$$\vec{\mathbf{F}} = 0$$

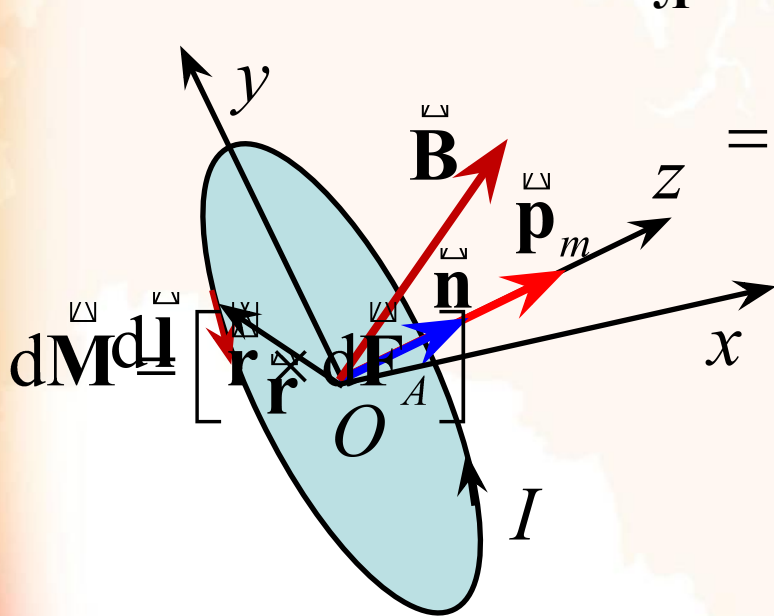


## Контур с током в однородном магнитном поле

Моменты сил, действующих на элементы контура

$$\vec{B} = \text{const}$$

$$d\vec{F}_L = I[d\vec{l}, \vec{B}] \quad d\vec{M} = \left[ \vec{r} \times d\vec{F}_A \right]$$



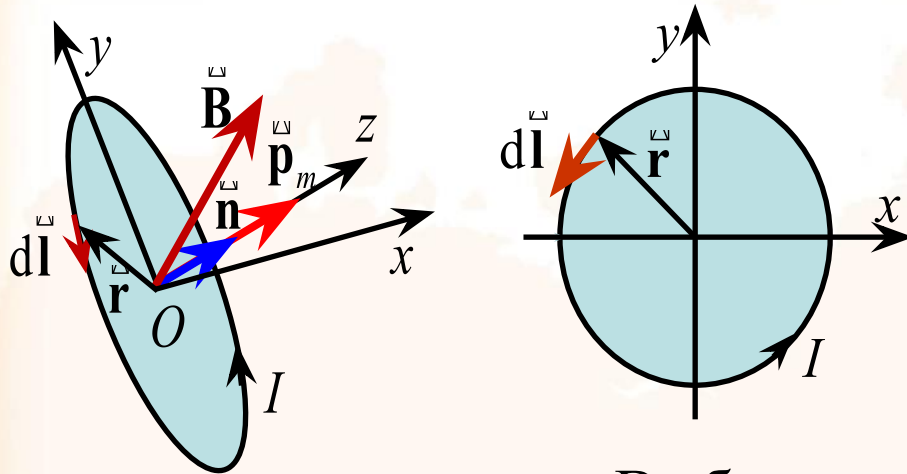
$$= I \left[ \vec{r} \times \left[ d\vec{l} \times \vec{B} \right] \right]$$

$$= I \left\{ d\vec{l} \left( \vec{r} \cdot \vec{B} \right) - \vec{B} \left( \vec{r} \cdot d\vec{l} \right) \right\}$$

$$\left( \vec{r} \cdot d\vec{l} \right) = 0 \Rightarrow d\vec{M} = I d\vec{l} \left( \vec{r} \cdot \vec{B} \right)$$



## Суммарный момент сил, действующих на диполь



$$d\mathbf{M} = I d\mathbf{l}(\mathbf{r}, \mathbf{B})$$

Продольная нормали компонента  $B_z$  не создает момента. Ее можно убрать из рассмотрения.

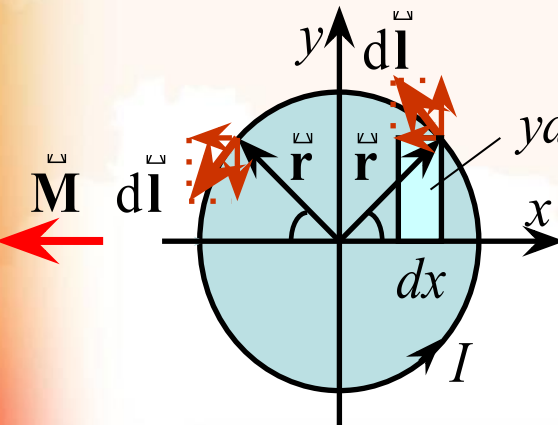
Выберем оси XY так:  $\mathbf{B} = \{0, B, 0\} \Rightarrow$

$$dM_x = IB y dx, \quad dM_y = IB y dy$$

Интегрируя по циклу, находим:

$$M_x = IB \int y dx = IB \int dS = IB S = p_{mz} B_y,$$

$$M_y = IB \int y dy = 0 \text{ в симметричных пределах}$$



С учетом направления момент силы Ампера

$$\mathbf{M} = \left[ \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} \right]$$

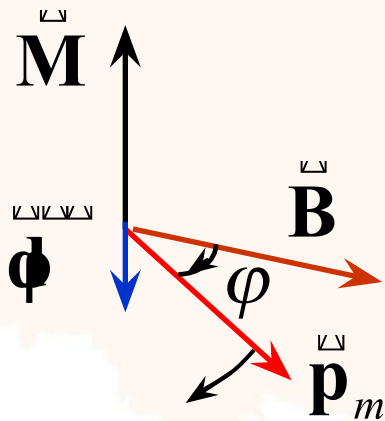


## Механическая энергия магнитного диполя

$$dw = dA = Md\varphi = p_m B \sin \varphi d\varphi$$

$$w = \int p_m B \sin \varphi d\varphi = -p_m B \cos \varphi + C$$

$$w = -p_m B \cos \varphi = -(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B})$$



Момент силы Ампера поворачивает рамку с током так, чтобы ее нормаль совпала по направлению с  $\mathbf{B}$ . Это самое энергетически выгодное состояние – с минимальной потенциальной энергией.

Полная аналогия с электрическим диполем:  $w = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$





## Контур с током в неоднородном магнитном поле

### Сила действующая на диполь

$$\vec{\mathbf{F}} = (\vec{\mathbf{p}}_m \cdot \nabla) \vec{\mathbf{B}} = p_{mx} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial z}$$

Формулы для момента силы и энергии магнитного диполя одинаковы для однородного и неоднородного полей.

Как правило свободный магнитный диполь втягивается в область более сильного магнитного поля.

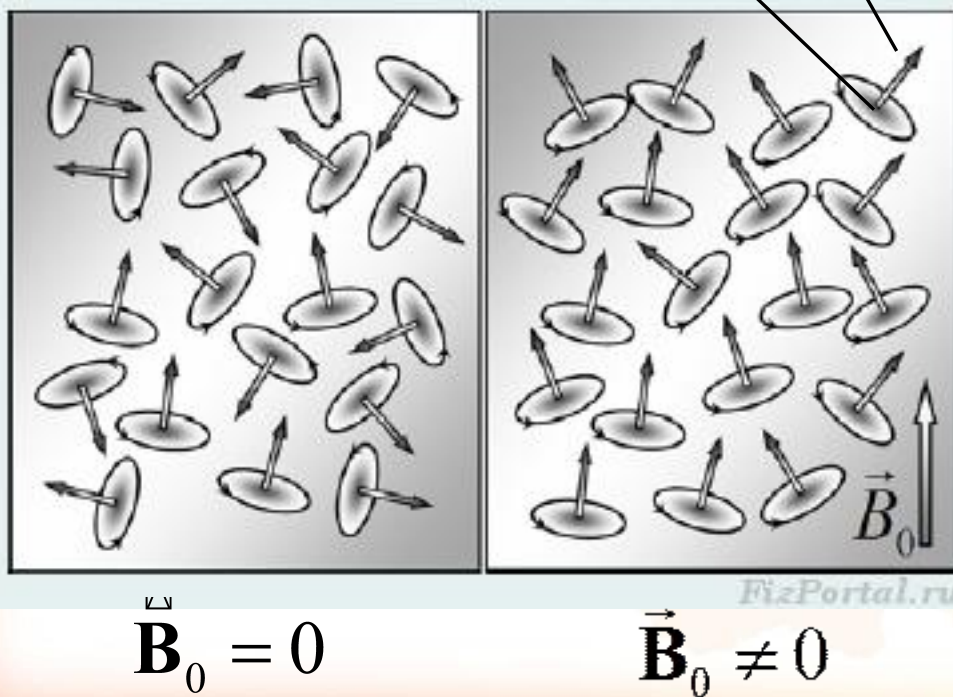


**Спасибо за внимание!**

**Следующая лекция  
17 ноября**



Модель молекул парамагнетика

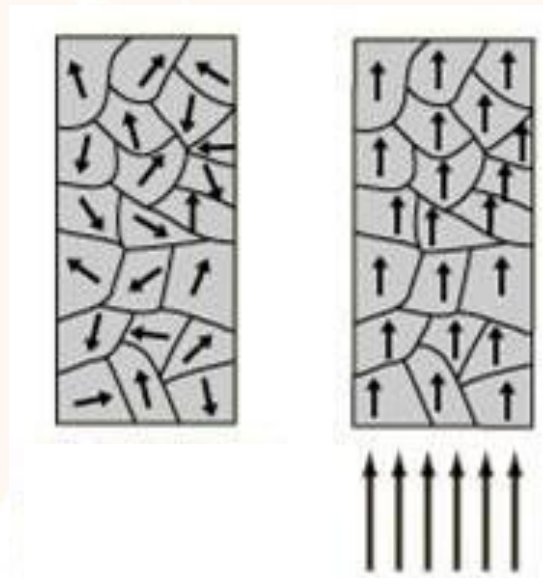


Что поле  $\vec{B}$  может делать с атомами среды, если каждый – практически точечный магнитный диполь (или сумма нескольких совмещенных диполей)?

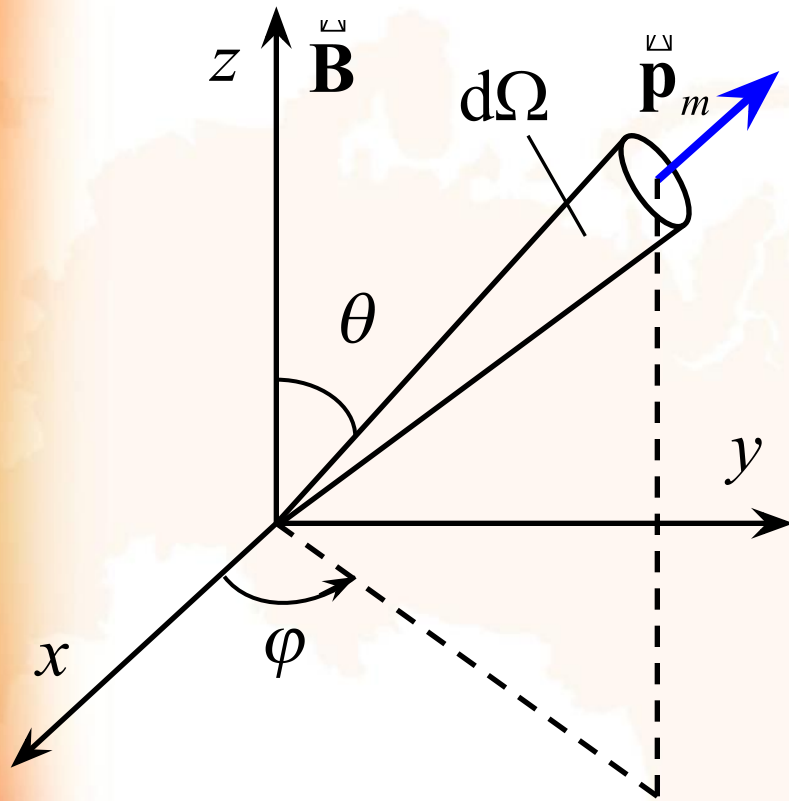
1. Может пытаться повернуть моменты в свою сторону. Поле при этом усилится!  
Тепловое движение препятствует этому усилению.

Групповое взаимодействие атомов в некоторых веществах (ферромагнетики с доменной структурой) может значительно усилить эффект со-ориентации магнитных моментов.

$$w = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$
$$\vec{p}_m \parallel \vec{B} \Rightarrow$$
$$w = -|\vec{p}_m| |\vec{B}| = \min$$







2. Поле может заставить электроны в атомах прецессировать подобно «раскрученным волчкам» вокруг направления вектора  $\mathbf{B}$ . При этом поле прецессирующих волчков будет направлено против внешнего, которое ослабнет)

Этому эффекту больше подвержены атомы, собственные моменты которых скомпенсированы ( $= 0$ ):



# Магнетики



Магнетики: вещества, способные в той или иной степени намагничиваться во внешнем магнитном поле и менять величину этого поля. .

$$\text{Поле в магнетике: } \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}'$$

$\vec{\mathbf{B}}_0$  - внешнее магнитное поле,  $\vec{\mathbf{B}}'$  - поле вещества

$$\text{В изотропном магнетике: } \mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0 ; \mathbf{B}' = \chi \mathbf{B}_0$$

$\chi$  - магнитная восприимчивость

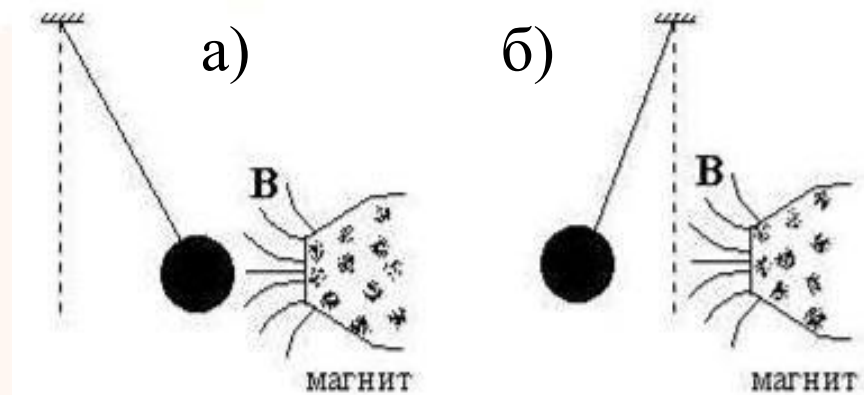
$\mu = 1 + \chi$  - магнитная проницаемость

Магнитное поле в магнетиках может быть как слабее, так и сильнее, чем оно было-бы в вакууме. Соответственно, значения  $\mu$  могут быть как больше, так и меньше единицы.

**Парамагнетики** – вещества, приобретающие магнитный момент сонаправленный с внешним магнитным полем и усиливающий его  
 $\mu_{\text{пара}} > 1$  ( $\sim 1,000xxx$ );  $\chi_{\text{пара}} \ll 1$  ( $\sim 10^{-4}$ )

**Диамагнетики** – вещества, приобретающие в поле магнитный момент, направленный против внешнего магнитного поля

$\mu_{\text{диа}} < 1$  ( $\sim 0,999xxx$ )  
 $\chi_{\text{диа}} < 0$ ;  $|\chi_{\text{диа}}| \ll 1$  ( $\sim 10^{-4}$ )



- а). Шарик из парамагнетика;  
б). шарик из диамагнетика.



# Классификация магнетиков



**Ферромагнетики)** – вещества с доменной структурой, приобретающие магнитный момент , сонаправленный с внешним магнитным полем и значительно усиливающий его

$$\mu_{\text{ферро}} \gg 1 \quad (\sim 10^3)$$



1 H 2 He

3 Ферромагнетик 4 Антиферромагнетик

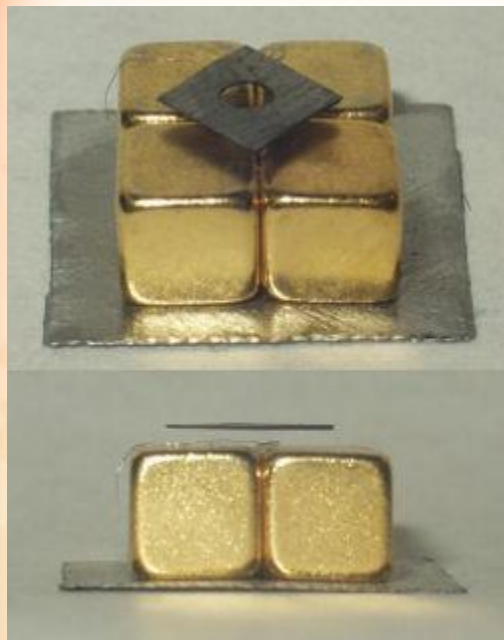
5 Парамагнетик 6 Диамагнетик

3	4											5	6	7	8	9	10	
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne	
11	12											13	14	15	16	17	18	
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar	
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr	
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe	
55	56	57		72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	La		Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
87	88	89																
Fr	Ra	Ac																

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu

Периодическая таблица элементов, показывающая различные типы намагничивания при комнатной температуре.



Левитация живой лягушки в поле 16Тл  
(Андрей Гейм и Майкл Берри –  
«Шнобелевская» премия (IgNoble Prize) 2000 г.)

Левитация  
пиролитического  
углерода



## Магнитное поле в среде



Для описания магнитного поля в средах (в магнетиках) используют не только м вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , измеряемой в Тл (Тесла), но также и вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Измеряемый в А/м

В вакууме  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$  – магнитная постоянная

В изотропной среде  $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$ .

Аналогия с электрическим полем:

в вакууме  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ . в изотропной среде  $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$ .



**Спасибо за внимание!**

**Следующая лекция  
17 ноября**





# Магнетики



Магнетики - вещества, способные в той или иной степени намагничиваться во внешнем магнитном поле. Различаются величинами магнитной проницаемости  $\mu$  и магнитной восприимчивости  $\chi = \mu - 1$

Диамагнетики:  $\chi < 0$ .  $\mu < \sim 1$

Парамагнетики:  $\chi > 0$ .  $\mu > \sim 1$

Ферромагнетики:  $\chi > 0$ .  $\mu \gg 1$



Эксперимент П. Кюри:

$$\chi_{\text{пара}} = \frac{C}{T}$$

Закон Кюри – Вейса для жидких и твёрдых тел:

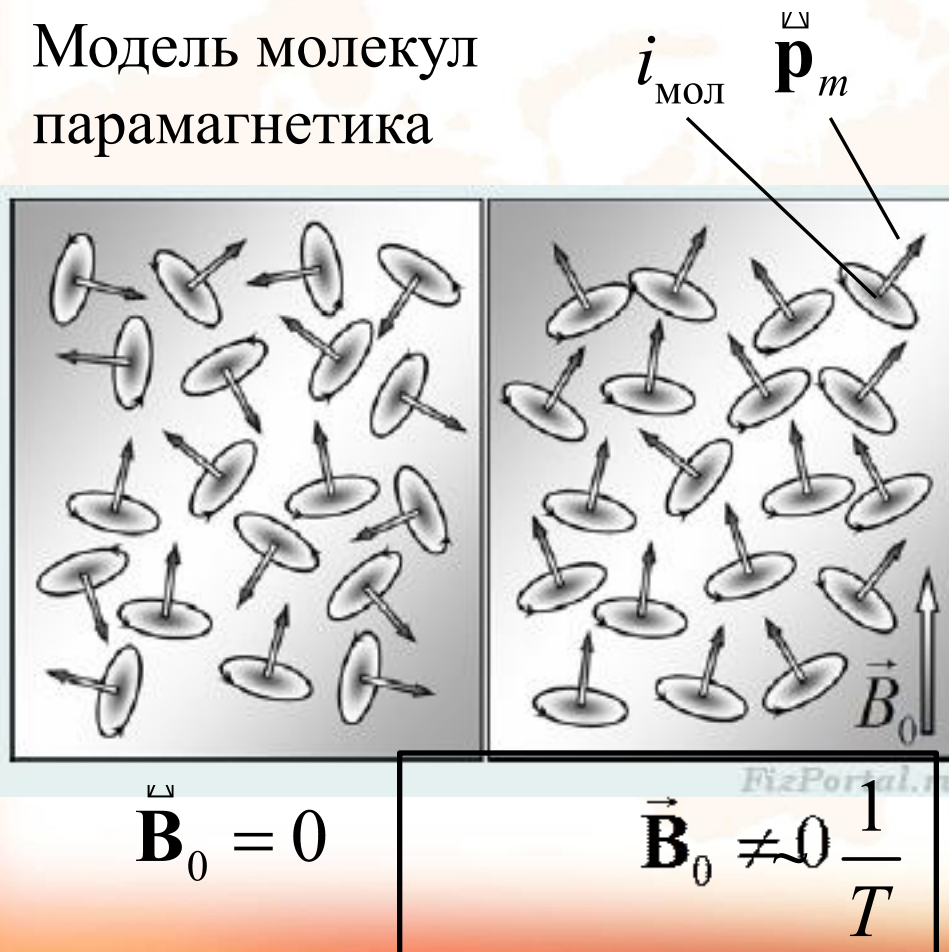
$$\chi_{\text{пара}} = \frac{C}{T - T_0}$$

Для жидких и твёрдых тел:  $\chi \sim 10^{-4}$

1. Магнитная восприимчивость парамагнетиков зависит от температуры
2. Парамагнетиками являются вещества, у которых собственный магнитный момент атомов не равен нулю.



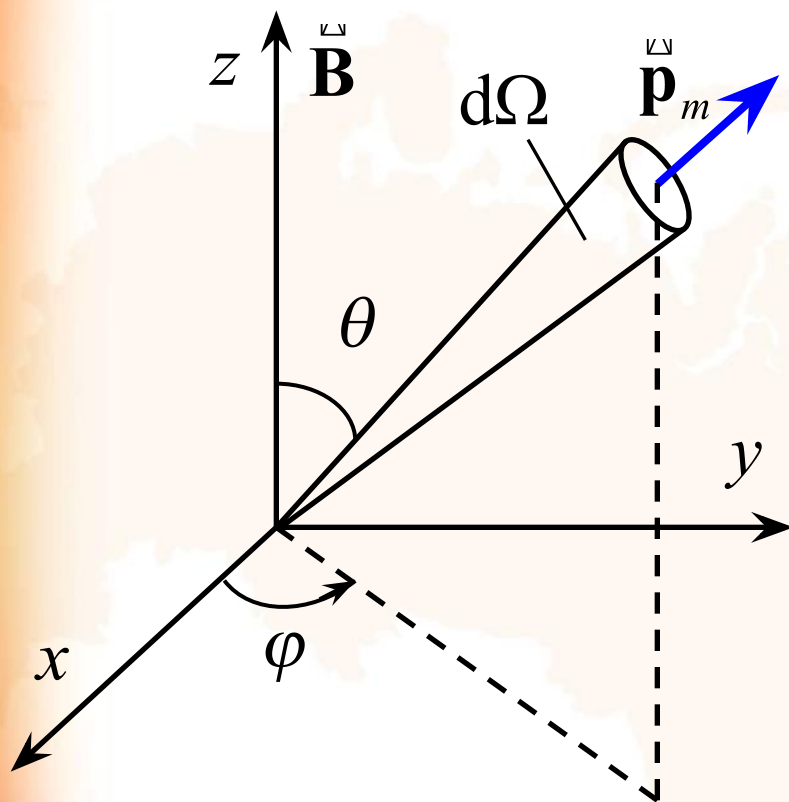
Модель молекул парамагнетика



При термодинамическом равновесии относительная доля молекул, магнитные моменты которых ориентированы в пределах угла  $\theta$ , определяется распределением Больцмана:

$$dn = A \exp\left(-\frac{w}{kT}\right) d\Omega$$

$$\Rightarrow J = \chi H \quad \chi = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT}$$



Молекулы подобно «раскрученным волчкам» или гироскопам прецессируют под действием моментов сил вокруг направления вектора  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbb{J} = \chi \mathbb{H}$$

$$\chi = -\frac{\mu_0 n e^2}{6m_e} \sum_{i=1}^Z \langle R_i^2 \rangle$$

1. Магнитная восприимчивость диамагнетиков не зависит от температуры (П. Кюри, 1895).
2. Диамагнетиками - вещества, у которых собственный магнитный момент атомов равен нулю.





## Природа ферромагнетизма

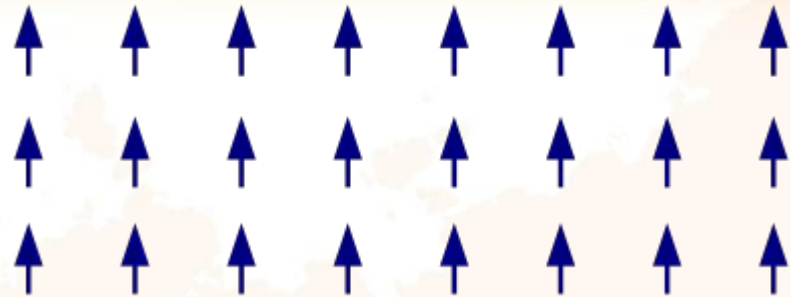
Намагничивание ферромагнитных материалов (железо никель и т.п.) возникает благодаря взаимодействию магнитных моментов электронов одной из внутренних оболочек атомов.

В результате такого взаимодействия спины и магнитные моменты этих электронов ориентируются параллельно.

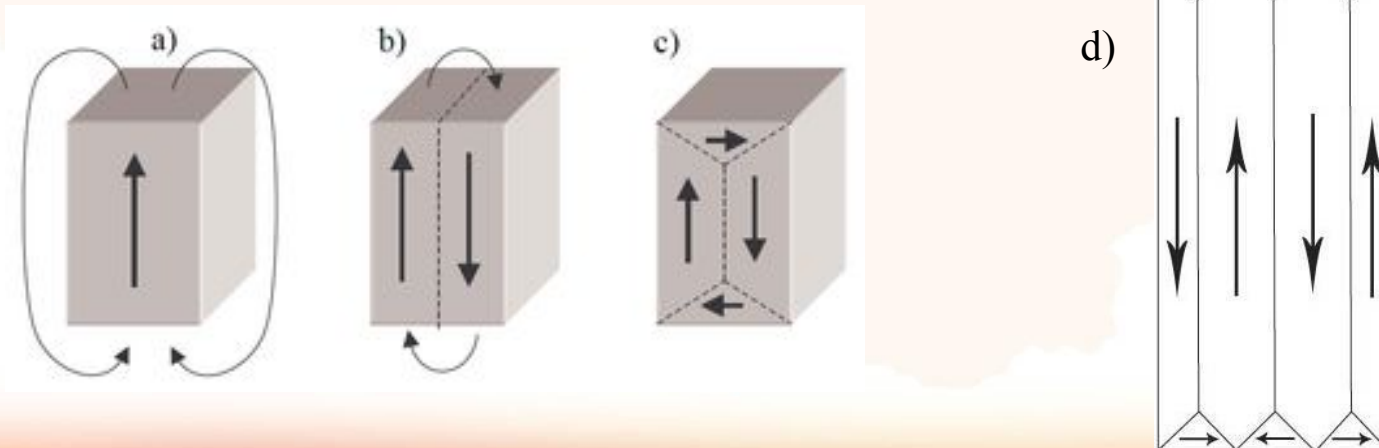
Эффект обусловлен так называемым обменным взаимодействием (неэлектростатической природы).

Для ферромагнетиков →

$$W_{\uparrow\uparrow\dots\uparrow\uparrow} < W_{\uparrow\downarrow\dots\uparrow\downarrow}$$



Домены – области, имеющие только одно направление намагниченности. Размер домена 1 – 10 мкм.

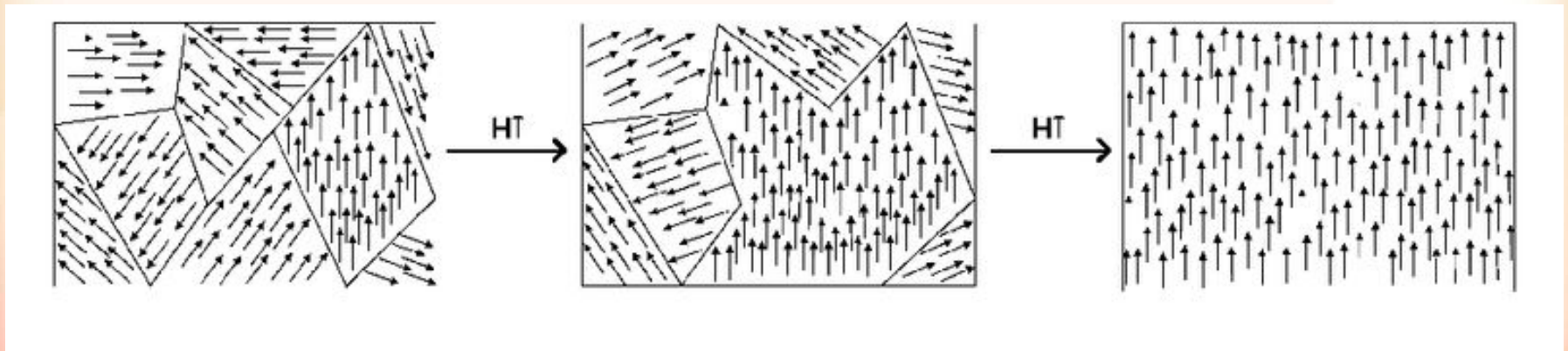
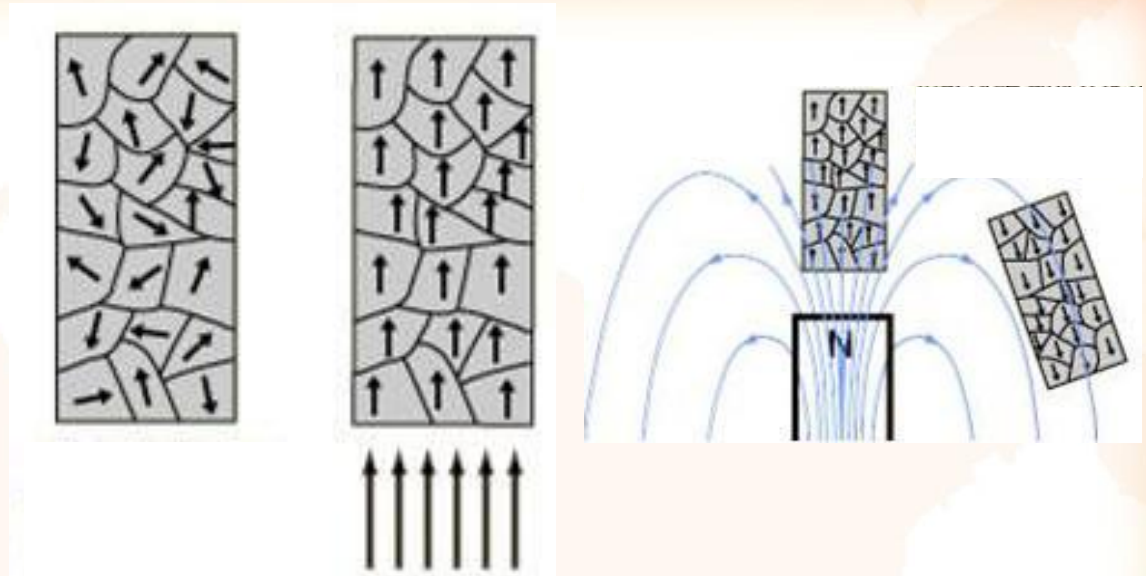


## Намагничивание ферромагнетика

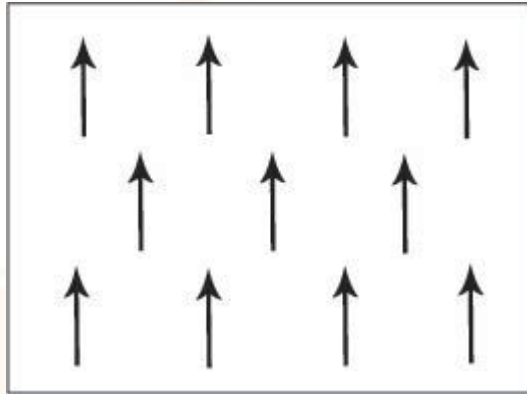
$$w = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$$\vec{p}_m \parallel \vec{B} \Rightarrow$$

$$w = -|\vec{p}_m| |\vec{B}| = \min$$



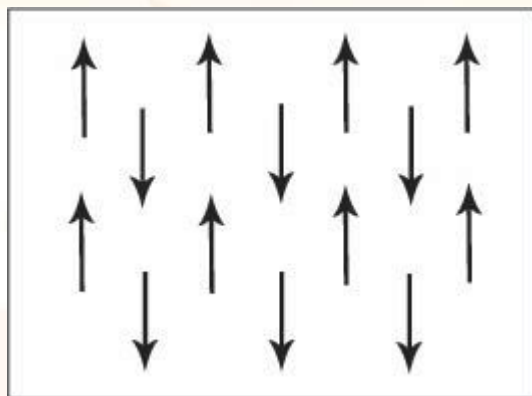




## Ферромагнетизм

Магнитные моменты в ферромагнетиках имеют тенденцию становиться параллельными друг другу под действием приложенного магнитного поля. Однако в отличие от парамагнетиков эти магнитные моменты остаются параллельными после выключения магнитного поля.





## Антиферромагнетизм

Магнитные моменты соседних «магнитных» ионов имеют тенденцию выстроиться антипараллельно по отношению к друг другу в отсутствие приложенного магнитного поля. В простейшем случае соседние магнитные моменты имеют одинаковые по модулю значения, поэтому в среднем намагничивание отсутствует.



1 H 2 He

3 Ферромагнетик 4 Антиферромагнетик

5 Парамагнетик 6 Диамагнетик

3	4											5	6	7	8	9	10	
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne	
11	12											13	14	15	16	17	18	
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar	
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr	
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe	
55	56	57		72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	La		Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
87	88	89																
Fr	Ra	Ac																

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu

Периодическая таблица элементов, показывающая различные типы намагничивания при комнатной температуре.



**Спасибо за внимание!**

**Следующая лекция  
17 ноября**