



Электричество и магнетизм

Лекция 11

Магнитный диполь. Магнетики

10 ноября 2021 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,
Ольчак Андрей Станиславович



Основные законы для векторных полей, не меняющихся со временем (постоянные поля)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = 0$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

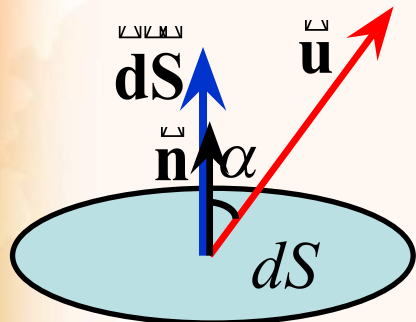
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

$$[\nabla \times \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}$$

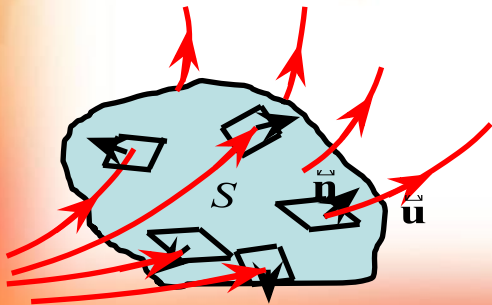
Поток вектора через замкнутую поверхность

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



$$d\Phi = u dS \cos \alpha$$



Если площадка dS дифференциально мала («точечная»), то *элементарный поток* вектора \mathbf{u} через нее $d\Phi = (\mathbf{u}, d\mathbf{S})$. Вектор $d\mathbf{S}$ считаем направленным по нормали к площадке. Поток вектора Φ через большую поверхность S вычисляется как сумма (интеграл) элементарных потоков $\Delta\Phi$ через все микроскопические площадки dS , составляющие большую. Нормали для замкнутой поверхности считаются направленными изнутри наружу. Поток пропорционален числу силовых линий поля, пронизывающих площадку (с учетом их направления).



Дивергенция вектора в данной точке

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = d\Phi/dV = (\sum q_i / \varepsilon_0) dV = \rho / \varepsilon_0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = d\Phi_A/dV = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z$$

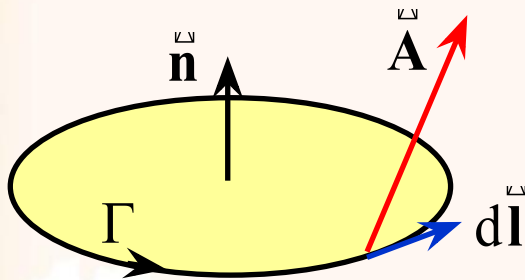
Дивергенция вектора в данной точке

- (1) = предел отношения потока вектора через дифференциально малую поверхность вблизи этой точки к объёму, заключенному внутри этой малой поверхности;
- (2) = сумма производных компонент вектора \mathbf{A} по соответствующим координатам.

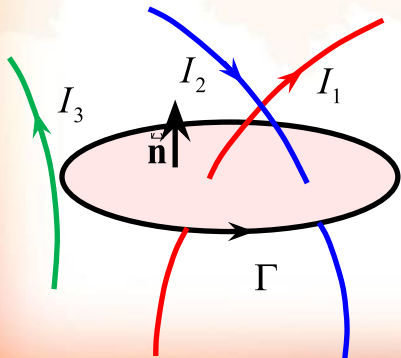
Циркуляция вектора по замкнутому контуру

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$



Циркуляция вектора A по замкнутому контуру Γ = сумма скалярных произведений дифференциально малых векторов $d\vec{l}$, на которые разбивается контур Γ , и векторов A , взятых в точках размещения перемножаемых с ними отрезков $d\vec{l}$



Токи, пронизывающие контур, в циркуляции вектора B учитываются алгебраически



Ротор вектора в точке

$$\text{rot } \mathbf{E} = \left[\nabla \times \mathbf{E} \right] = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \left[\nabla \times \mathbf{B} \right] = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$(\text{rot} A)_x = d\text{Cir}_{A,x} / dS_{\Gamma_x} = \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z$$

$$(\text{rot} A)_y = d\text{Cir}_{A,y} / dS_{\Gamma_y} = \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x$$

$$(\text{rot} A)_z = d\text{Cir}_{A,z} / dS_{\Gamma_z} = \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y$$

rot A – вектор, компоненты которого равны пределам отношений циркуляций вектора A по дифференциально малым контурам $\Gamma_{x,y,z}$ вблизи точки вычисления ротора, расположенным в плоскостях, перпендикулярных соответствующим координатным компонентам. Компоненты ротора вычисляются как разности производных от вектора A , подобно тому, как вычисляются компоненты векторного произведения.



Ротор вектора и его компоненты

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left[\nabla, \mathbf{A} \right] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Векторное поле называется **вихревым**, если ротор этого поля не равен нулю тождественно во всех точках.



Замечание 1. Магнитное поле является вихревым, поскольку его ротор NE равен нулю тождественно.

Замечание 2. *Любое* векторное вихревое поле (в частности – магнитное \mathbf{B}) можно представить в виде ротора другой векторной функции: $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$

здесь вектор \mathbf{A} называют *векторным потенциалом* магнитного поля. Для магнитного поля, создаваемого точечным равномерно

движущимся зарядом $\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi)q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]/r^3$

$$\mathbf{A} = (\mu_0/4\pi)q\mathbf{v}/r = \mu_0\varepsilon_0\varphi\mathbf{v} = \varphi\mathbf{v}/c^2$$

$$\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2 \quad (!!!)$$

ДЗ: проверить формулу!



Основные законы электростатики и магнитостатики

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$(\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

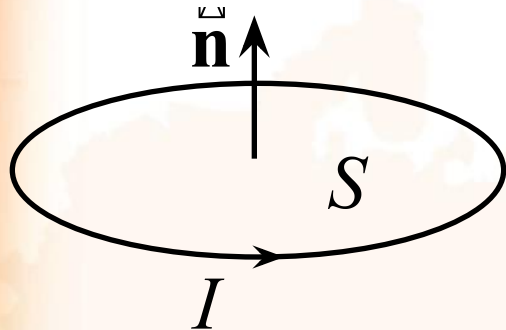
$$[\nabla \times \vec{\mathbf{E}}] = 0$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

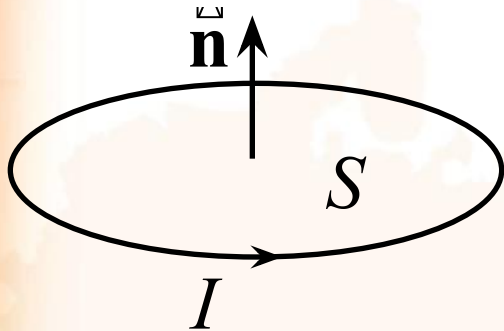
$$[\nabla \times \vec{\mathbf{B}}] = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$



Точечный магнитный диполь
контур с током I , дифференциально малой площади S . Магнитный дипольный момент (определение): $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$

Направление нормали \mathbf{n} и дипольного момента \mathbf{p}_m определяется Правилем Правого Винта.

Магнитное поле точечного магнитного диполя

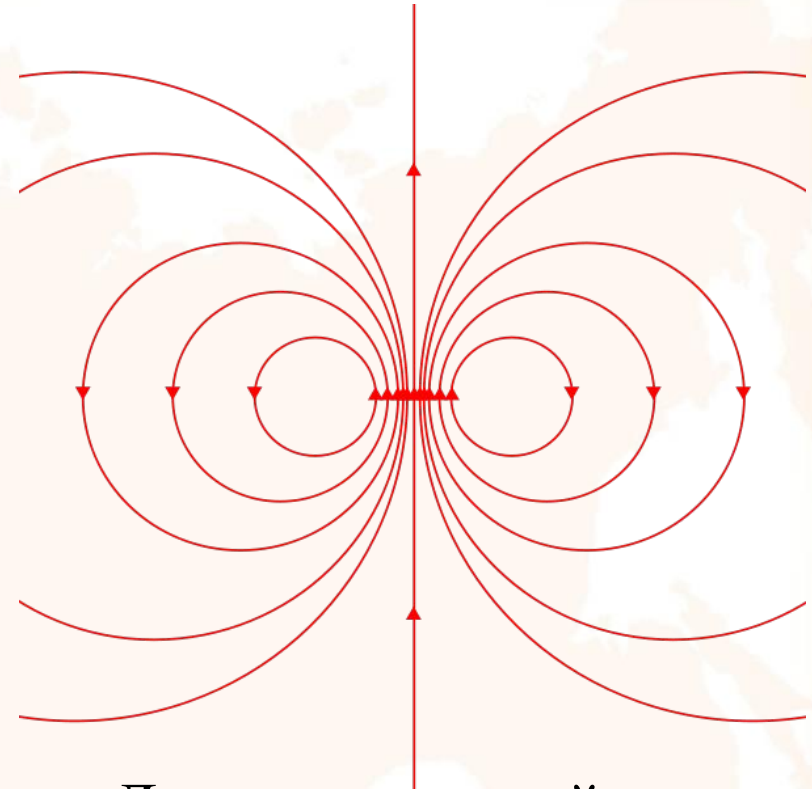


Магнитный дипольный момент

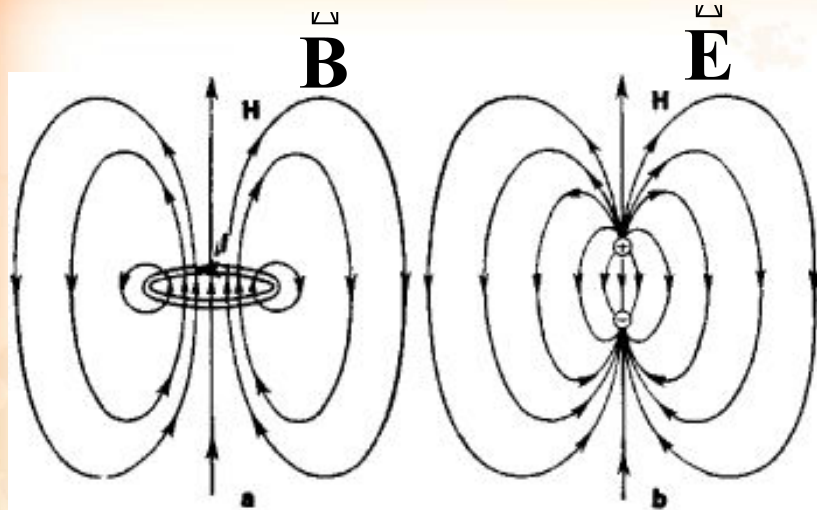
$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

$$r \gg R$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}_m \right\}$$



Линии магнитной индукции магнитного диполя

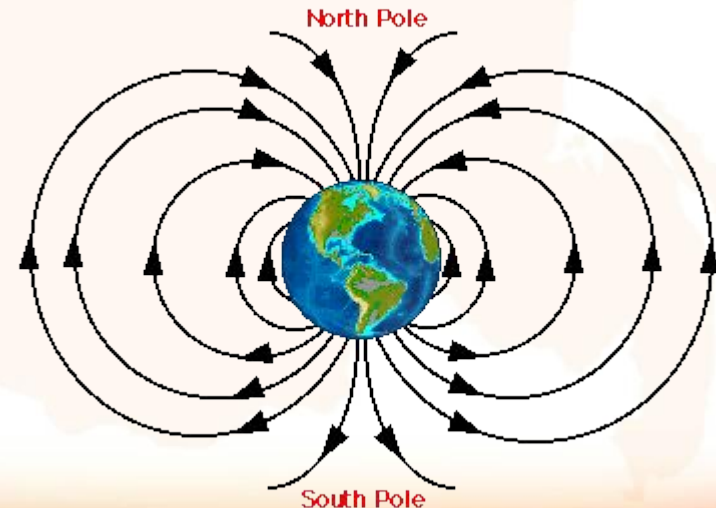


Аналогия между магнитным и электрическим диполями

Приблизительная картина магнитного поля Земли

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}_m \right\}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{d} \right\}$$

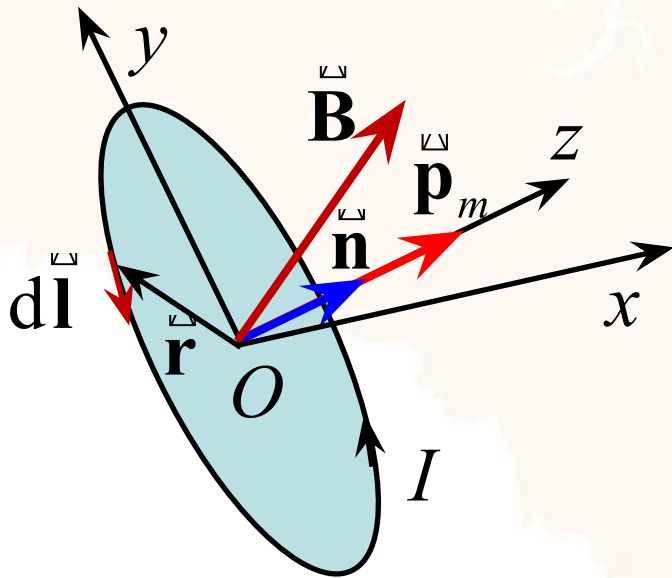




Контур с током в однородном магнитном поле

Сила действующая на диполь

$$\vec{\mathbf{B}} = \text{const} \quad \vec{\mathbf{F}} = I \oint_{\Gamma} [d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}] = I \left[\oint_{\Gamma} d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}} \right] = 0$$



Силы, действующие на элементы контура расположенные диаметрально напротив, попарно компенсируют друг-друга.

Суммарная сила

$$\vec{\mathbf{F}} = 0$$

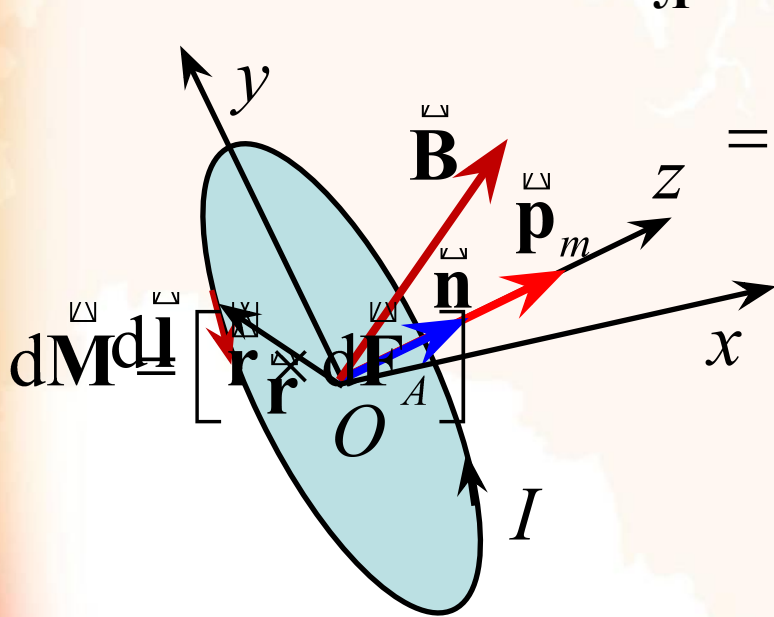


Контур с током в однородном магнитном поле

Моменты сил, действующих на элементы контура

$$\vec{B} = \text{const}$$

$$d\vec{F}_L = I[d\vec{l}, \vec{B}] \quad d\vec{M} = [\vec{r} \times d\vec{F}_A]$$



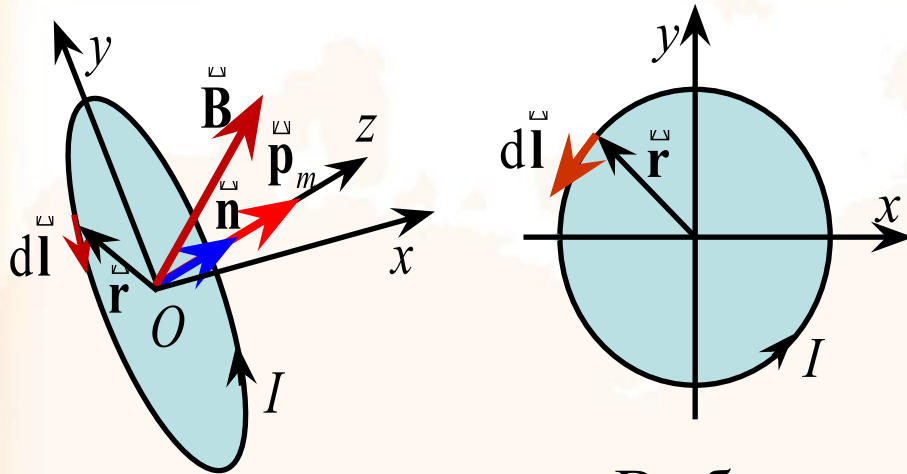
$$= I \left[\vec{r} \times [d\vec{l} \times \vec{B}] \right]$$

$$= I \left\{ d\vec{l} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{l}) \right\}$$

$$(\vec{r} \cdot d\vec{l}) = 0 \Rightarrow d\vec{M} = I d\vec{l} (\vec{r} \cdot \vec{B})$$



Суммарный момент сил, действующих на диполь



$$dM = Idl(r, B)$$

Продольная нормали компонента B_z не создает момента. Ее можно убрать из рассмотрения.

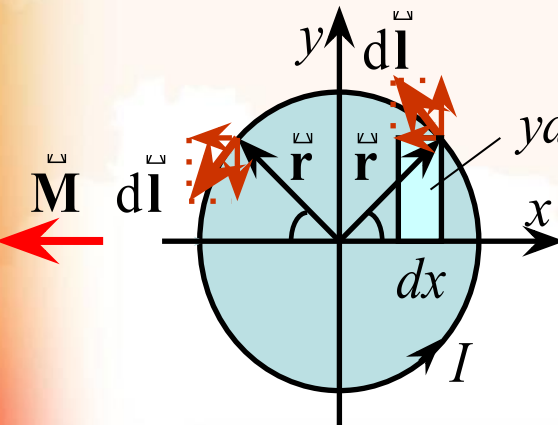
Выберем оси XY так: $B = \{0, B, 0\} \Rightarrow$

$$dM_x = IBydx, \quad dM_y = IBydy$$

Интегрируя по циклу, находим:

$$M_x = IB \int ydx = IB \int dS = IB S = p_{mz} B_y,$$

$$M_y = IB \int ydy = 0 \text{ в симметричных пределах}$$



С учетом направления момент силы Ампера

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B} \right]$$

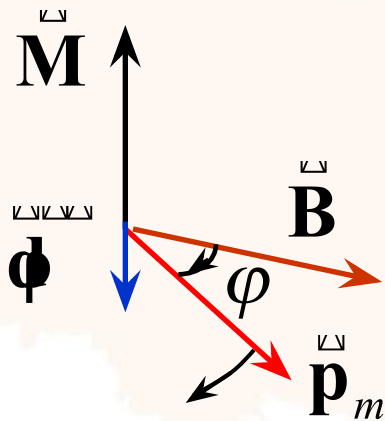


Механическая энергия магнитного диполя

$$dw = dA = Md\varphi = p_m B \sin \varphi d\varphi$$

$$w = \int p_m B \sin \varphi d\varphi = -p_m B \cos \varphi + C$$

$$w = -p_m B \cos \varphi = -(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B})$$



Момент силы Ампера поворачивает рамку с током так, чтобы ее нормаль совпала по направлению с \mathbf{B} . Это самое энергетически выгодное состояние – с минимальной потенциальной энергией.

Полная аналогия с электрическим диполем: $w = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$



Контур с током в неоднородном магнитном поле

Сила действующая на диполь

$$\vec{\mathbf{F}} = (\vec{\mathbf{p}}_m \cdot \nabla) \vec{\mathbf{B}} = p_{mx} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial z}$$

Формулы для момента силы и энергии магнитного диполя одинаковы для однородного и неоднородного полей.

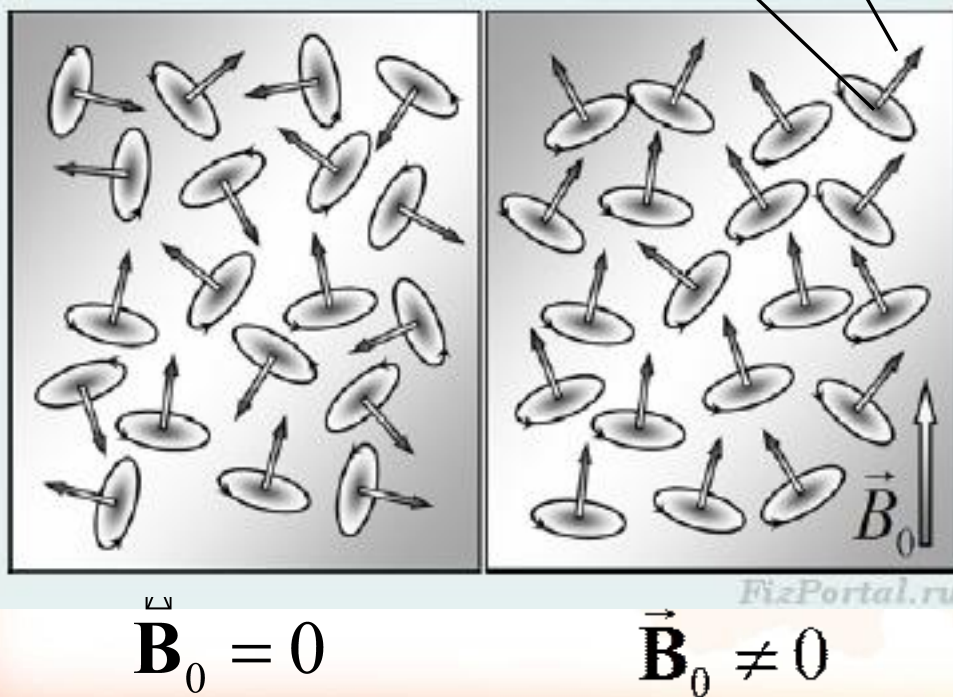
Как правило свободный магнитный диполь втягивается в область более сильного магнитного поля.



Спасибо за внимание!

**Следующая лекция
17 ноября**

Модель молекул парамагнетика



Что поле \vec{B} может делать с атомами среды, если каждый – практически точечный магнитный диполь (или сумма нескольких совмещенных диполей)?

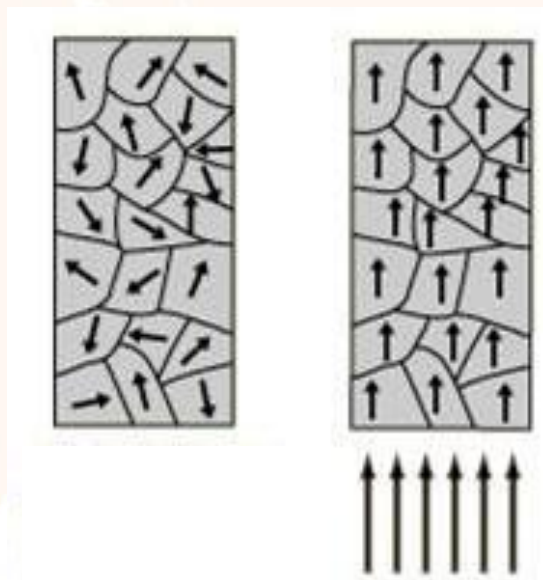
1. Может пытаться повернуть моменты в свою сторону. Поле при этом усилится!
Тепловое движение препятствует этому усилению.

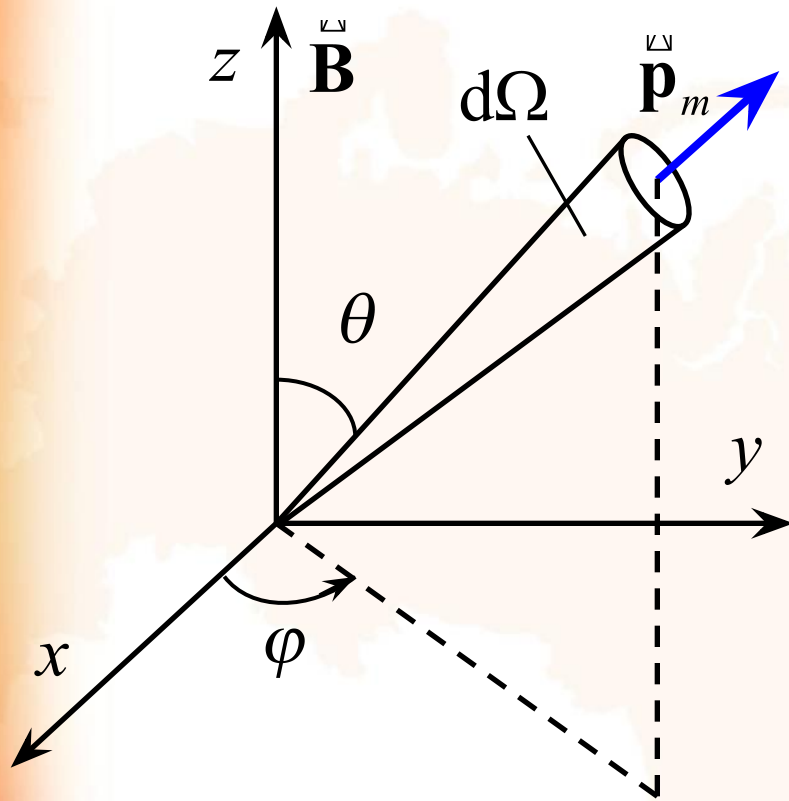
Групповое взаимодействие атомов в некоторых веществах (ферромагнетики с доменной структурой) может значительно усилить эффект со-ориентации магнитных моментов.

$$w = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$$\vec{p}_m \parallel \vec{B} \Rightarrow$$

$$w = -|\vec{p}_m| |\vec{B}| = \min$$





2. Поле может заставить электроны в атомах прецессировать подобно «раскрученным волчкам» вокруг направления вектора \mathbf{B} . При этом поле прецессирующих волчков будет направлено против внешнего, которое ослабнет)

Этому эффекту больше подвержены атомы, собственные моменты которых скомпенсированы ($= 0$):



Магнетики



Магнетики: вещества, способные в той или иной степени намагничиваться во внешнем магнитном поле и менять величину этого поля. .

$$\text{Поле в магнетике: } \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}'$$

$\vec{\mathbf{B}}_0$ - внешнее магнитное поле, \mathbf{B}' - поле вещества

$$\text{В изотропном магнетике: } \mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0 ; \mathbf{B}' = \chi \mathbf{B}_0$$

χ - магнитная восприимчивость

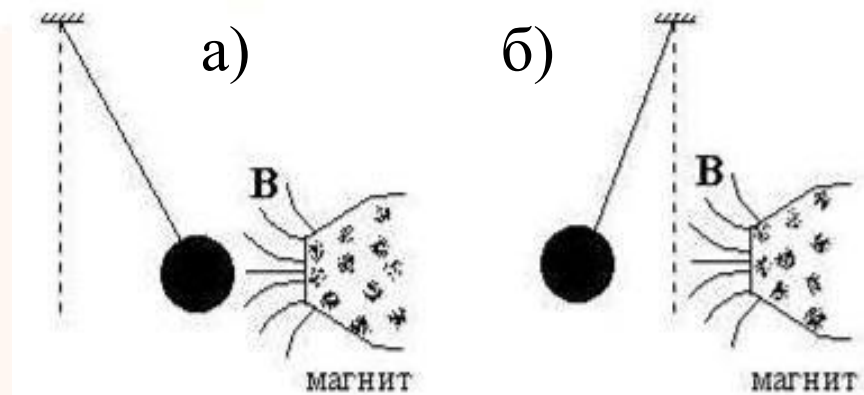
$\mu = 1 + \chi$ - магнитная проницаемость

Магнитное поле в магнетиках может быть как слабее, так и сильнее, чем оно было-бы в вакууме. Соответственно, значения μ могут быть как больше, так и меньше единицы.

Парамагнетики – вещества, приобретающие магнитный момент сонаправленный с внешним магнитным полем и усиливающий его
 $\mu_{\text{пара}} > 1$ ($\sim 1,000xxx$); $\chi_{\text{пара}} \ll 1$ ($\sim 10^{-4}$)

Диамагнетики – вещества, приобретающие в поле магнитный момент, направленный против внешнего магнитного поля

$\mu_{\text{диа}} < 1$ ($\sim 0,999xxx$)
 $\chi_{\text{диа}} < 0$; $|\chi_{\text{диа}}| \ll 1$ ($\sim 10^{-4}$)



- а). Шарик из парамагнетика;
б). шарик из диамагнетика.



Классификация магнетиков



Ферромагнетики) – вещества с доменной структурой, приобретающие магнитный момент , сонаправленный с внешним магнитным полем и значительно усиливающий его

$$\mu_{\text{ферро}} \gg 1 \quad (\sim 10^3)$$

1 H 2 He

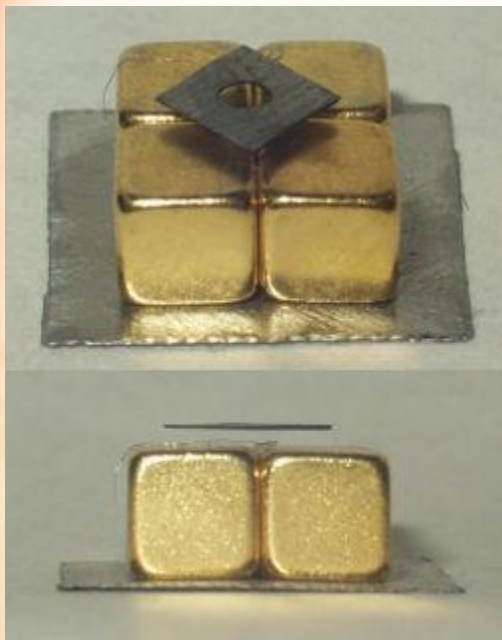
3 Ферромагнетик 4 Антиферромагнетик

5 Парамагнетик 6 Диамагнетик

3	4											5	6	7	8	9	10	
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne	
11	12											13	14	15	16	17	18	
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar	
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr	
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe	
55	56	57		72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	La		Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
87	88	89																
Fr	Ra	Ac																

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu

Периодическая таблица элементов, показывающая различные типы намагничивания при комнатной температуре.



Левитация живой лягушки в поле 16Тл
(Андрей Гейм и Майкл Берри –
«Шнобелевская» премия (IgNoble Prize) 2000 г.)

Левитация
пиролитического
углерода



Магнитное поле в среде



Для описания магнитного поля в средах (в магнетиках) используют не только м вектор магнитной индукции \mathbf{B} , измеряемой в Тл (Тесла), но также и вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} . Измеряемый в А/м

В вакууме $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ – магнитная постоянная

В изотропной среде $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$.

Аналогия с электрическим полем:

в вакууме $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. в изотропной среде $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$.



Спасибо за внимание!

**Следующая лекция
17 ноября**



Магнетики



Магнетики - вещества, способные в той или иной степени намагничиваться во внешнем магнитном поле. Различаются величинами магнитной проницаемости μ и магнитной восприимчивости $\chi = \mu - 1$

Диамагнетики: $\chi < 0$. $\mu < \sim 1$

Парамагнетики: $\chi > 0$. $\mu > \sim 1$

Ферромагнетики: $\chi > 0$. $\mu \gg 1$



Эксперимент П. Кюри:

$$\chi_{\text{пара}} = \frac{C}{T}$$

Закон Кюри – Вейса для жидких и твёрдых тел:

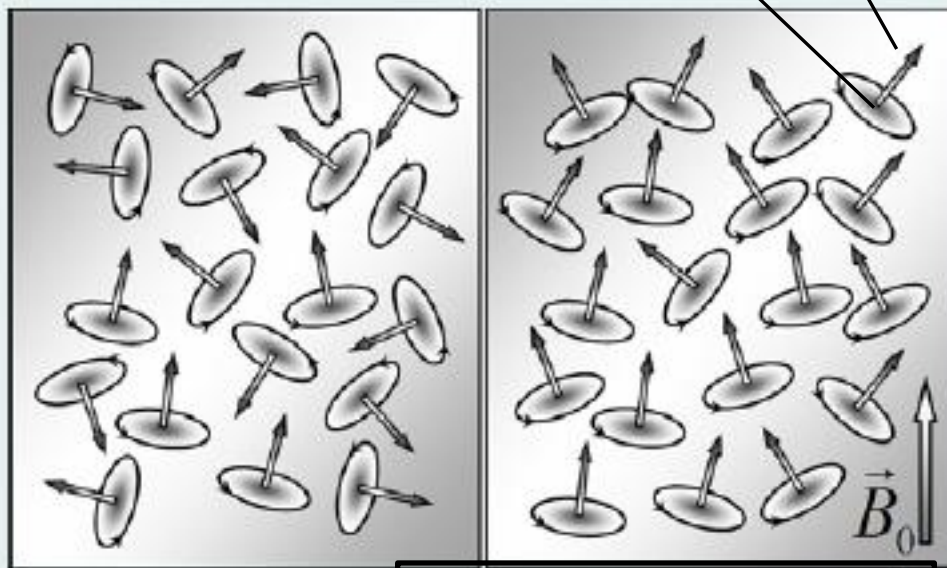
$$\chi_{\text{пара}} = \frac{C}{T - T_0}$$

Для жидких и твёрдых тел: $\chi \sim 10^{-4}$

1. Магнитная восприимчивость парамагнетиков зависит от температуры
2. Парамагнетиками являются вещества, у которых собственный магнитный момент атомов не равен нулю.



Модель молекул парамагнетика



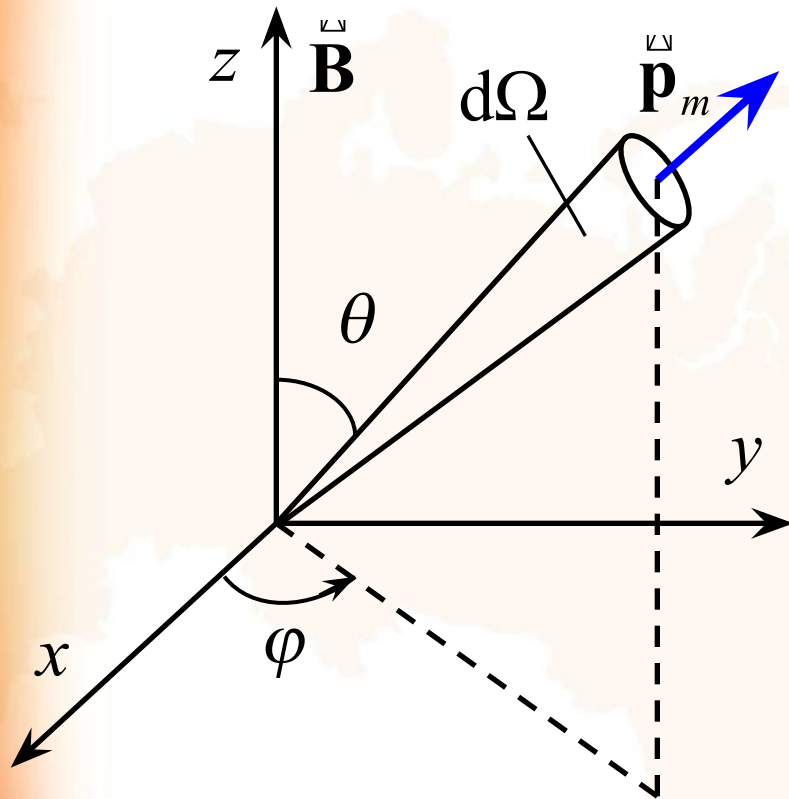
$$\vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{B}_0 \neq 0 \quad \frac{1}{T}$$

При термодинамическом равновесии относительная доля молекул, магнитные моменты которых ориентированы в пределах угла θ , определяется распределением Больцмана:

$$dn = A \exp\left(-\frac{w}{kT}\right) d\Omega$$

$$\Rightarrow J = \chi H \quad \chi = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT}$$



Молекулы подобно «раскрученным волчкам» или гироскопам прецессируют под действием моментов сил вокруг направления вектора \mathbf{B} .

$$\mathbb{J} = \chi \mathbb{H}$$

$$\chi = -\frac{\mu_0 n e^2}{6 m_e} \sum_{i=1}^Z \langle R_i^2 \rangle$$

1. Магнитная восприимчивость диамагнетиков не зависит от температуры (П. Кюри, 1895).
2. Диамагнетиками - вещества, у которых собственный магнитный момент атомов равен нулю.



Природа ферромагнетизма

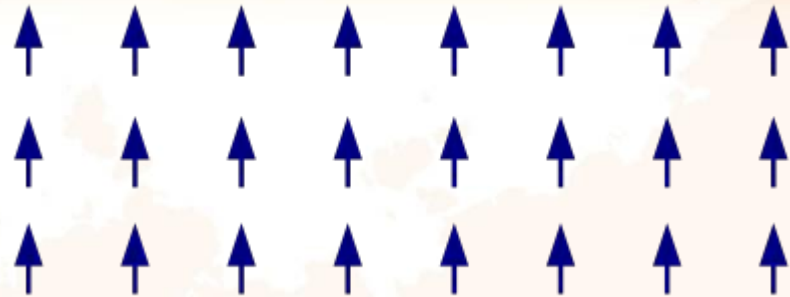
Намагничивание ферромагнитных материалов (железо никель и т.п.) возникает благодаря взаимодействию магнитных моментов электронов одной из внутренних оболочек атомов.

В результате такого взаимодействия спины и магнитные моменты этих электронов ориентируются параллельно.

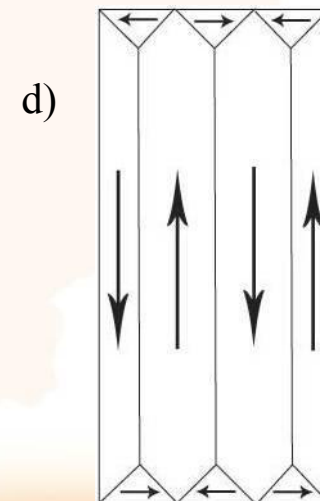
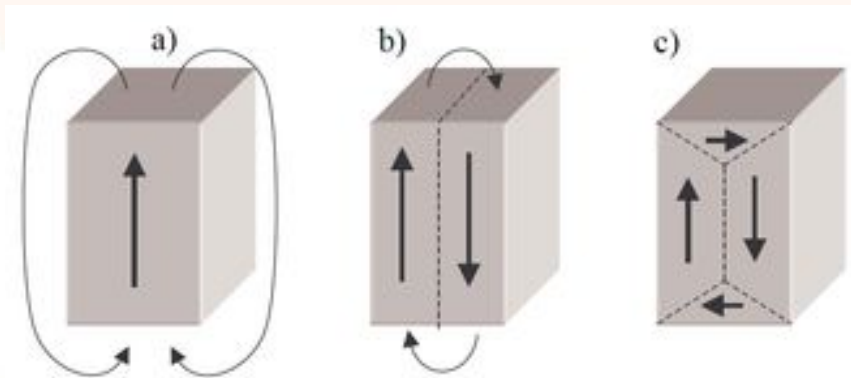
Эффект обусловлен так называемым обменным взаимодействием (неэлектростатической природы).

Для ферромагнетиков →

$$W_{\uparrow\uparrow\dots\uparrow\uparrow} < W_{\uparrow\downarrow\dots\uparrow\downarrow}$$



Домены – области, имеющие только одно направление намагниченности. Размер домена 1 – 10 мкм.

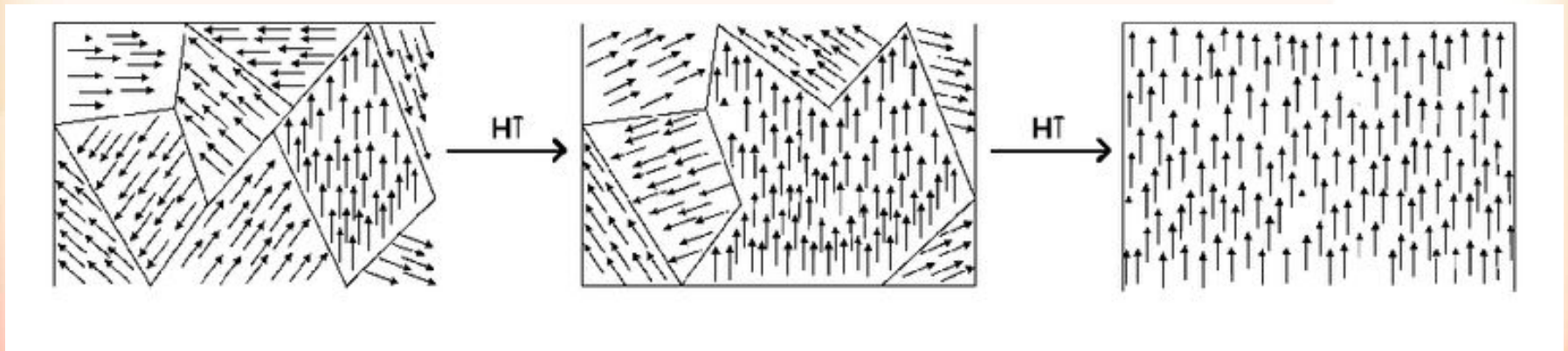
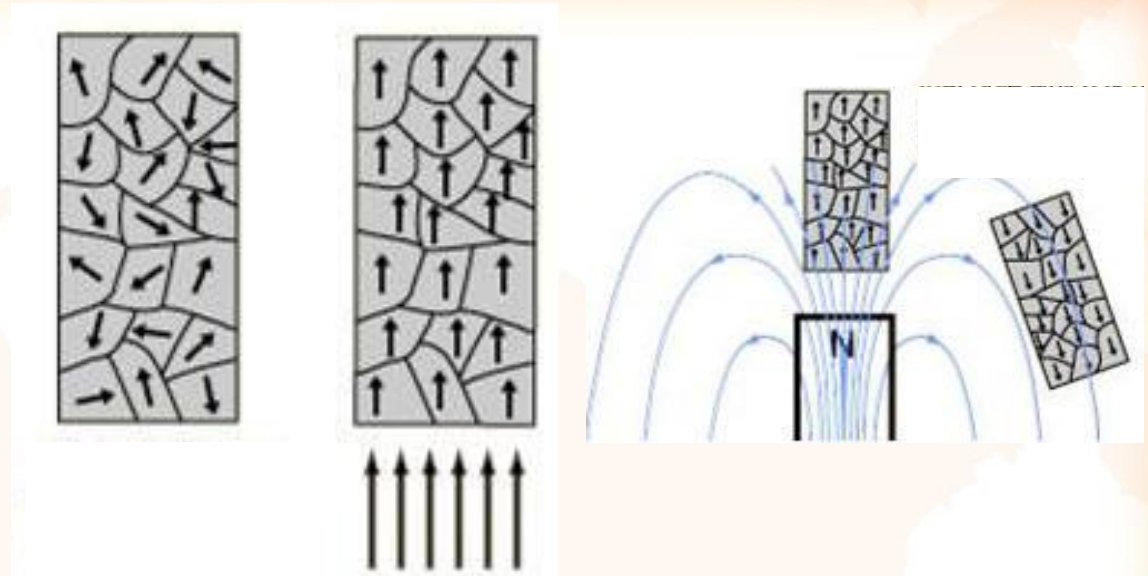


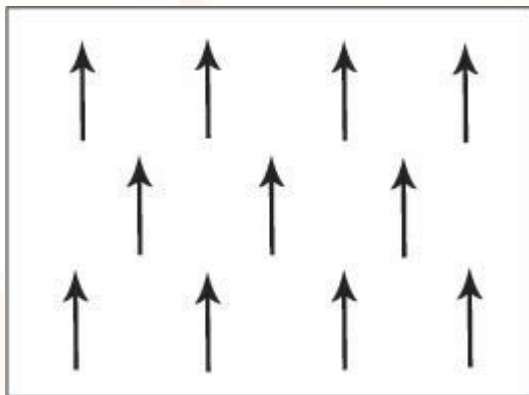
Намагничивание ферромагнетика

$$w = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$$\vec{p}_m \parallel \vec{B} \Rightarrow$$

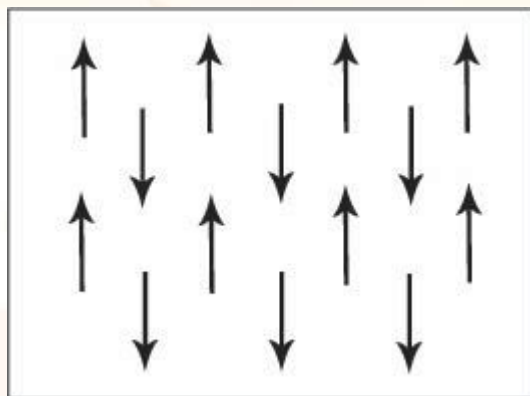
$$w = -|\vec{p}_m| |\vec{B}| = \min$$





Ферромагнетизм

Магнитные моменты в ферромагнетиках имеют тенденцию становиться параллельными друг другу под действием приложенного магнитного поля. Однако в отличие от парамагнетиков эти магнитные моменты остаются параллельными после выключения магнитного поля.



Антиферромагнетизм

Магнитные моменты соседних «магнитных» ионов имеют тенденцию выстроиться антипараллельно по отношению к друг другу в отсутствие приложенного магнитного поля. В простейшем случае соседние магнитные моменты имеют одинаковые по модулю значения, поэтому в среднем намагничивание отсутствует.



1 H 2 He

□ Ферромагнетик ■ Антиферромагнетик

□ Парамагнетик ■ Диамагнетик

3	4											5	6	7	8	9	10	
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne	
11	12											13	14	15	16	17	18	
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar	
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr	
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe	
55	56	57		72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	La		Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
87	88	89																
Fr	Ra	Ac																

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu

Периодическая таблица элементов, показывающая различные типы намагничивания при комнатной температуре.



Спасибо за внимание!

**Следующая лекция
17 ноября**