

# ЛЕКЦИЯ № 8

## Колебания.

# ВОПРОСЫ

23. Гармонические колебания.

Характеристики гармонических колебаний. Векторная диаграмма.

24. Сложение колебаний одного направления и частоты. Биения.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

25. Уравнение динамики незатухающих колебаний.

Пружинный маятник.

23. Гармонические колебания.  
Характеристики гармонических  
колебаний. Графическое  
представление гармонических  
колебаний. Векторная диаграмма.  
Фазовая плоскость.

Колебания – процессы отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Закон кинематики гармонических колебаний – колебаний, которые совершаются по закону синуса или косинуса (решение дифференциального уравнения):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$x$  – смещение или колеблющаяся  
величина,  
 $A$  – амплитуда колебаний –  
максимальное смещение или  
максимальное значение  
колеблющейся величины,  
 $(\omega_0 t + \alpha)$  – величина, стоящая под  
знаком косинуса или синуса – фаза  
колебаний,

$\omega_0$  – собственная частота, она же циклическая частота – количество колебаний за  $2\pi$  секунды,  
 $\alpha$  – начальная фаза (для момента времени  $t = 0$ ),  
 $T$  – период, время, за которое фаза получает приращение  $2\pi$  или время одного колебания (цикла),

# Векторная диаграмма (векторное изображение колебаний)

Возьмём ось  $X$ . Из точки  $O$  отложим вектор  $\vec{a}$  под углом  $\alpha$  к оси. Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью  $\omega_0$ , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси  $X$  в пределах от  $-a$  до  $+a$ , по закону  $x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$ .

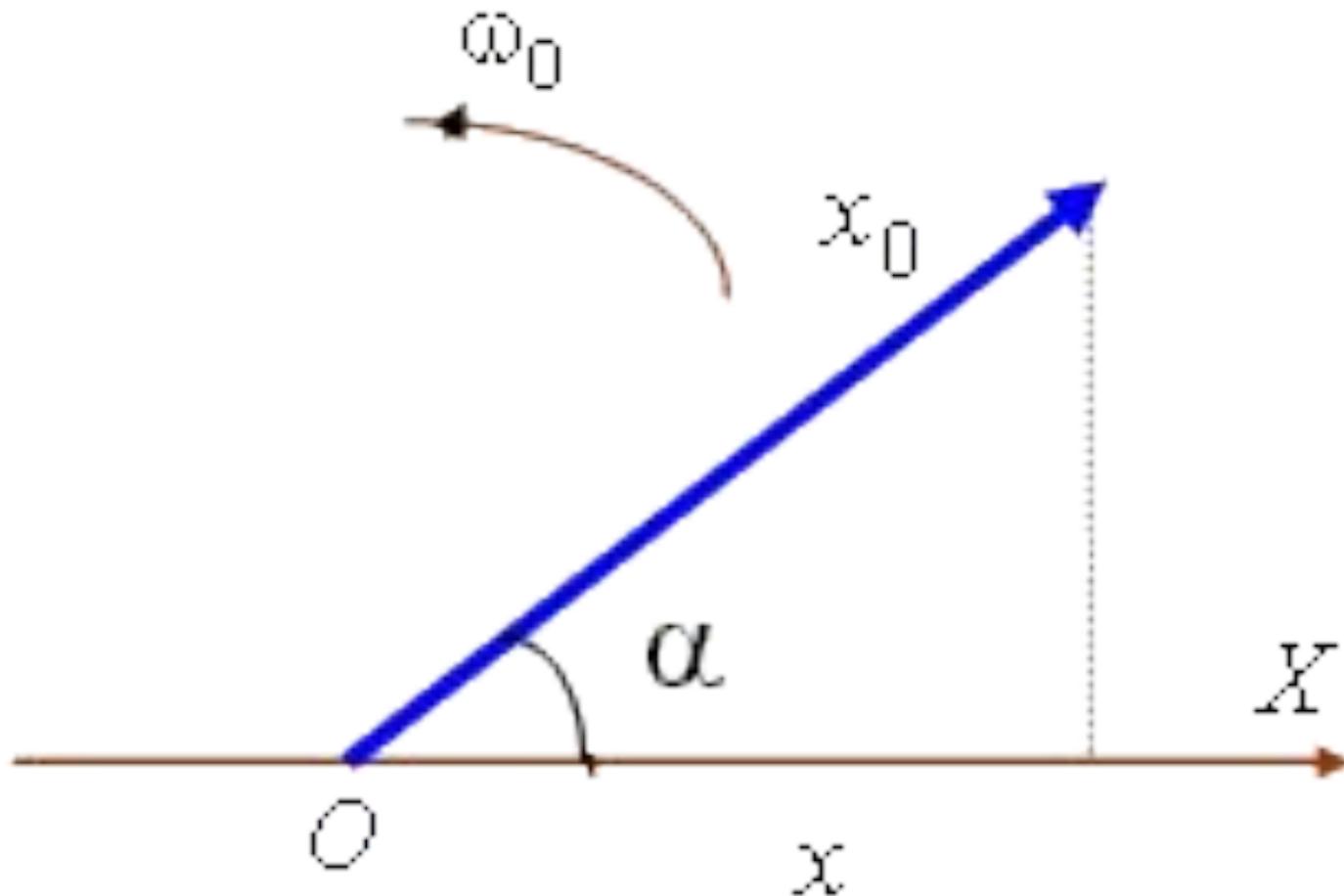


Рис. 7.4 Представление гармонического колебания с помощью вектора

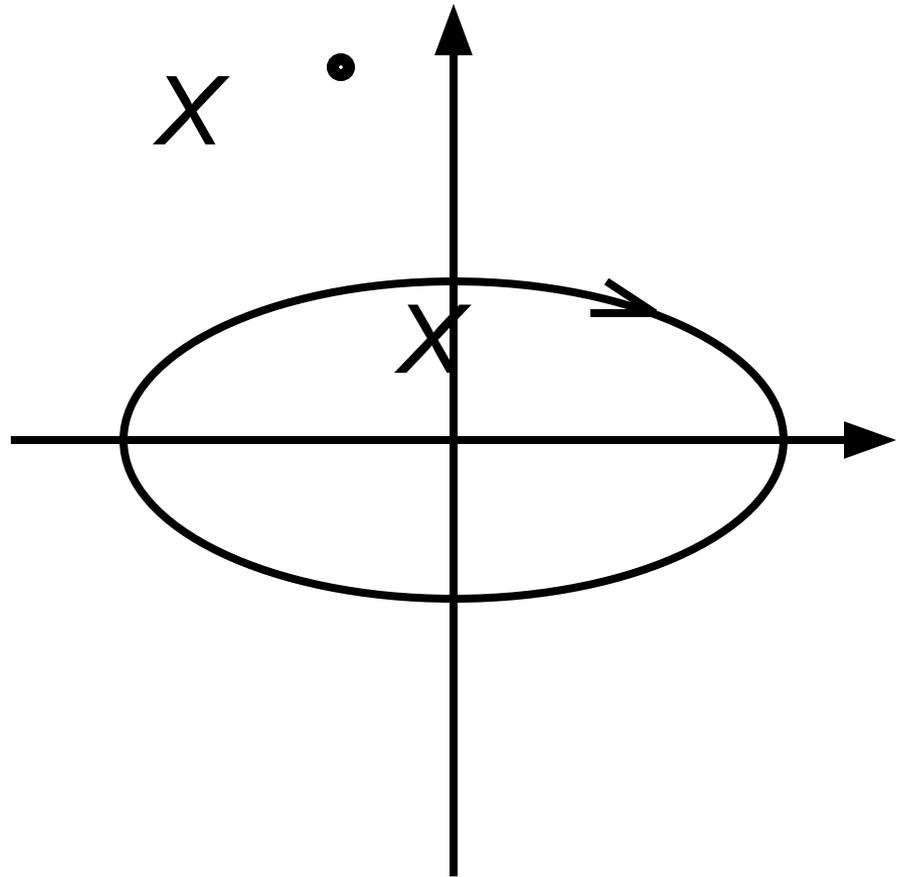
## Фазовая плоскость

На фазовой плоскости для координат используют значения колеблющейся величины (ось абсцисс –  $X$ ) и её скорость (ось ординат –  $Y$ ).

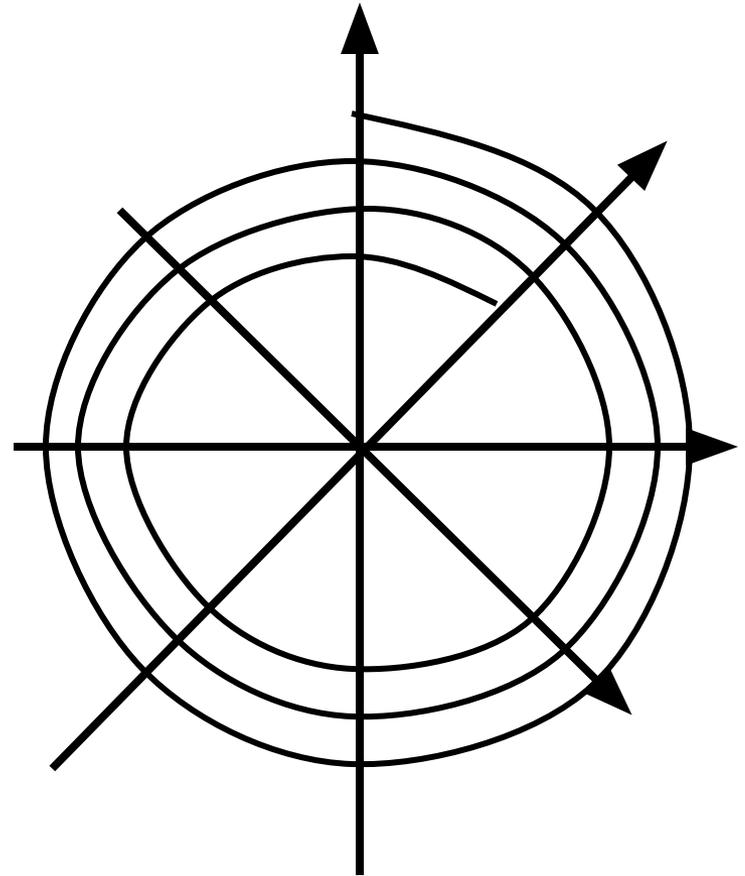
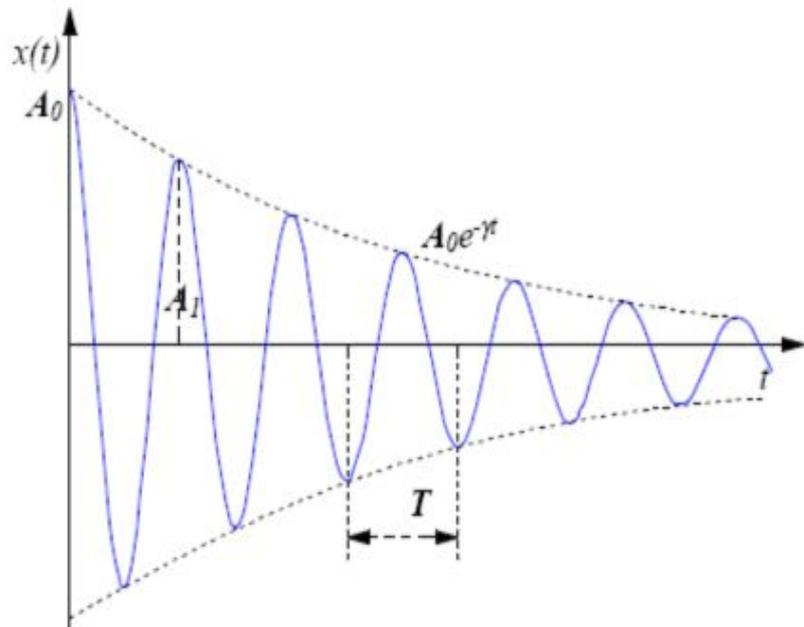
$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t + \varphi), \\ v = \dot{x} = a\omega \cos(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

# Уравнение траектории фазовой кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{(a\omega)^2} = 1$$

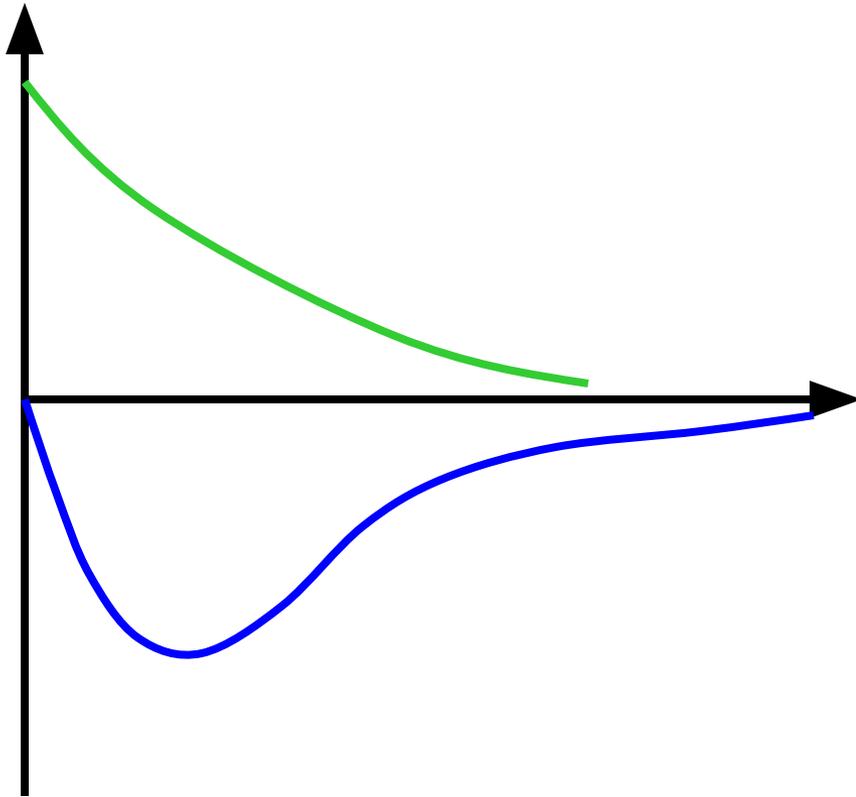


# Затухающий осциллятор

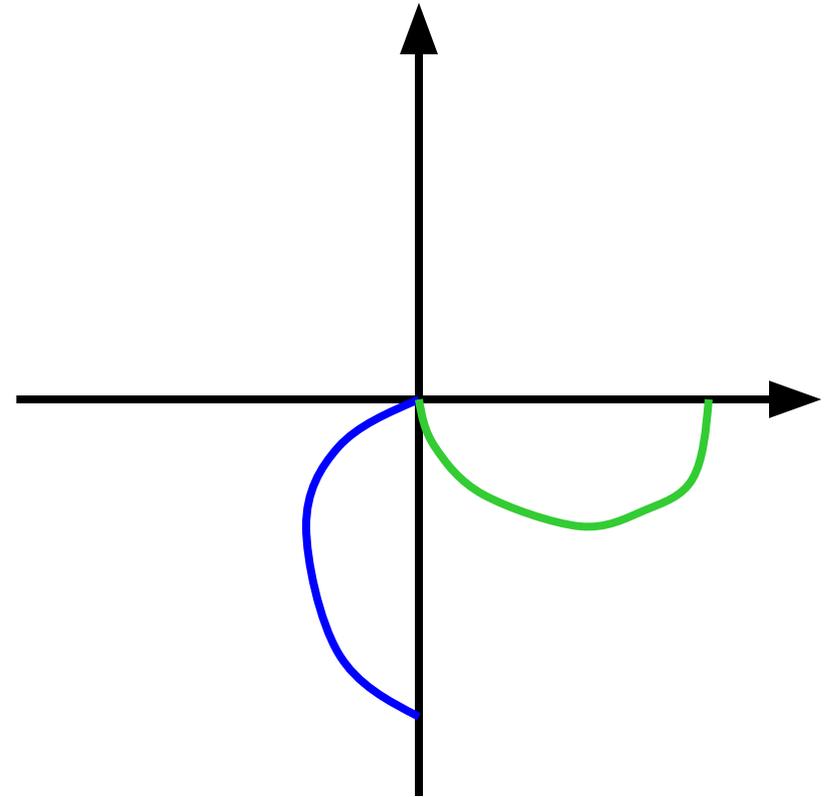


# Ангармонические колебания. Осциллятор с большим затуханием.

$$\beta \gg \omega_0$$



200



13

Предельный случай  $\beta = \omega_0$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \infty.$$

Этот случай в технике важен тем, что при таком соотношении параметров в случае внешнего воздействия система может вернуться в исходное состояние. (Из-за силы трения система может не вернуться в исходное положение)



24. Сложение колебаний одного направления и частоты. Биения.  
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.  
Частные случаи.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

В соответствии с теоремой косинусов и рисунком запишем амплитуду результирующего колебания

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

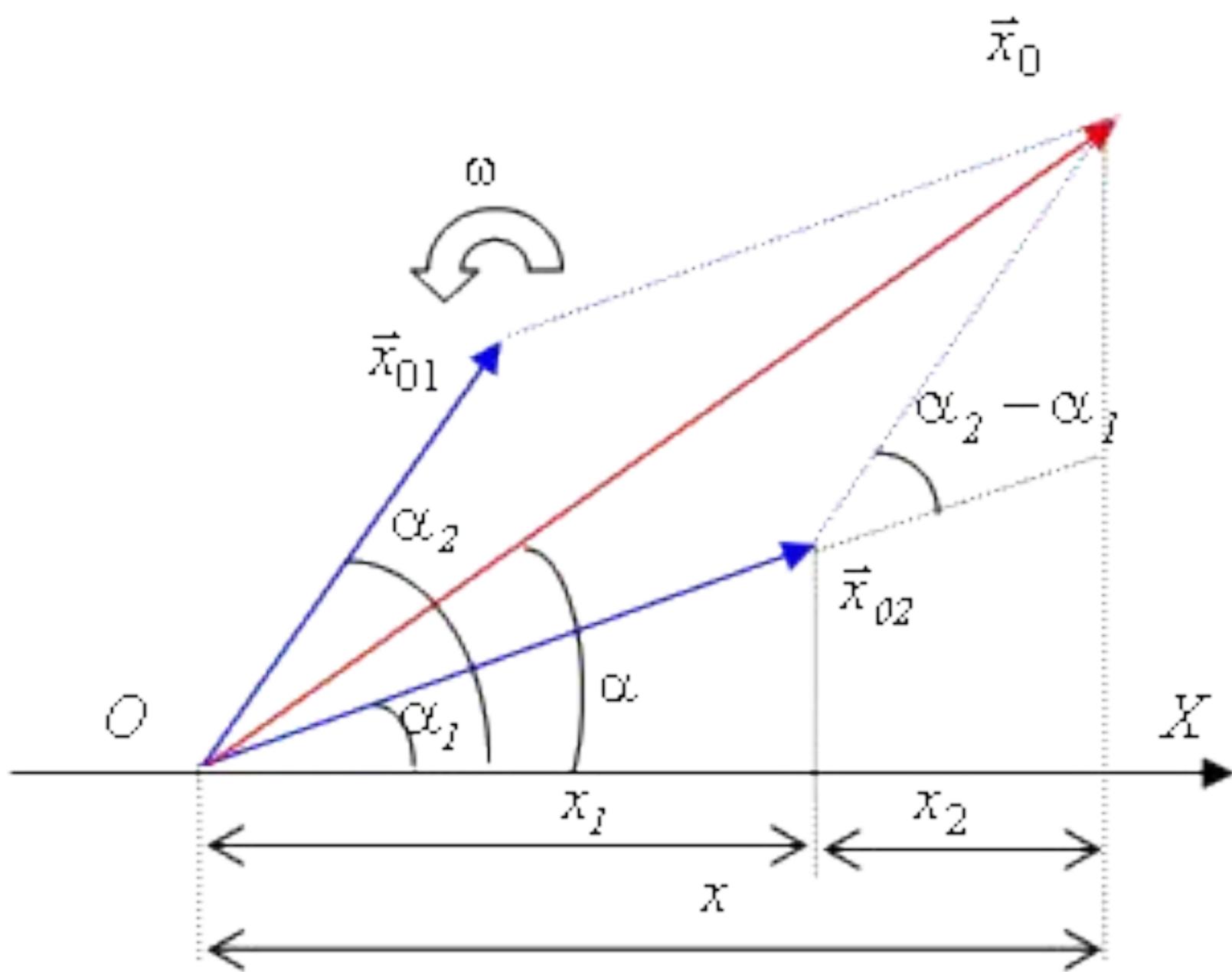


Рис. 7.5. Сложение гармонических колебаний

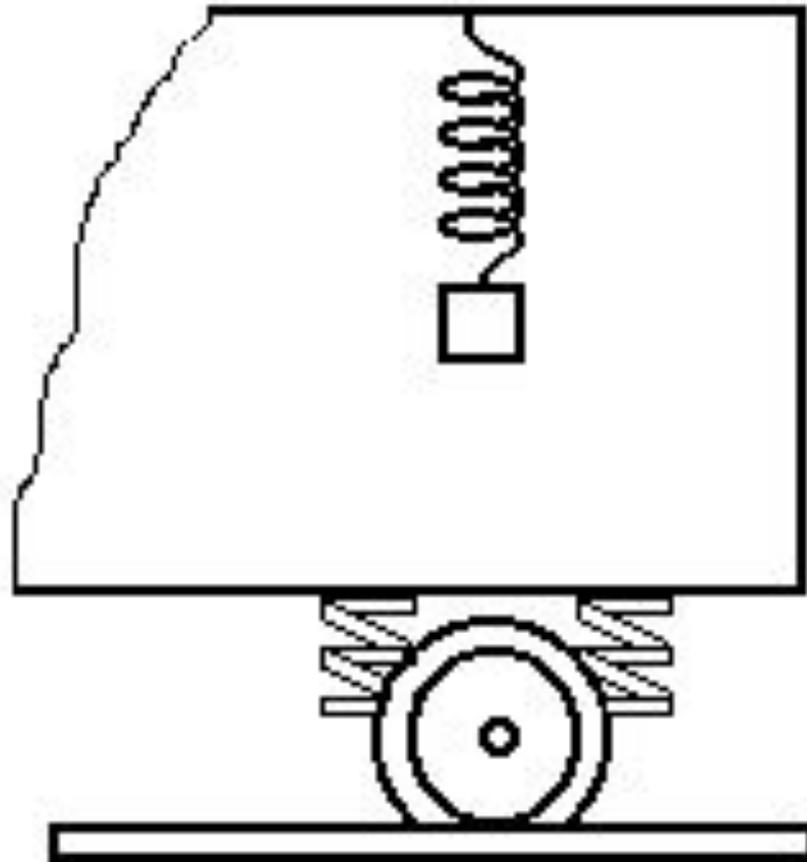
Фаза результирующего колебания  
вычисляется следующим образом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

Если  $\varphi_2 \neq \varphi_1$  то говорим о векторном сложении векторов,

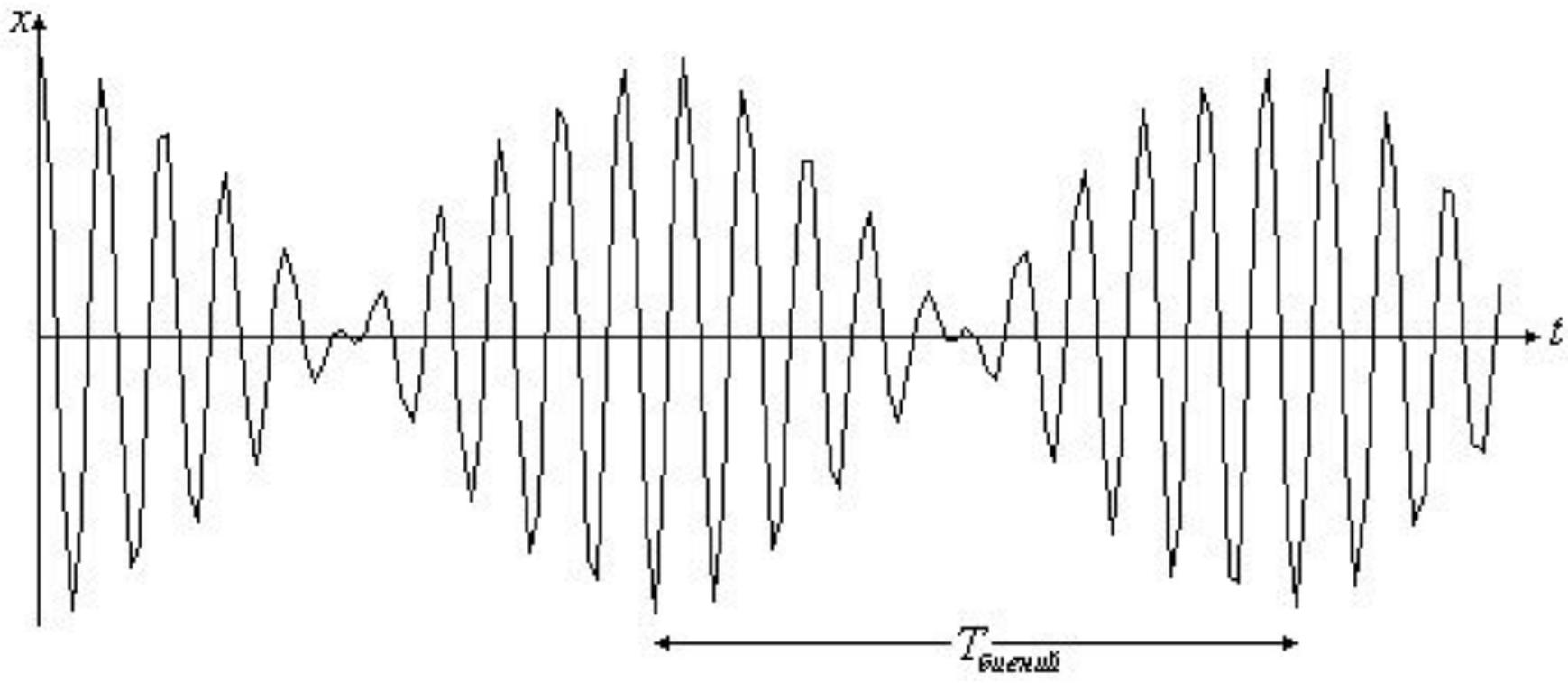
Если  $\varphi_2 = \varphi_1$  то говорим о скалярном сложении векторов:

$$x = x_1 + x_2 = (a_1 + a_2) \cos(\omega_0 t + \varphi).$$



Биения – колебания с пульсирующей амплитудой, которые получаются в результате сложения двух колебаний, обладающими незначительно отличающимися частотами.

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega + \Delta\omega, \quad \Delta\omega \ll \omega.$$



## Складываемые колебания

$$x_1 = a \cos(\omega t),$$

$$x_2 = a \cos((\omega + \Delta\omega)t),$$

Результирующее колебание

$$x = x_1 + x_2 = 2a \cos(\Delta\omega t/2) \cos((\omega + \Delta\omega/2)t) \approx \\ \approx 2a \cos(\Delta\omega t/2) \cos(\omega t).$$

Амплитуда результирующего колебания и период пульсаций

$$A_{\text{рез}} = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right|, \quad T_{\text{биения}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

# Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Запишем уравнения колебаний в  
следующей форме:

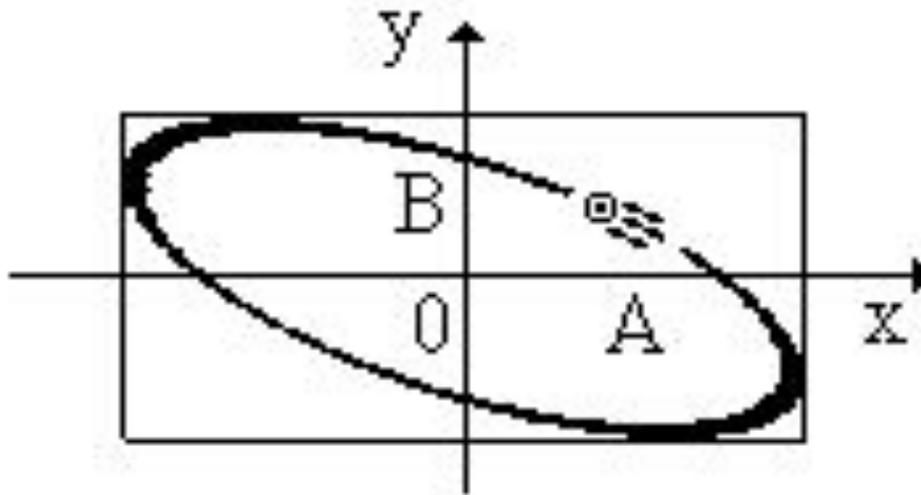
$$\begin{aligned}x &= a \cos(\omega t), \\ y &= b \cos(\omega t + \alpha).\end{aligned}$$

Это параметрическая форма записи.

Из этой формы можно получить  
следующую запись

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

Это уравнение эллипса

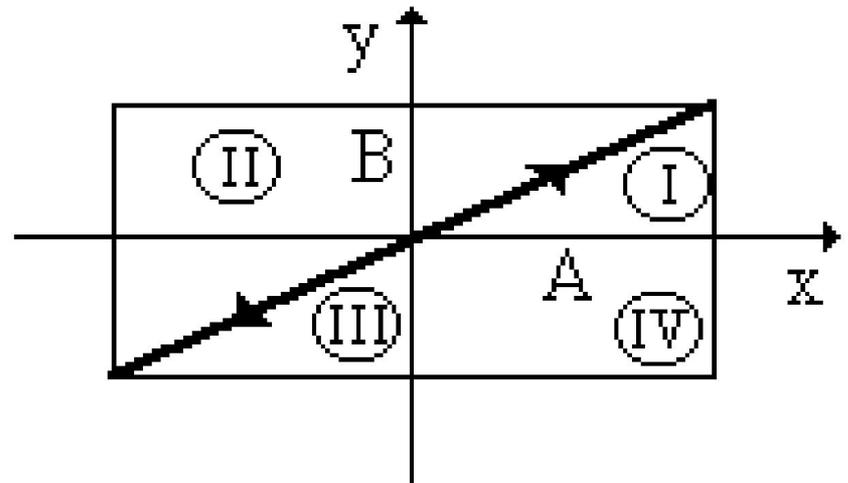


В зависимости от фазы  $\alpha$  получаем тот или иной вид колебаний.  
Рассмотрим три варианта.

1)  $\alpha = 0$ :

$$\left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

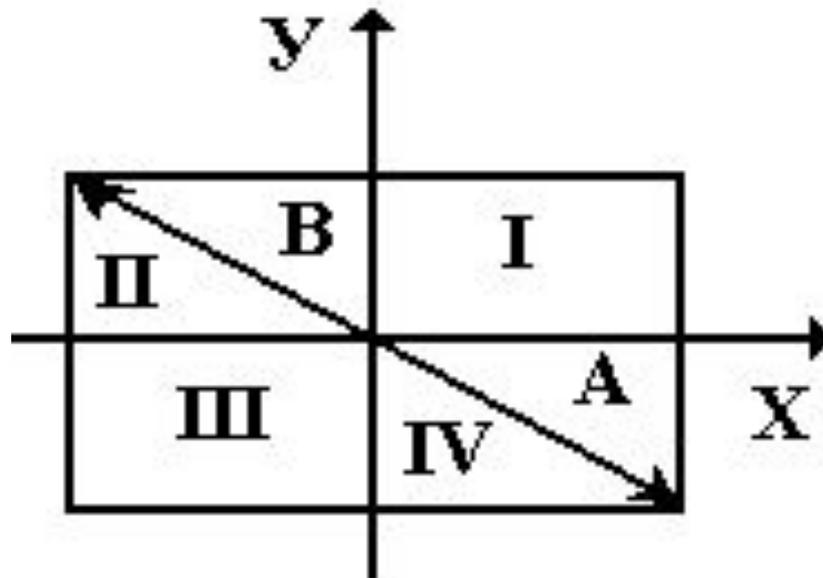
$$y = \frac{b}{a}x$$



2)  $\alpha = \pm\pi$ :

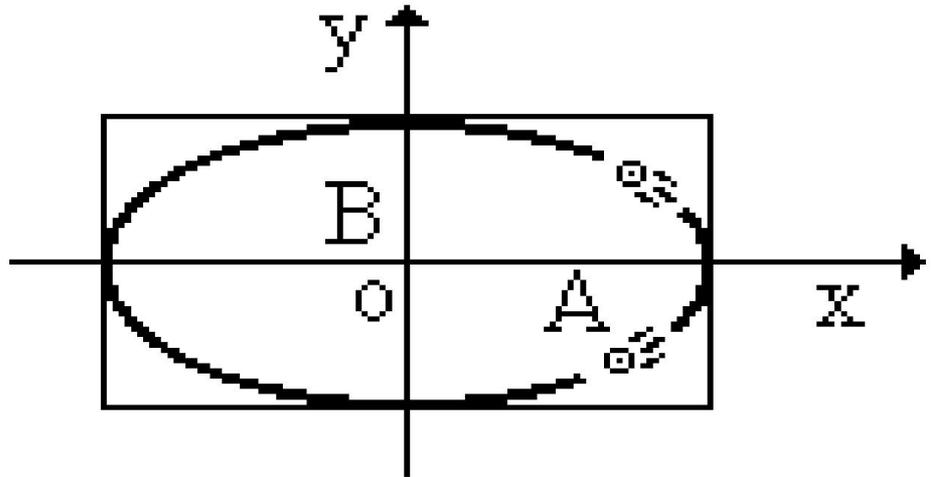
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$



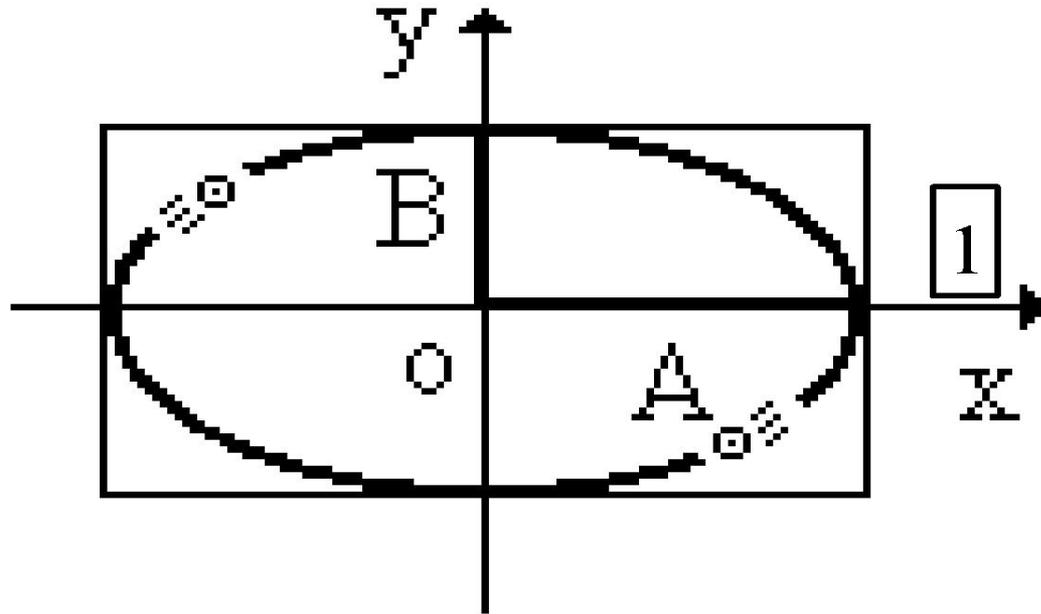
1)  $\alpha = \pm\pi/2$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

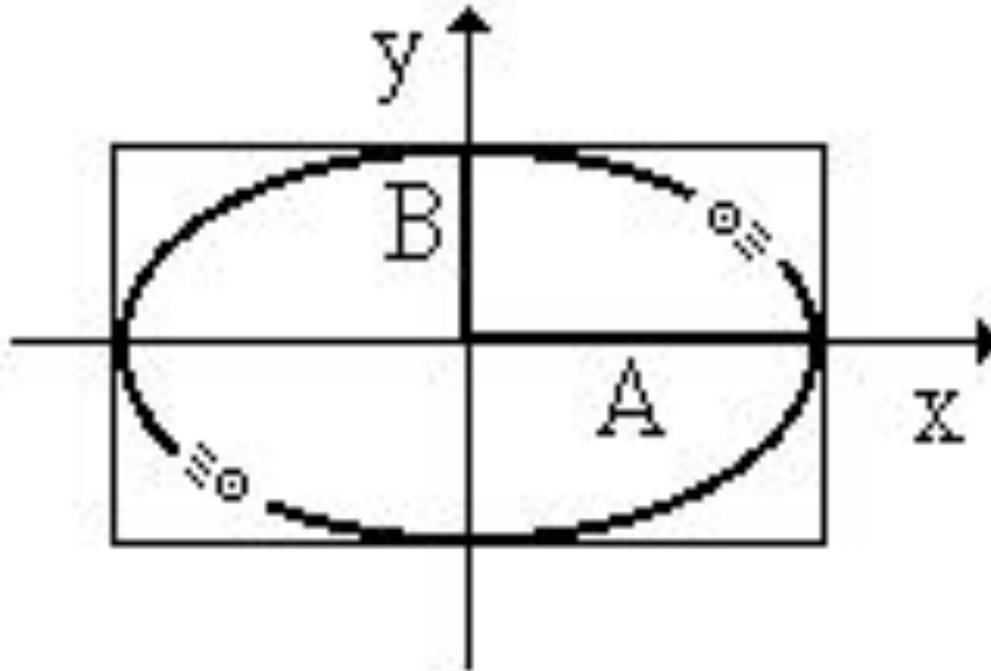


Если  $a = b$ , то получаем окружность:  
 $x^2 + y^2 = R^2$ .

Если  $\alpha = +\pi/2$ , то точка на траектории будет двигаться по часовой стрелке.



Если  $\alpha = -\pi/2$ , то точка на траектории будет двигаться против часовой стрелки.

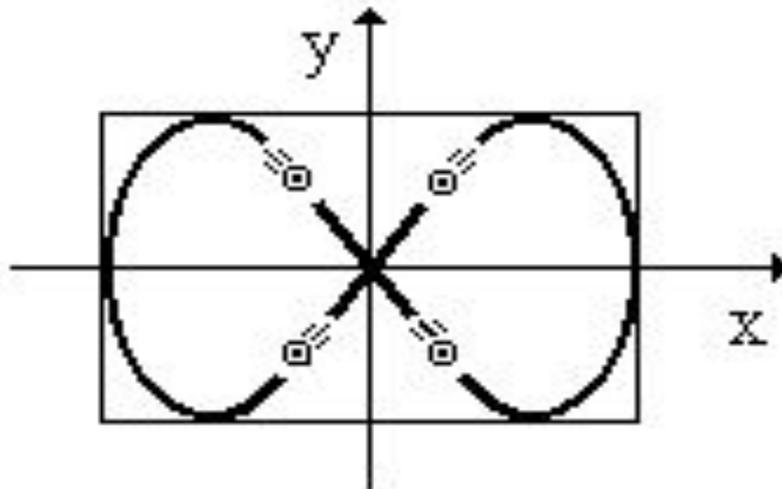


При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с различными амплитудами и частотами  $\omega_x \neq \omega_y$  и неодинаковыми начальными фазами возникают сложные результирующие колебания, которые называют фигурами Лиссажу.

Если соотношение частот

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{1}$$

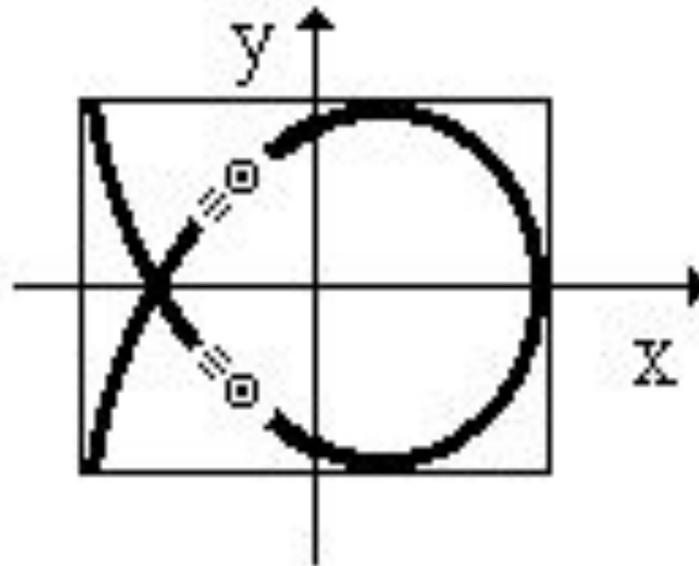
и разность фаз складываемых колебаний  $\alpha = \pi/2$ , наблюдается кривая, напоминающая восьмерку.



При отношении круговых частот

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{3}{2}$$

и разности фаз складываемых колебаний  $\alpha = \pi/2$  наблюдается более сложная кривая.



*Замечание 1:* Число касаний фигуры Лиссажу со сторонами прямоугольника, образованного амплитудами, равно величине отношения частот.

*Замечание 2:* Если частоты складываемых колебаний кратны  $n\omega$  и  $m\omega$ , тогда уравнения взаимно перпендикулярных колебаний запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot \sin(n\omega t + \alpha_1), \\ y &= b \cdot \sin(m\omega t + \alpha_2). \end{aligned} \right\}$$

Траектория результирующего колебания будет замкнутой, её форма зависит от амплитуд  $a$  и  $b$ , круговых частот  $n\omega$  и  $m\omega$  и значений начальных фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

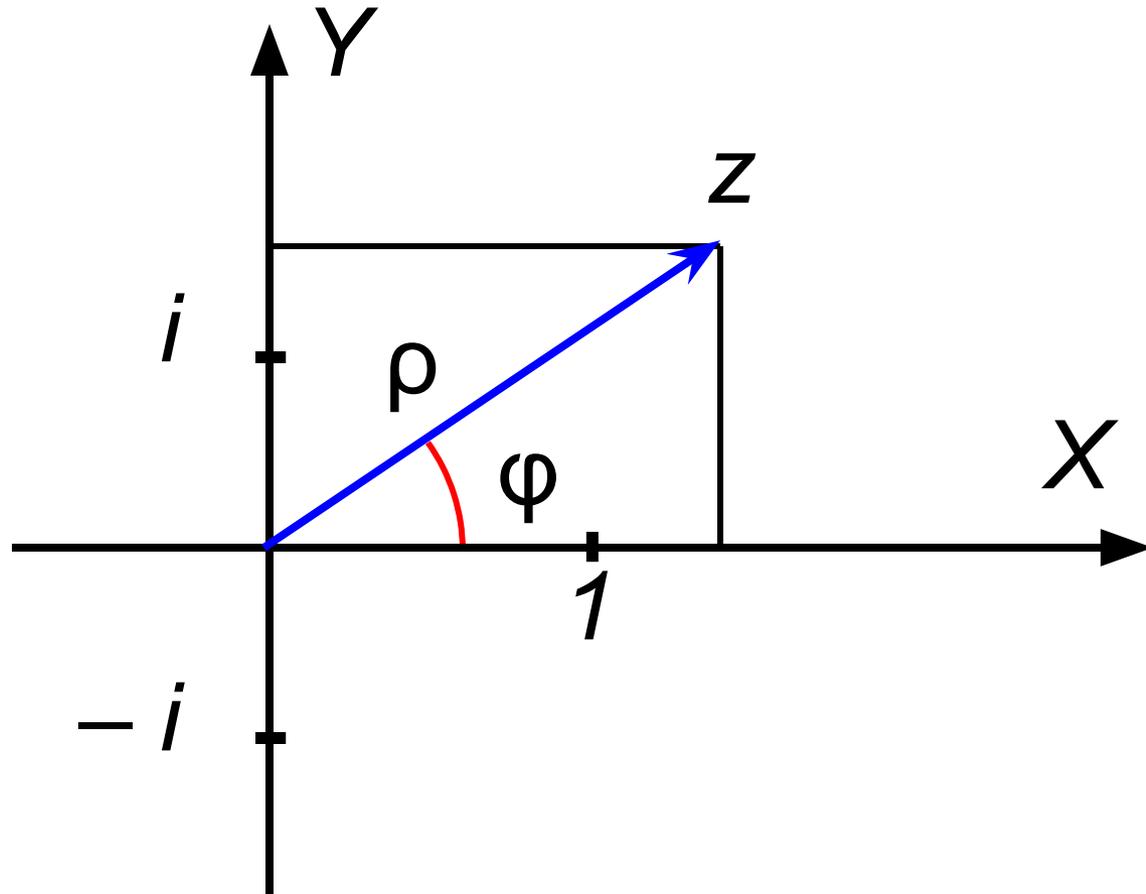
# Комплексные числа

## Представление колебаний в комплексной форме

Комплексное число

$$z = x + iy,$$

$x, y$  – вещественные числа,  
 $i^2 = -1$  – мнимая единица.



$x = \operatorname{Re} z$  – вещественная часть,

$y = \operatorname{Im} z$  – мнимая часть,

$z^* = x - iy$  – комплексно

сопряжённое числу  $z = x + iy$ ,

$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  модуль,

$\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$  – аргумент.

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

отсюда

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$z = \rho e^{i\varphi}$  — комплексная форма,

$$z = \rho e^{i(\omega t + \alpha)\varphi} = \rho \exp(i(\omega t + \alpha)\varphi)$$

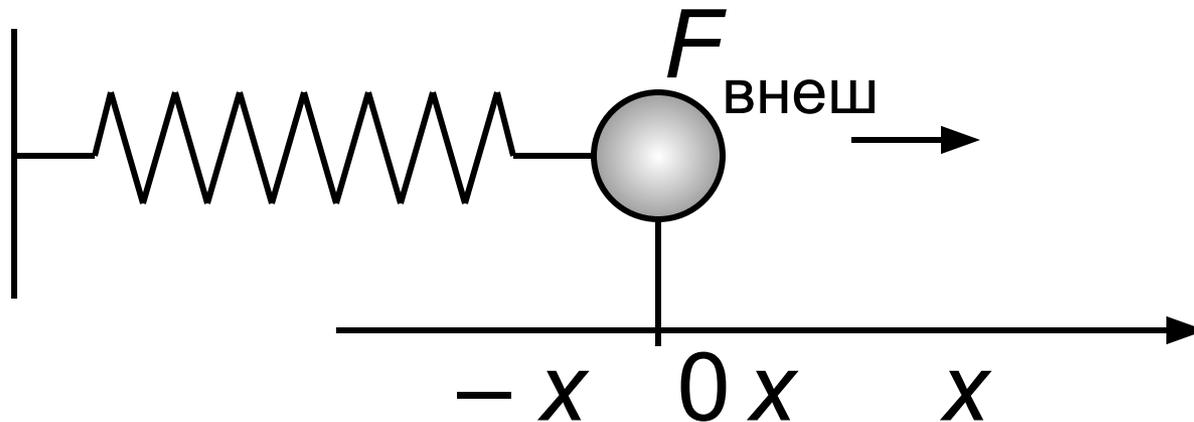
$$\cos \varphi = \frac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2},$$
$$\sin \varphi = \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i}.$$



25. Уравнение динамики незатухающих колебаний. Пружинный, физический и математический маятники.

Рассмотрим систему, с одной степенью свободы. Потенциальная энергия системы будет функцией одной переменной  $x$ :  $U = U(x)$ . Система обладает положением устойчивого равновесия в точке  $x = 0$ . В этом положении функция  $U(x)$  имеет минимум. Будем отсчитывать координату и потенциальную энергию от этого положения равновесия  $U(0) = 0$ .

Рассмотрим динамику гармонических колебаний на примере шарика на пружине.



Потенциальная энергия пружины

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

Сила действующая на пружину

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx = -F_{\text{BH}}$$

Если сила по своей природе не является упругой, но соответствует данному выражению, то её называют квазиупругой.

Запишем 2-й закон Ньютона для  
данной системы

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

Получим это же выражение из энергетических соотношений. Запишем полную механическую энергию системы и продифференцируем:

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}$$

$$mv\dot{x} + kx\dot{x} = 0, \quad \dot{v} = \ddot{x} = a, \quad v = \dot{x} \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 (*)$$

В отсутствие сил трения движение под действием квазиупругой силы описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Такие колебания называются свободными незатухающими.

Решение уравнения  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$   
имеет вид

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Это закон гармонических колебаний  
– колебаний, которые совершаются  
по закону синуса или косинуса.

Гармонический осциллятор – физическая система, поведение которой подчиняется уравнениям (динамическому и кинематическому):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

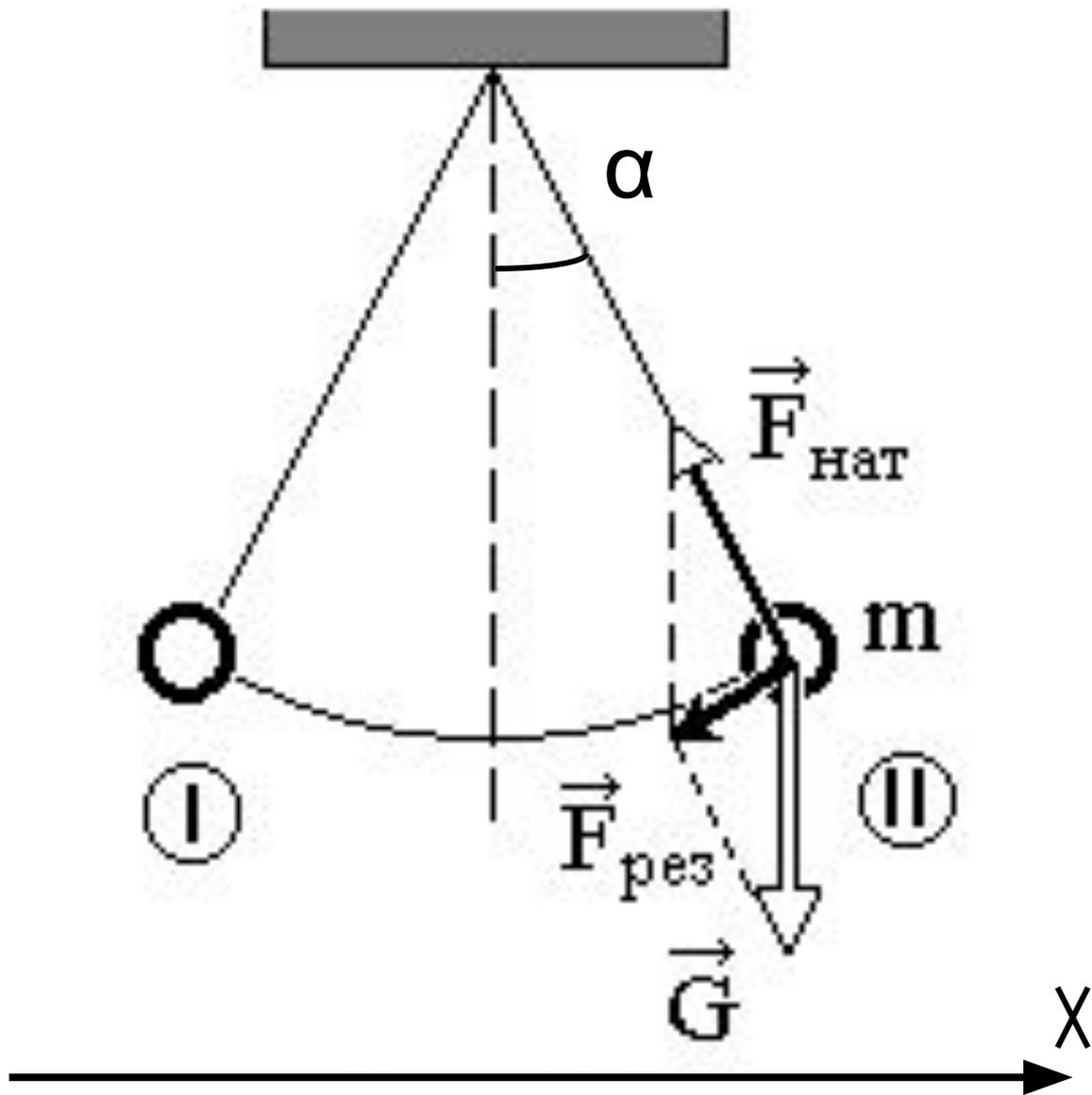
$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Вообще, можно говорить о модели гармонического осциллятора.  
Рассмотри несколько примеров гармонических осцилляторов.

Математический маятник –  
 материальная точка массы  $m$  на  
 нерастяжимой нити длины  $l$ .  
 Действующие силы на точку

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_{\text{нат}}$$

$$m\vec{a} = mg + T.$$



Запишем проекцию на касательную

$$ma_\tau = -mg \sin \alpha$$

воспользуемся следующими формулами (угол  $\alpha$  очень мал)

$$a_\tau = \frac{d^2 x'}{dt^2}, \quad x' = R\alpha, \quad a_\tau = R\ddot{\alpha} = R\ddot{\alpha}, \quad \sin \alpha \approx \alpha.$$

$x'$  - расстояние, пройденное точкой по дуге. В итоге получаем уравнение

$$R\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{g/R}.$$

Можно переписать это уравнение не для угла отклонения  $\alpha$ , а для смещения  $x$  вдоль оси  $X$ . Используем формулы

$$x \approx x' \cos \alpha \approx l \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1.$$

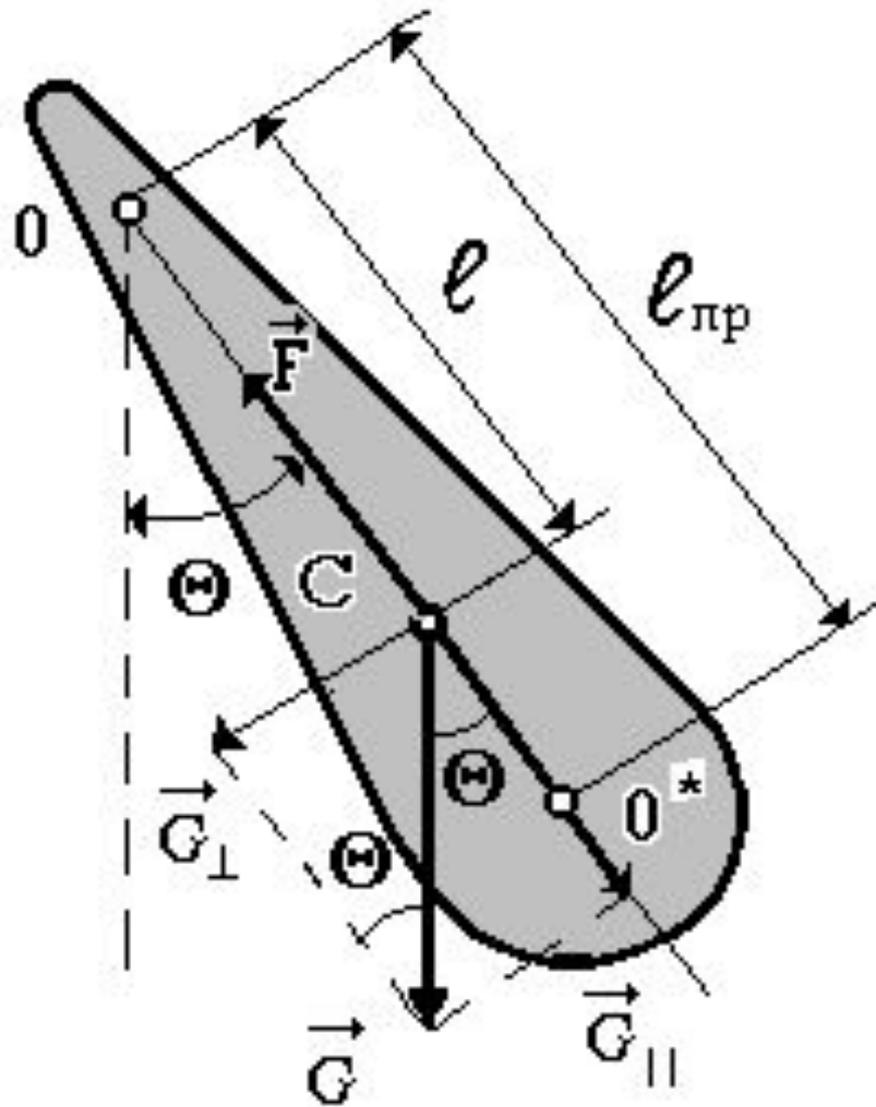
В итоге получаем уравнение

$$m \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Физический маятник – реальная колебательная система. Физический маятник – некоторое тело, совершающее колебания относительно оси, непроходящей через центр масс.

Запишем 2-й закон Ньютона для вращательного движения

$$J\ddot{\alpha} = M = -mg\ell \sin \alpha$$



В случае малых колебаний получаем закон гармонического осциллятора

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{mg\ell/J},$$

здесь  $m$  – масса тела,  $\ell$  – расстояние от точки подвеса до центра масс,  $J$  – момент инерции относительно точки подвеса (оси качания),  $M$  – момент сил, действующий на тело.

Приведенной длиной физического маятника называют длину такого математического маятника, когда периоды их колебаний совпадают

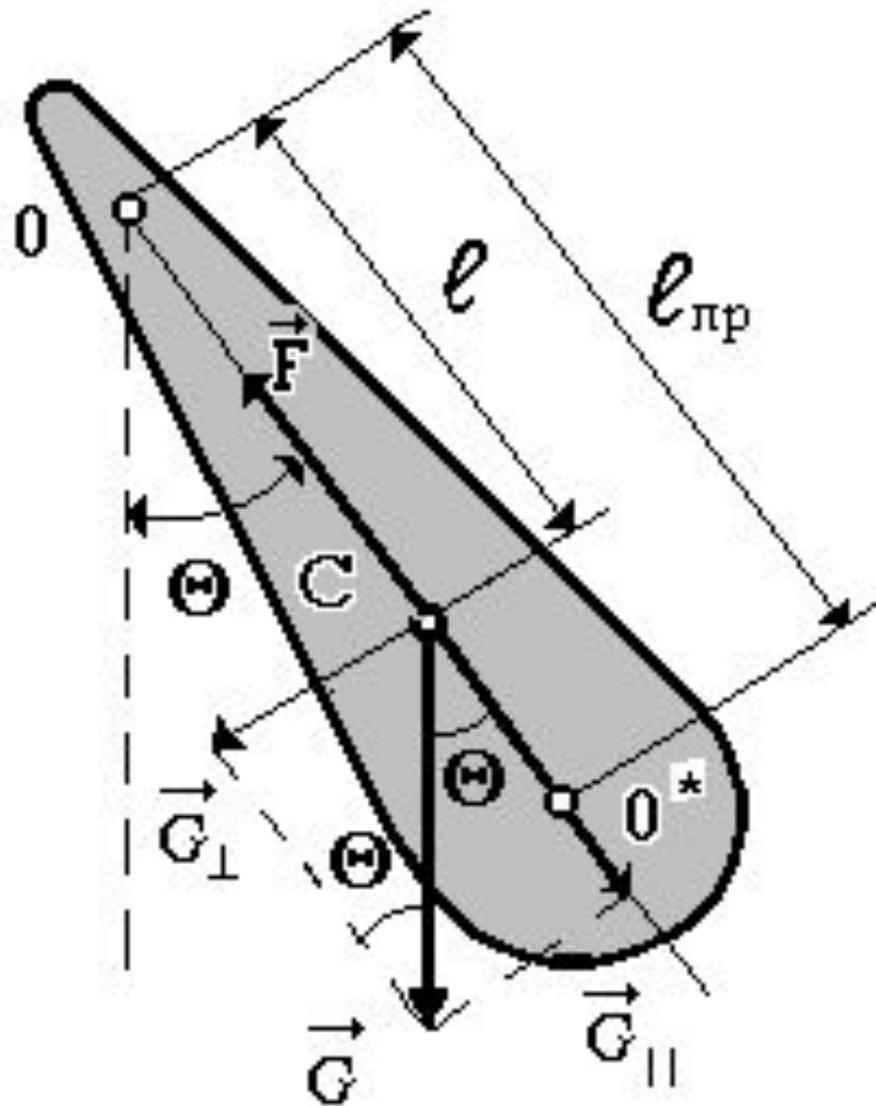
$$(T_{\text{физ}} = T_{\text{матем}}):$$

$$2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\Delta}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta_{\text{пр}}}{g}}$$

Приведенная длина физического маятника

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{m l}$$

расстояние между точками  $O$  и  $O^*$  и есть приведенная длина физического маятника. Сами точки  $O$  и  $O^*$  взаимозаменяемы, т. е. при замене точки  $O$  на  $O^*$  и обратно период колебаний физического маятника сохраняется неизменным.



Согласно теореме Штейнера момент инерции можно представить следующим способом:

$$I = I_0 + m\ell^2$$

$I_0$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Если  $\ell = \ell_0$  ( $\ell_0$  – радиус инерции), то период колебаний такого маятника будет минимальным.

## Колебательный контур (электрические колебания)

$$L\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

В отсутствии потерь энергии (нет диссипативных сил) выполняется закон сохранения механической энергии – полная механическая энергия складывается из кинетической энергии грузика массой  $m$  (при прохождении положения равновесия эта энергия максимальна) и из потенциальной энергии (максимальна в крайних положениях).

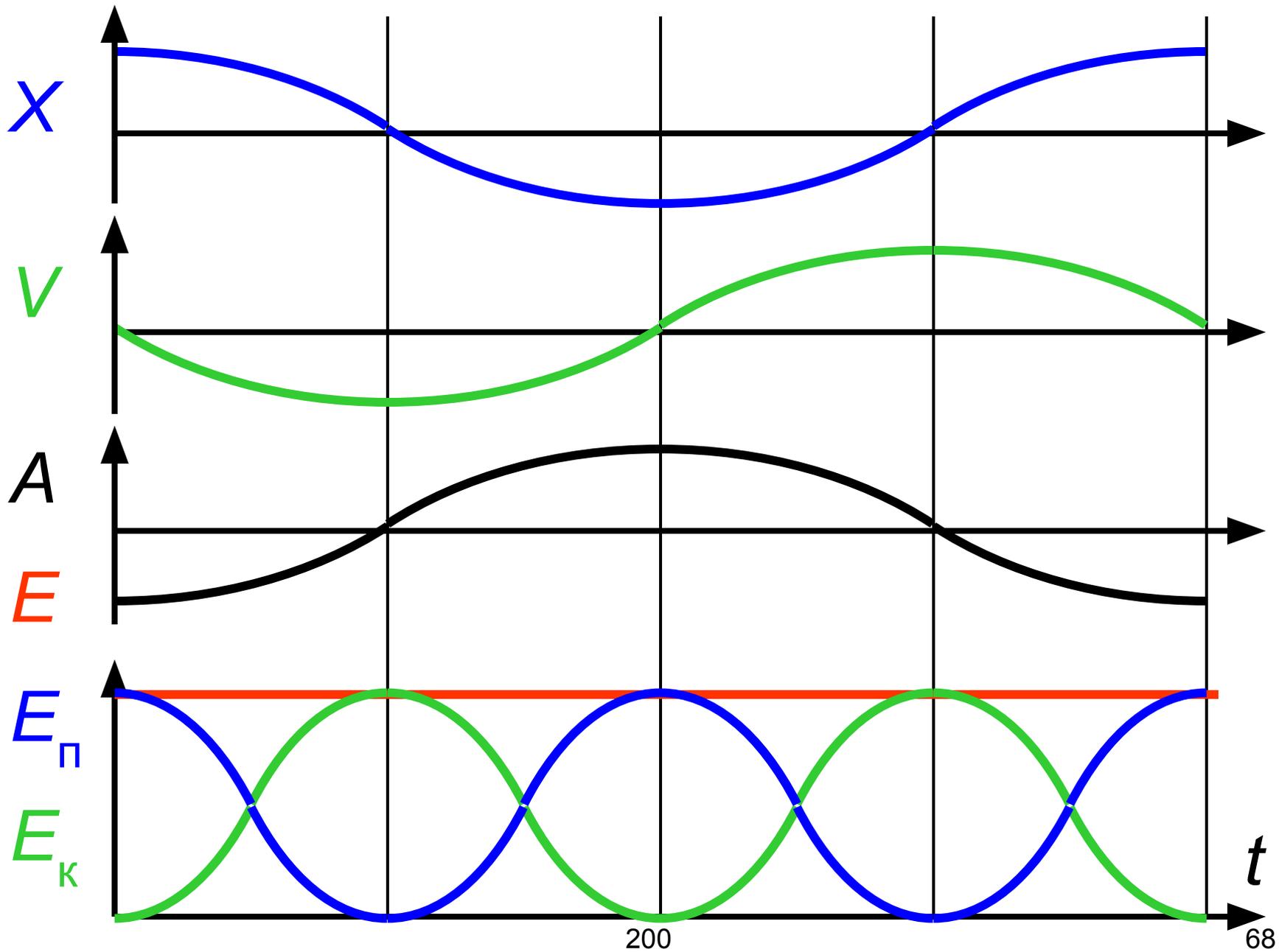
Запишем выражения для координаты, скорости, ускорения и суммарной механической энергии на примере пружинного маятника:

$$x = X_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -X_0 \omega \sin(\omega t + \alpha),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -X_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{kX_0^2}{2}.$$





# ЛЕКЦИЯ № 8

Затухающие колебания.  
Вынужденные колебания.

# ВОПРОСЫ

26. Затухающие колебания. Время релаксации. Логарифмический декремент колебаний, добротность.

27. Вынужденные колебания. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.

28. Связанные колебания. Нормальные координаты и нормальные моды колебаний.

26. Затухающие колебания. Время  
релаксации. Логарифмический  
декремент колебаний, добротность.  
Апериодические процессы.

В случае наличия сил сопротивления (трение) колебания описываются дифференциальным уравнением

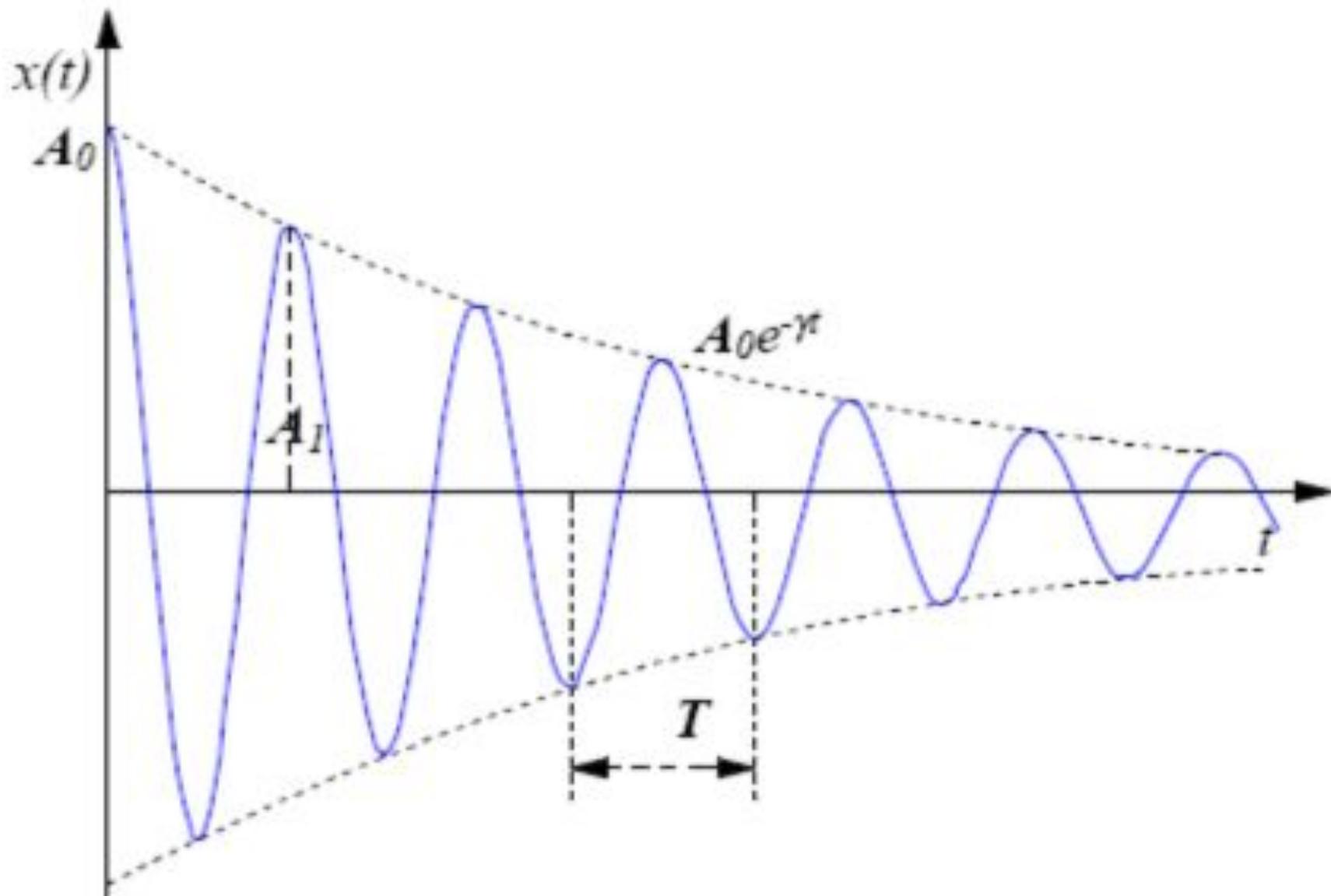
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad 2\beta = r/m.$$

$\beta$  – коэффициент затухания,  
 $r$  – коэффициент сопротивления,  
 $F = -rx$  – сила сопротивления.

Рассмотрим случай с малым затуханием ( $\beta \ll \omega_0$ ), в этом случае решение уравнения имеет вид

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

здесь  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  частота затухающих колебаний, амплитуда колебаний уменьшается по экспоненте  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ .



# Рассмотрим характеристики затухающего колебания

Сравним значения амплитуды в моменты времени, отличающиеся на  $t'$ :

$$\frac{A(t)}{A(t+t')} = \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+t')}} = e^{\beta t'} \left( \frac{A(t)}{A(t+1/\beta)} = e \right)$$

если  $t' = 1/\beta$ , то  $t'$  называется постоянной времени осциллятора – время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в «e» раз.

Сравним значения амплитуды колебаний в моменты времени  $(t)$  и  $(t + T)$ :

$$\frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\beta T} \quad d = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t + T)}\right) = \beta T$$

$d$  – логарифмический декремент затухания. Он показывает, на сколько изменяется амплитуда колебаний за 1 период.

Например,  $N$  – число колебаний функции  $x(t)$  после которых амплитуда уменьшается в « $e$ » раз, тогда:

$$t = NT \quad d = \beta T = \frac{T}{t} = \frac{1}{N} = \frac{1}{N_e} = \frac{\ln z}{N_z}$$

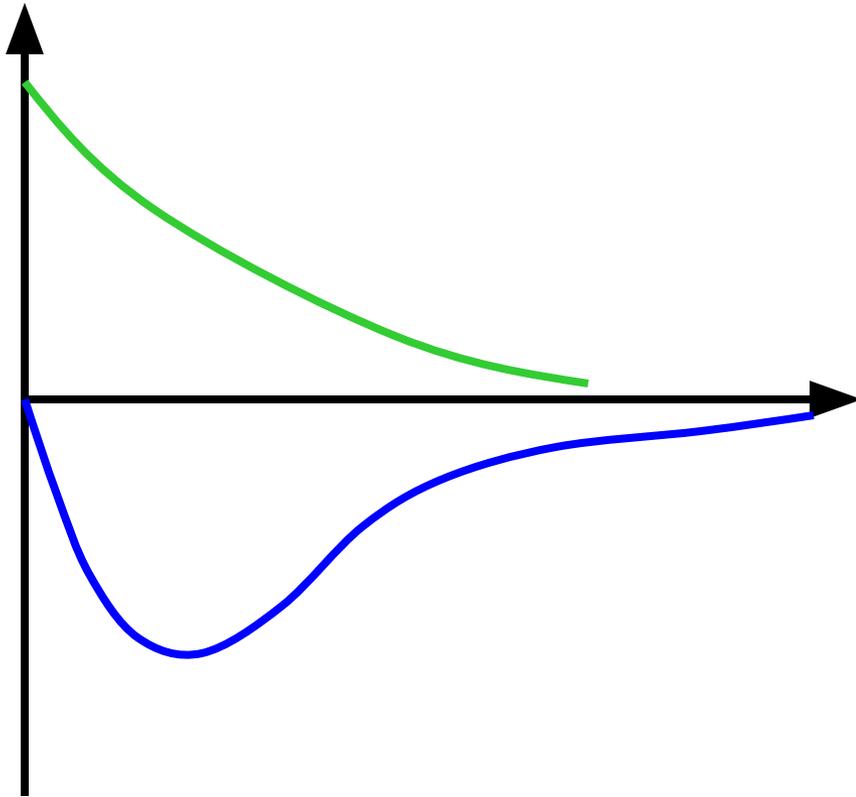
Если  $d = 0,01$ , то за  $N = 100$  колебаний амплитуда уменьшается в « $e$ » раз.

Добротность – это отношение средней энергии колебаний за некоторый период ( $E_0$ ) к потерям энергии ( $\Delta E$ ) за этот же период со множителем  $2\pi$ .

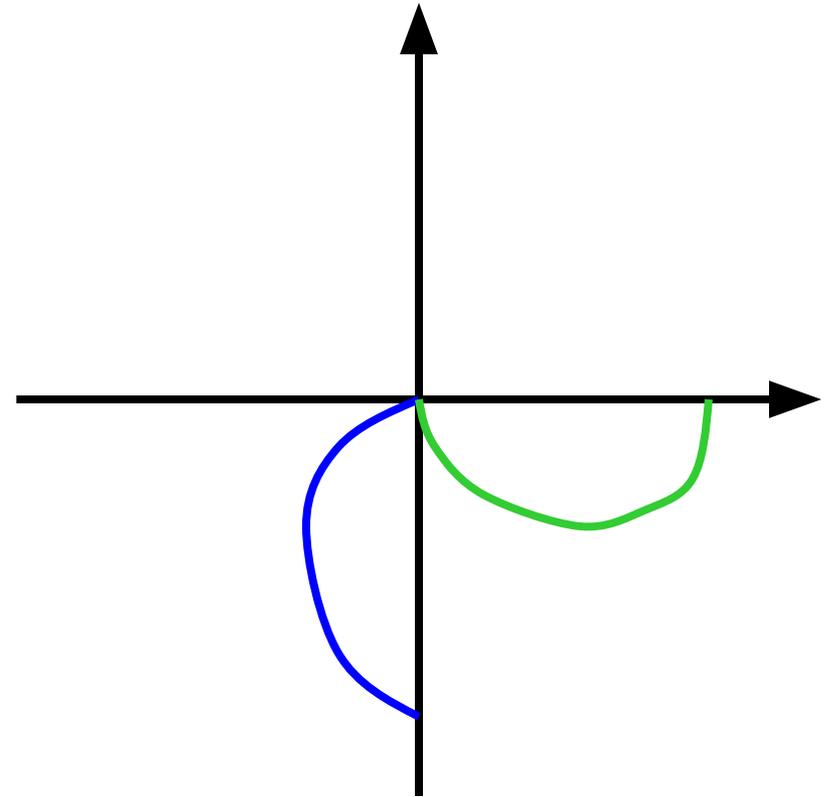
$$Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E}$$

# Ангармонические колебания. Осциллятор с большим затуханием.

$$\beta \gg \omega_0$$



200



81

Предельный случай  $\beta = \omega_0$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \infty.$$

Этот случай в технике важен тем, что при таком соотношении параметров в случае внешнего воздействия система может вернуться в исходное состояние. (Из-за силы трения система может не вернуться в исходное положение)



# 27. Вынужденные колебания. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.

Если на систему действует внешняя вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону  $F = F_0 \cos \omega t$ , то колебание описывается уравнением

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$f_0 = F_0/m$  приведённая сила.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

это линейное дифференциальное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Из математики известно, что его решением является решение общего однородного уравнения и частного решения собственно неоднородного уравнения.

Линейное дифференциальное  
однородное уравнение с  
постоянными коэффициентами  
второго порядка:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

и его решение:

$$x_1(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

Частное решение линейного дифференциального неоднородного уравнения в комплексной форме:

$$x_2(t) = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\beta} e^{i\omega t}$$

Решение уравнения вынужденных колебаний складывается из этих двух решений:  $x_1(t) + x_2(t)$ , но  $x_2(t)$  быстро затухает и его в вынужденных колебаниях не учитывают .

Запишем решение в вещественном виде (и без  $x_2(t)$ ):

$$x = a \cos(\omega t - \varphi).$$

Амплитуда и фаза колебаний определяются выражениями

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

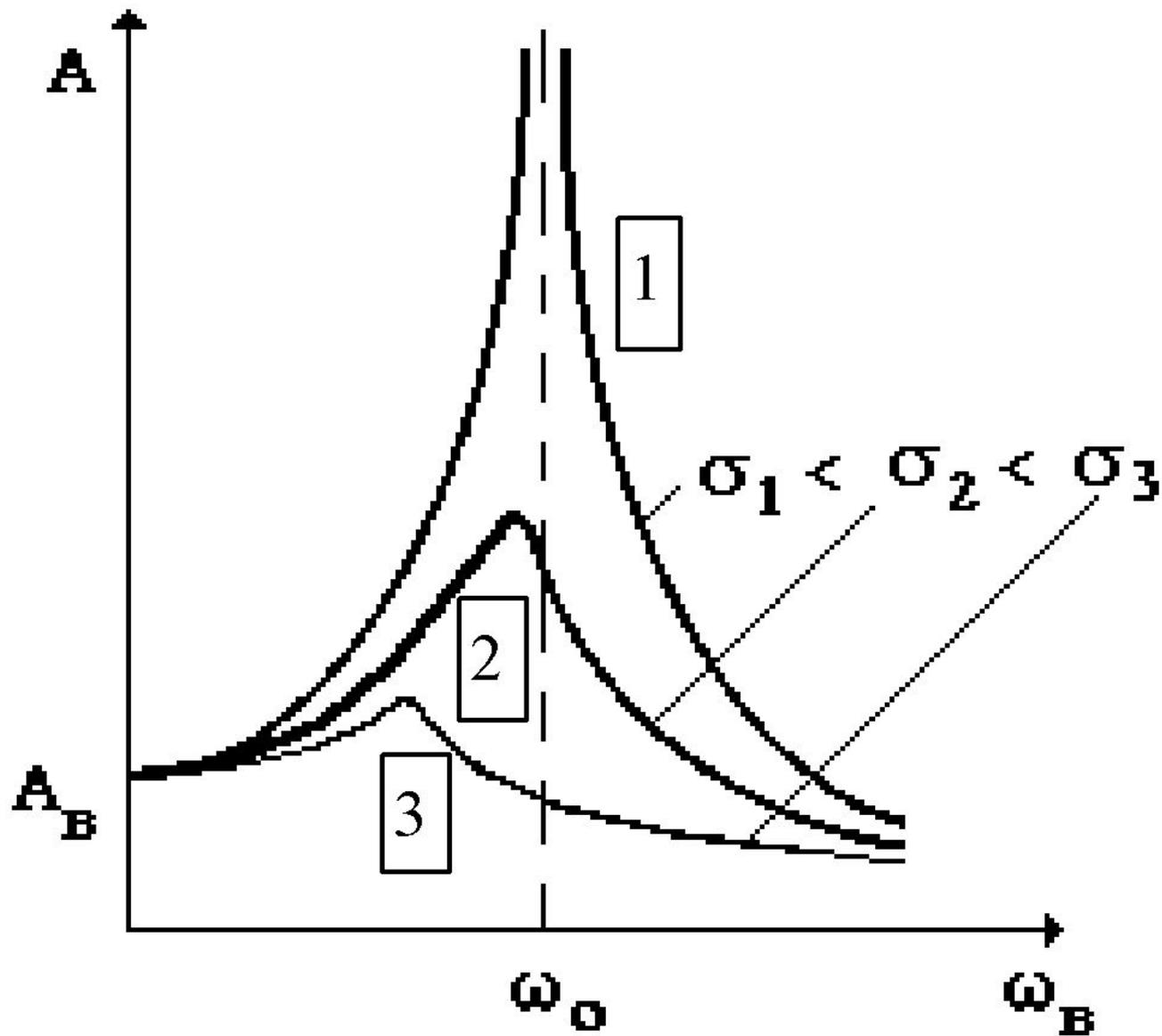
Исследуем поведение амплитуды.  
При  $\omega = 0$  получаем стационарное отклонение  $a_0 = f_0/\omega_0$ . Максимальное значение амплитуды при частоте

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad \left( \frac{da}{d\omega} = 0 \right).$$

максимум скорости при  $\omega = \omega_0$ ,

максимум ускорения при

$$\omega = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

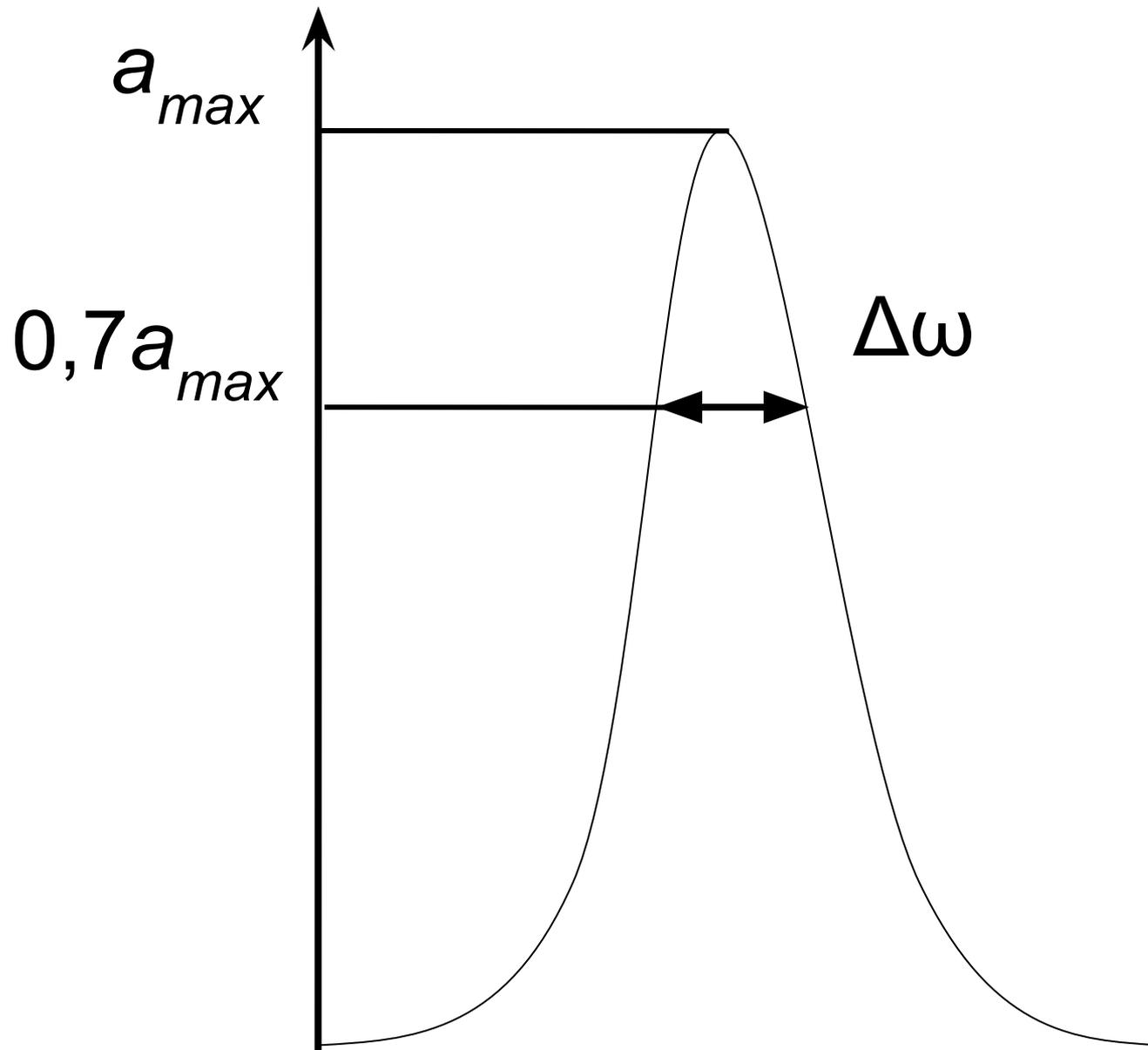


Эта кривая называется резонансной кривой. Если (в случае малых затуханий) провести горизонтальную линию по уровню

$$a = a_{\max} / \sqrt{2}$$

то можно задать добротность следующим образом

$$\frac{a_{\max}}{a_0} = Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{d} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$



Резонанс – это явление возбуждения сильных колебаний при частоте внешней возбуждающей силы, равной частоте системы.

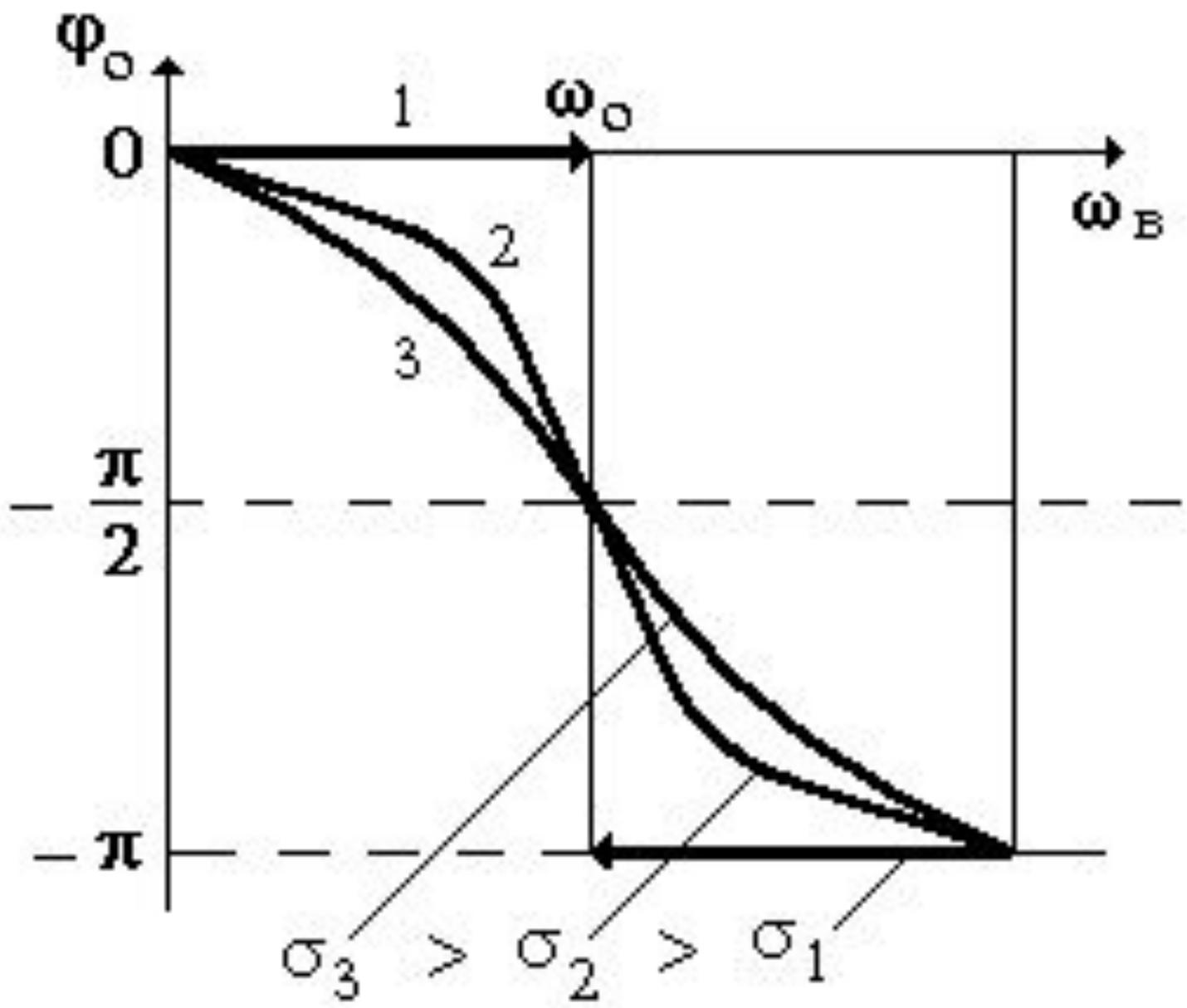
Но как видно из формулы резонансной частоты, резонанс достигается в случае не строго равенства частоты собственной и частоты внешней периодической

силы: 
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Рассмотрим фазу в случае  
вынужденных колебаний и в случае  
резонанса

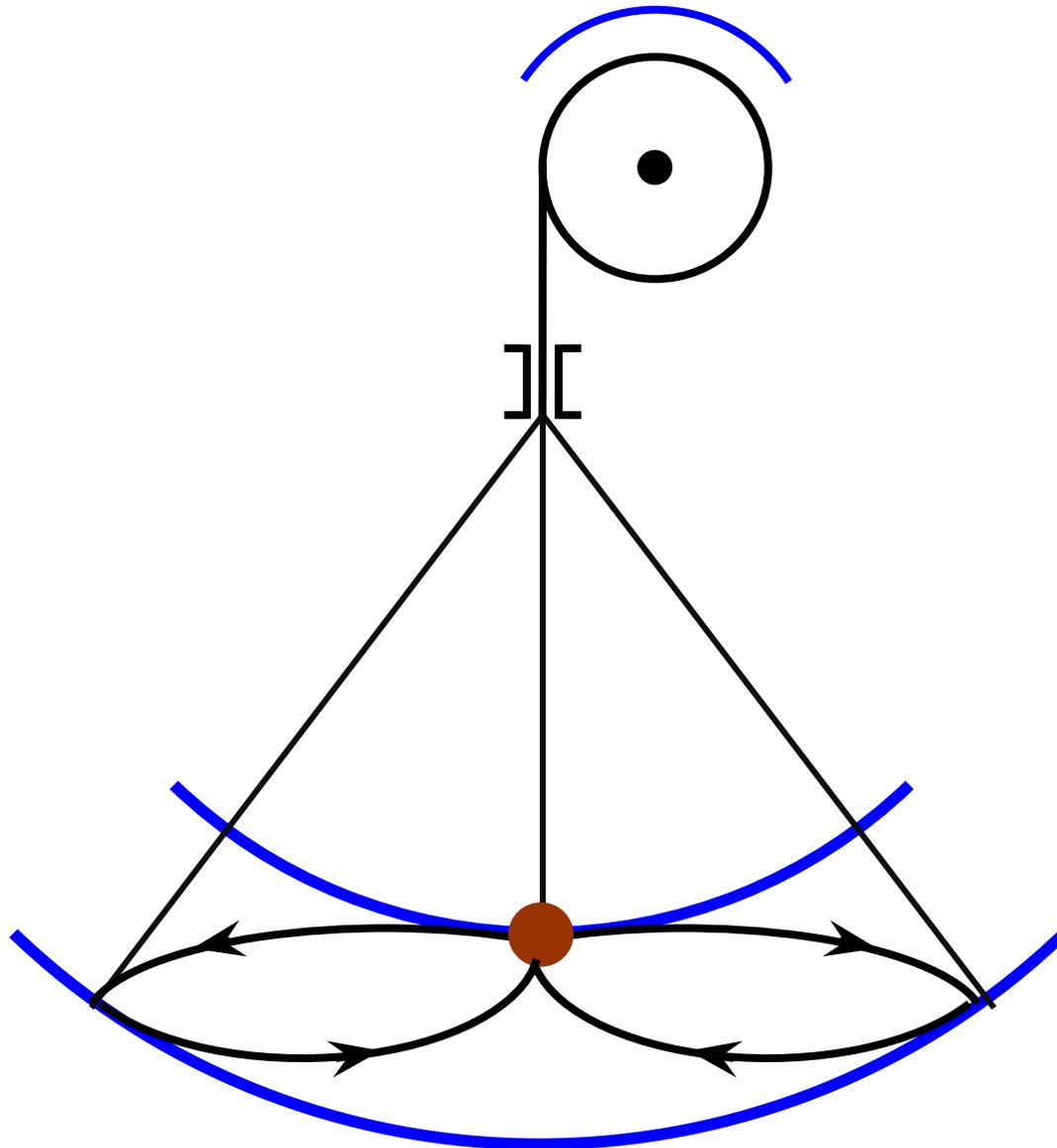
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{\text{рез}} = \infty.$$

рассмотрим фазовую резонансную  
кривую



Параметрический резонанс  
– это явление заключается в  
совершаемом в такт с колебаниями  
периодическим изменением какого-  
либо параметра системы.

Возьмём математический маятник.  
Будем уменьшать длину подвеса маятника в положениях равновесия и увеличивать в крайних положениях.  
В результате этого маятник будет сильно раскачиваться.



Увеличение энергии маятника происходит за счёт работы, которую совершает сила, действующая на нить. В положениях равновесия сила натяжения нити больше, чем в крайних, поэтому прирост энергии здесь больше, чем убыль в крайних.

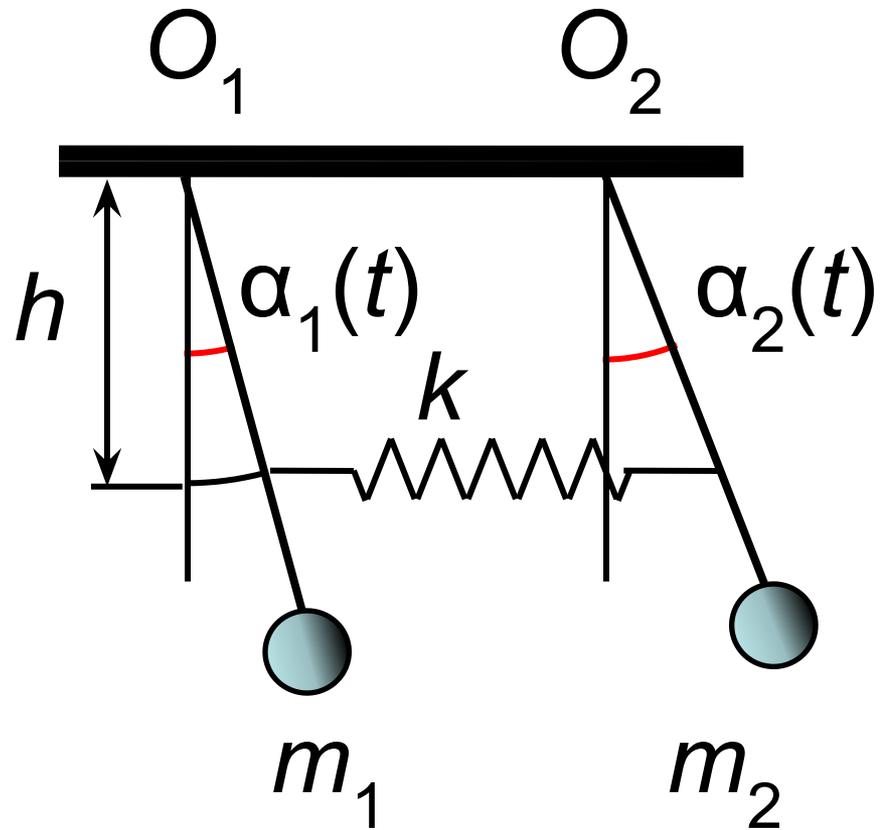


# 28. Связанные колебания. Нормальные координаты и нормальные моды колебаний.

Рассмотрим закономерности поведения колебательных систем с двумя степенями свободы на следующем примере:

пусть два маятника, связаны пружиной, будем рассматривать малые колебания, так что

$$\sin\alpha_1 \approx \alpha_1, \sin\alpha_2 \approx \alpha_2.$$



Пружина жёсткости  $k$  закреплена на расстоянии  $h$  от точек подвеса  $O$  маятников, причём при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  пружина не деформирована.

Уравнение движения ( $I_0 = M$ )  
 для первого маятника имеет вид

$$m_1 \ell_1^2 \ddot{\alpha}_1 = -m_1 g \ell_1 \alpha_1 + k(h\alpha_2 - h\alpha_1)h,$$

где  $m_1 \ell_1^2$  – момент инерции  
 относительно оси  $O_1$ ,

$$(-mg\ell \sin \alpha) \approx mg\ell \alpha$$

– момент силы тяжести,

$h(\alpha_2 - \alpha_1)$  – деформация (удлинение)  
 пружины,

$kh^2(\alpha_2 - \alpha_1)$  – момент упругой силы  
относительно той же оси.

Аналогично, для второго маятника

$$m_2 \ddot{\alpha}_2 = -m_2 g \alpha_2 + k(h\alpha_2 - h\alpha_1)h =$$

$$m_2 \ddot{\alpha}_2 = -m_2 g \alpha_2 + kh^2(\alpha_2 - \alpha_1),$$

Эти два уравнения преобразуем к  
**виду**

$$\begin{cases} \omega_1^2 \alpha_1 + \omega_{01}^2 \alpha_1 = -\sigma_1^2 (\alpha_1 - \alpha_2), \\ \omega_2^2 \alpha_2 + \omega_{02}^2 \alpha_2 = -\sigma_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1), \end{cases}$$

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \quad \text{и} \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$$

**собственные частоты каждого маятника.**

Частоты  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  частоты, которые были бы, если бы не было связи между ними.

$$\sigma_1^2 = \frac{kh^2}{m_1 \Delta_1^2}, \quad \sigma_2^2 = \frac{kh^2}{m_2 \Delta_2^2}$$

– коэффициенты, описывающие взаимодействие маятников, обусловленное пружиной.

В общем случае колебания не будут гармоническими. Рассмотрим простейший случай:

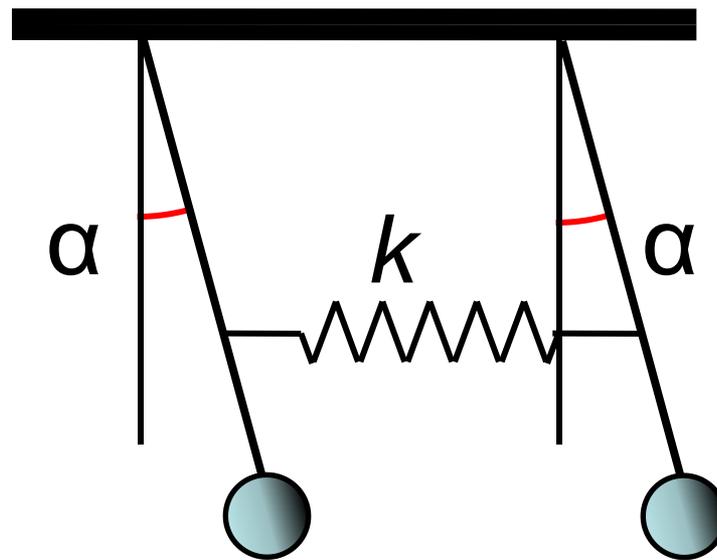
$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

Здесь может быть два крайних случая.

$$1) \alpha_1 = \alpha_2, \begin{cases} \ddot{\alpha}_1 + \omega_0^2 \alpha_1 = 0, \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_0^2 \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Решение:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = A \cos(\omega t + \varphi).$$

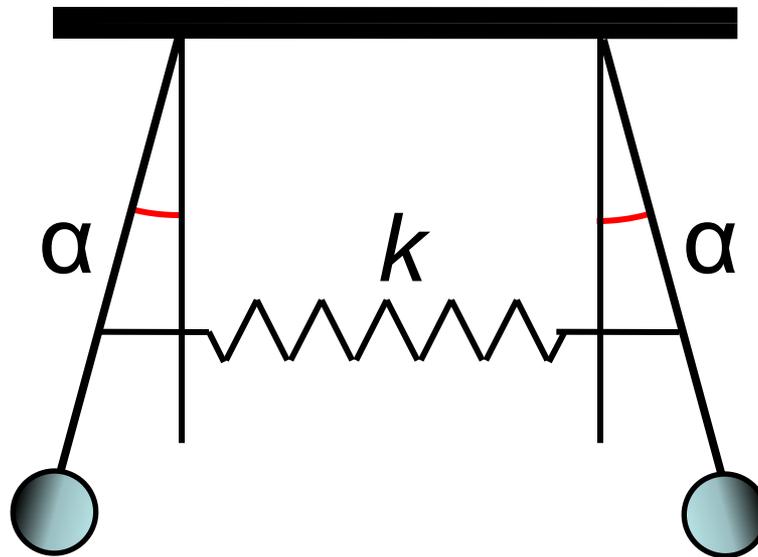


$$2) \alpha_1 = -\begin{cases} \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{cases} + (\omega_0^2 + \sigma^2)\alpha_1 = 0,$$

$$\begin{cases} \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{cases} + (\omega_0^2 + \sigma^2)\alpha_2 = 0.$$

Решение:

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = A \cos(\sqrt{\omega_0^2 + \sigma^2} \cdot t + \varphi).$$



Найденные решения называются  
нормальными колебаниями или  
модами.

1-я мода

$$\alpha_{11}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$\alpha_{12}(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1).$$

2-я мода

$$\alpha_{21}(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha_{22}(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \sigma^2},$$

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = -A_2.$$

В общем случае решение есть  
суперпозиция мод:

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \alpha_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$$

Конкретный вид этого решения  
зависит от начальных условий:  
 $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$  ( $A_1 = B_1, A_2 = -B_2$ ).

Другими словами, колебания осцилляторов представляют собой суперпозицию двух гармонических колебаний разных частот  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$ .

При произвольных начальных условиях колебания не являются гармоническими.

(Это решение для случая  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ .)



# ЛЕКЦИЯ № 10

## Колебания.

## ВОПРОСЫ

29. Теорема Фурье.

Спектральное разложение. Принцип радиосвязи.

30. Ангармонические колебания.  
Автоколебания.

29. Теорема Фурье.  
Спектральное разложение. Принцип  
радиосвязи.

Теорема Фурье: Любая периодическая функция может быть разложена преобразованием Фурье, то есть представлена в виде суммы конечного или бесконечного числа синусоидальных и/или косинусоидальных функций.

Запишем ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}$$

здесь  $f(t)$  – периодическая функция,

$C_k$  – коэффициенты,  $i$  – мнимая

единица,  $\omega_k$  – частоты,

соответствующие коэффициентам

$C_k$ ,  $\omega_k = k \cdot \Omega$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$\Omega$  – основная частота.

Для вычисления  $C_k$  умножим обе части на  $e^{-i\omega_m t}$  и проинтегрируем:

$$\int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_0^T e^{i(\omega_k - \omega_m)t} dt$$

если  $k \neq m$ , то интеграл справа равен 0, если  $k = m$ , то период  $T$ . Отсюда

$$C_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt$$

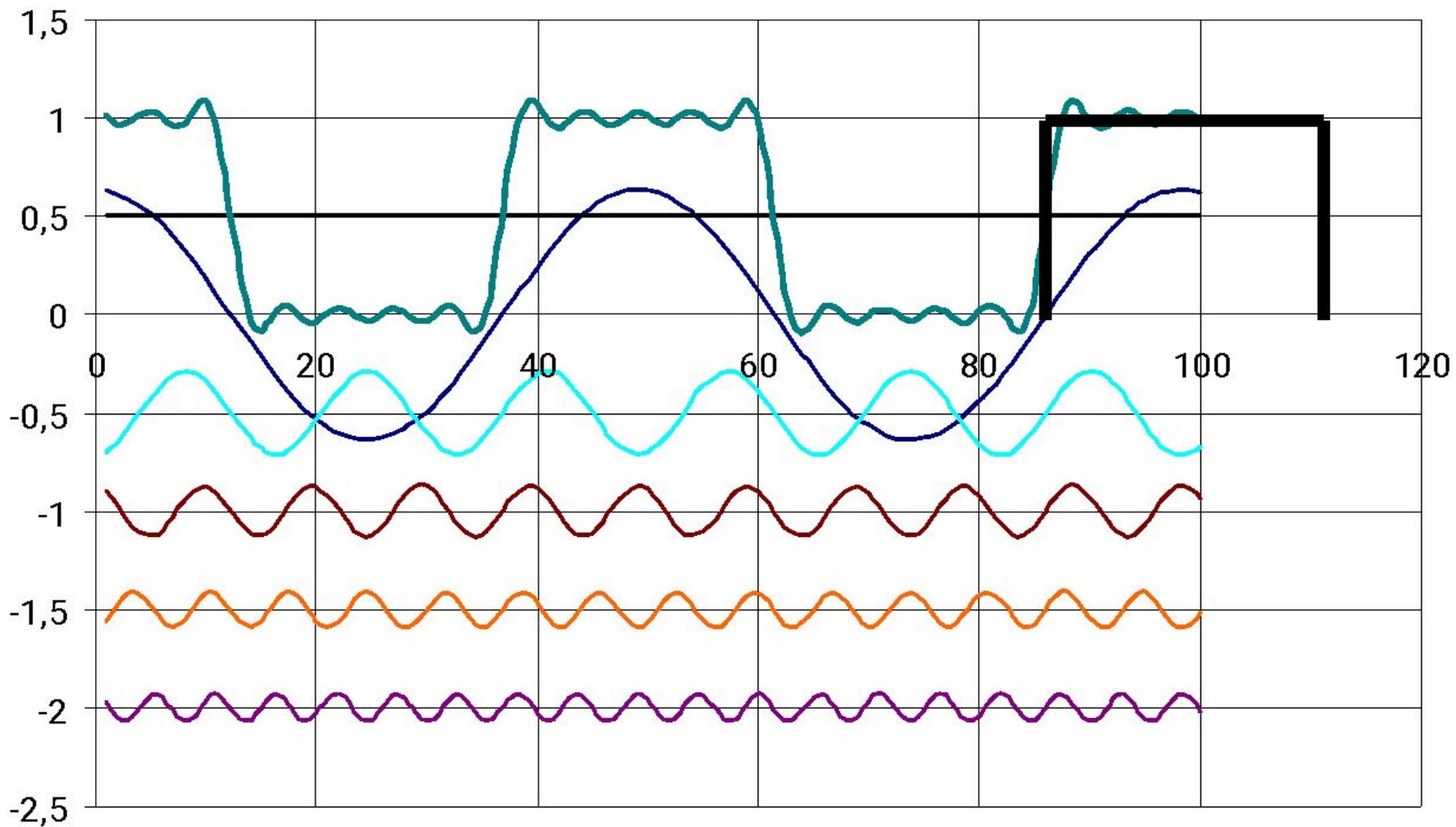
В тригонометрическом виде теорема Фурье выглядит следующим образом

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Пример: Рассмотрим разложение периодической чётной функции (в разложении будут только косинусы) с использованием первых десяти членов ( $a_0, a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 \neq 0$ ;  $a_2, a_4, a_6, a_8 = 0$ ).



## Модулированное колебание

$$X(t) = A(t) \cos(\omega(t)t + \varphi(t))$$

здесь  $A(t)$  – амплитудная модуляция,  
 $\omega(t)$  – частотная модуляция,  
 $\varphi(t)$  – фазовая модуляция.

Рассмотрим синусоидальную  
модуляцию:

$$A(t) = A_0 (1 + \alpha \cos(\Omega t))$$

$A_0$ ,  $\alpha$ ,  $\Omega$  – const,  $\omega$  – несущая частота,  
 $\alpha$  – глубина модуляции,  
 $\Omega$  – частота модуляции.

Получаем в итоге колебание на трёх частотах:

$$X(t) = A_0 \cos(\omega t) + \frac{\alpha A_0}{2} (\cos((\omega + \Omega)t) + \cos((\omega - \Omega)t))$$

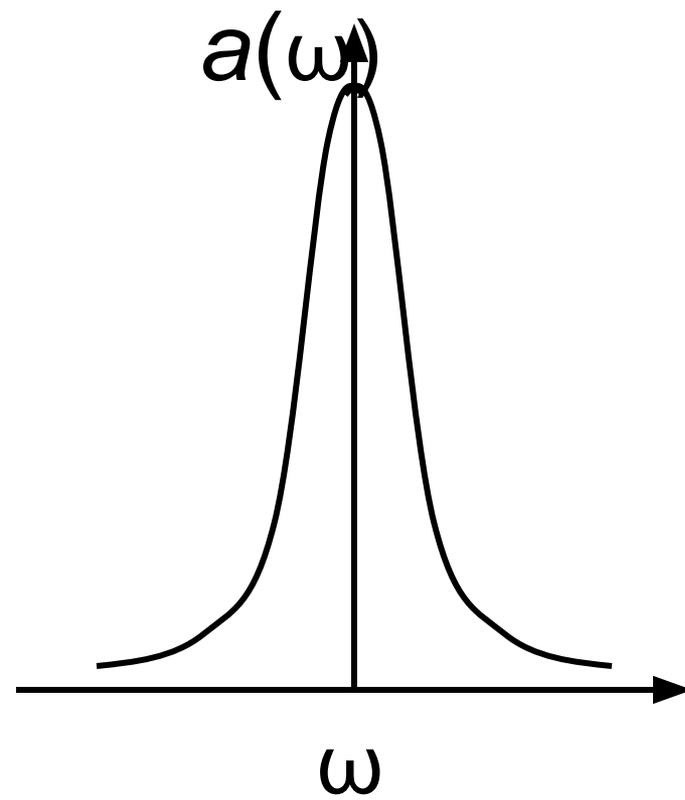
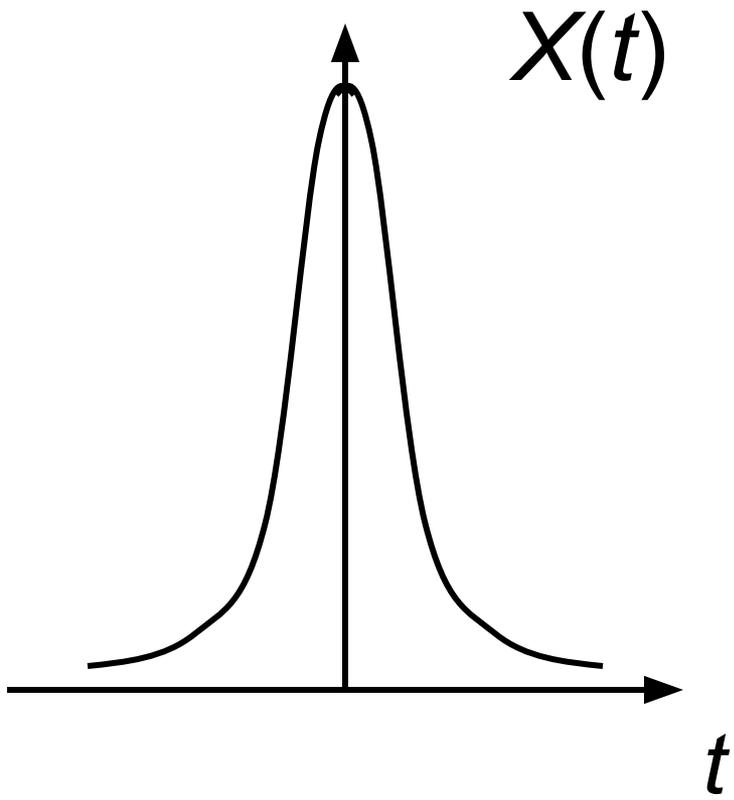
С помощью гармонического осциллятора можно выделить одну из частот, совпадающую с его собственной  $\omega$ .

Теорема Фурье для непериодической функции  $X(t)$ :

$$X(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Здесь имеет место непрерывное множество синусоидальных колебаний, частоты которых непрерывно заполняют определённый интервал.



## Принцип радиосвязи

Человеческое ухо воспринимает частоту 20 – 20000 Гц, но для передачи такого сигнала нужны гигантские антенны

$$L = \lambda/2 = c/2\nu \sim 10^5 \text{ м.}$$

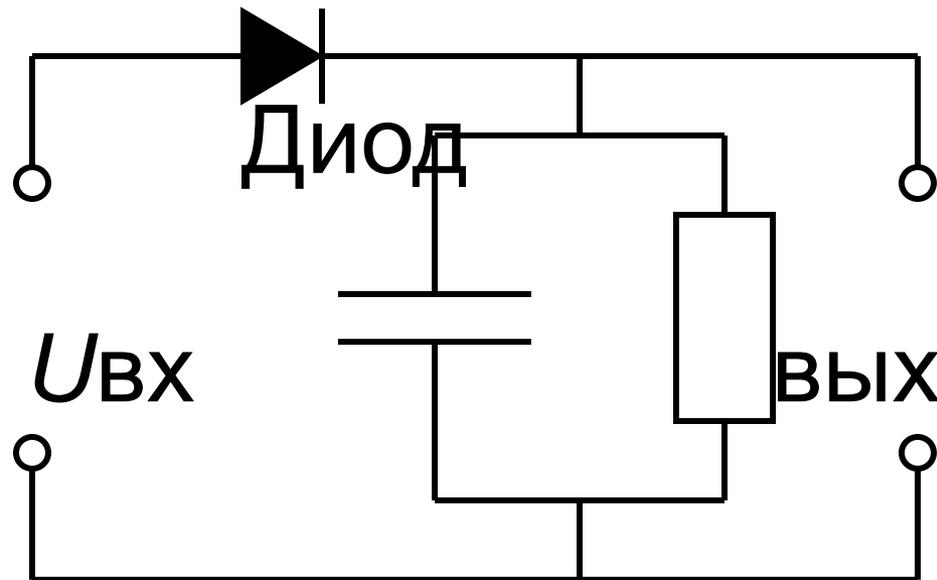
$\lambda$  – длина волны,  $c$  – скорость света,  
 $\nu$  – частота.

Для передачи используют радиоволны на частотах  $10^5 - 10^8$  Гц и даже на частотах  $10^{10}$  Гц. Сигнал модулируют низкой частотой (звуковая частота), а передают на высокой частоте (радиоволны).

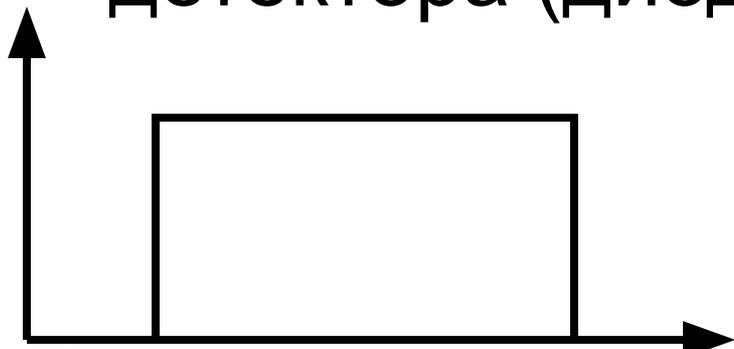
Модуляция может быть амплитудной, фазовой, частотной. Пример амплитудной модуляции ( $f(t)$  – модулирующая функция):

$$I = I_0(1 + f(t))\sin(\omega t + \varphi)$$

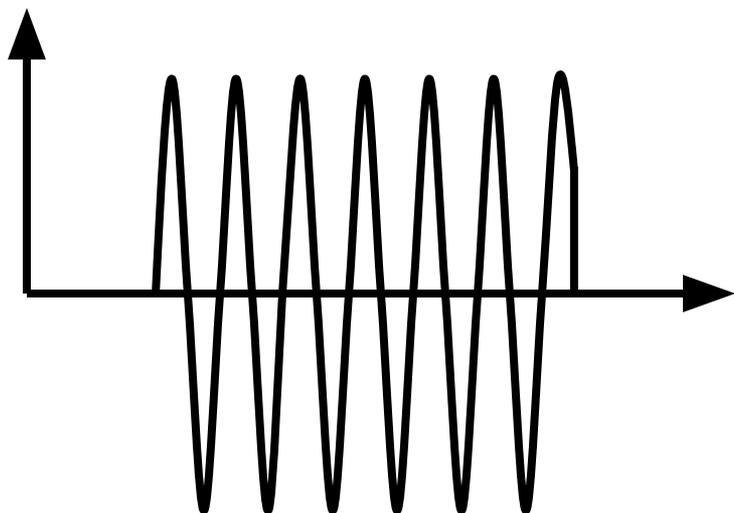
В приёмной антенне сигнал необходимо демодулировать, детектировать. Схема простейшего детектора.



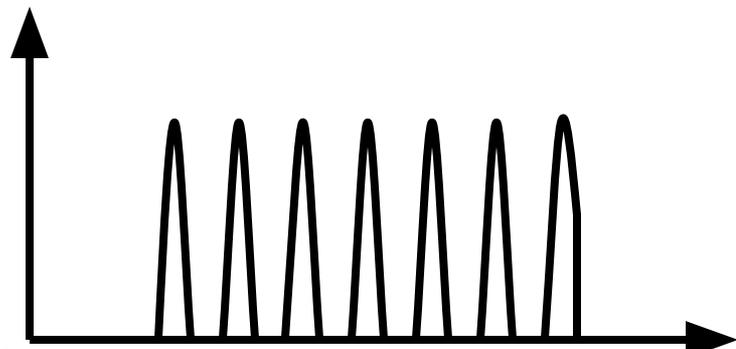
1) сигнал  
детектора (диода)



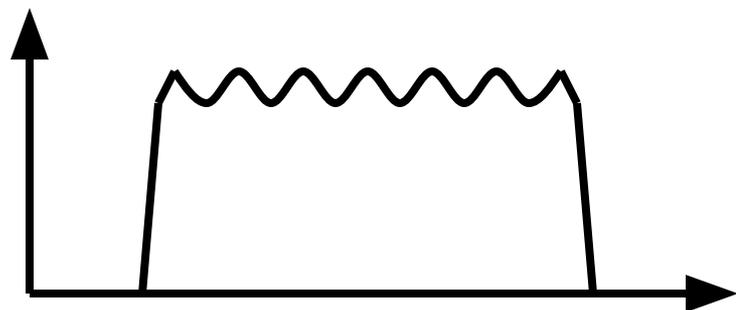
2) модулирующий  
сигнал



3) сигнал после  
детектора (диода)



4) детектированный  
сигнал на выходе





# 30. Ангармонические колебания. Автоколебания.

# Ангармонические колебания

Уравнение динамики  
математического маятника имеет

ВИД:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0$$

В случае малых отклонений  
( $\alpha \approx \sin \alpha$ ) колебания можно считать  
гармоническими:

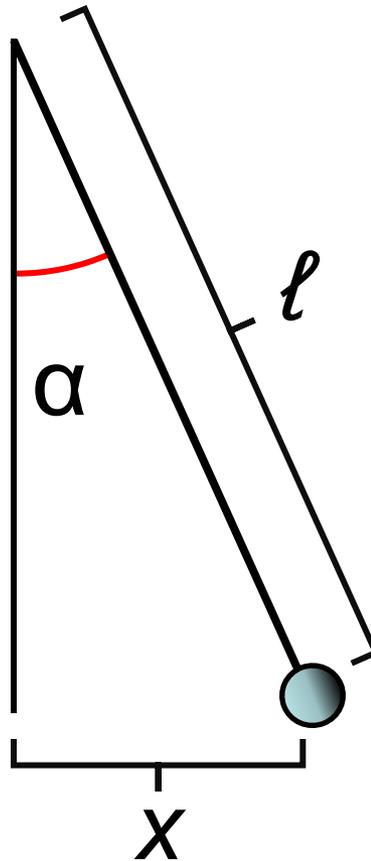
$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$$

Именно в этом случае, в случае гармонических колебаний, период не зависит от амплитуды колебаний.

Возвращающая сила прямо пропорциональна смещению:

$$F = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha \approx mg \cdot \alpha \approx mg \cdot \frac{x}{l}$$

$$x \approx \ell \sin \alpha$$



В случае не малых отклонений

$$\left( \sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} \right)$$

колебания перестают быть гармоническими: сила нелинейно зависит от смещения

$$F = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

В этом случае период зависит от амплитуды.

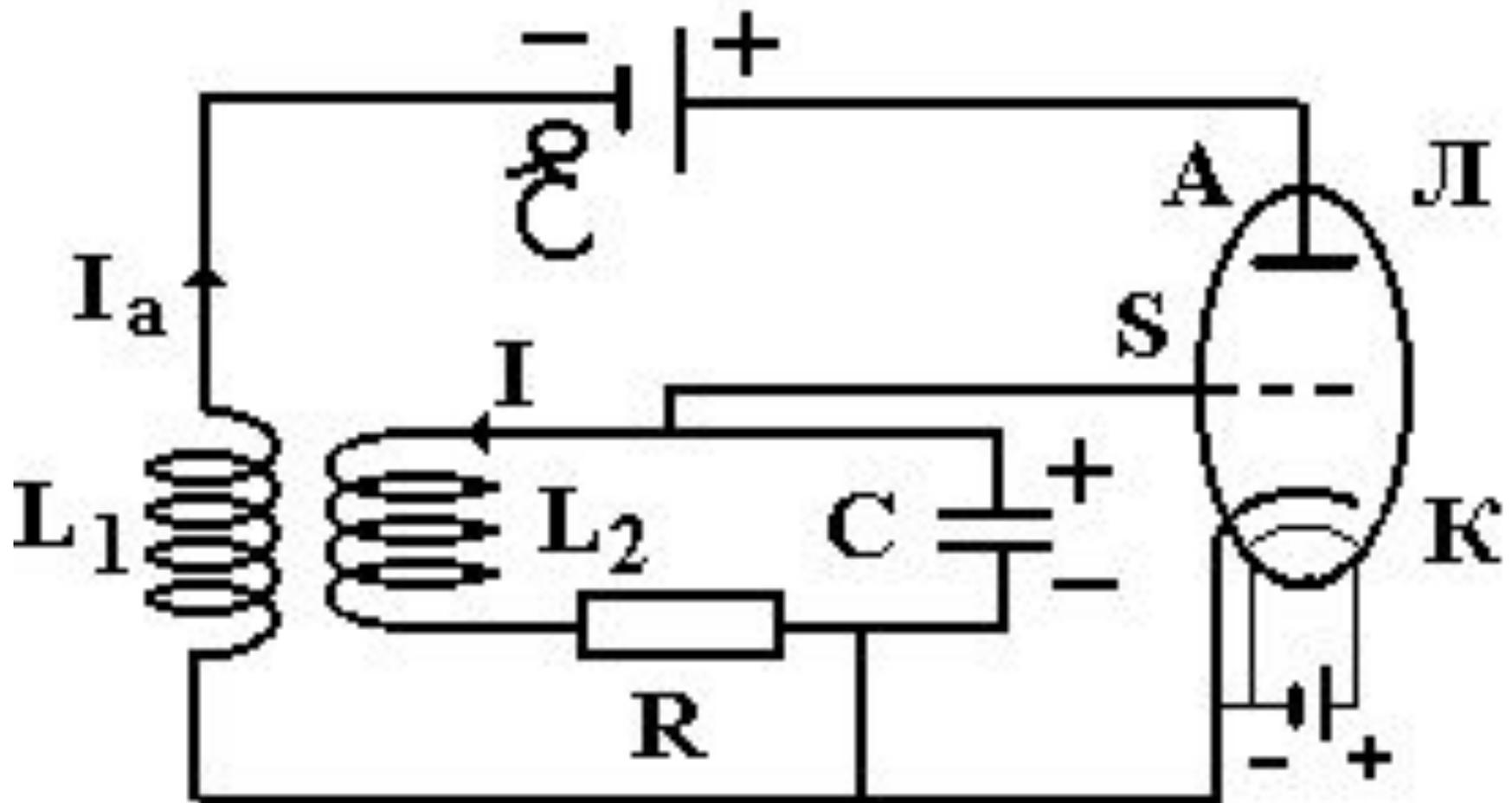
Примеры: маятник с большими отклонениями, пружинный маятник с переменной жёсткостью, колебательный контур, в катушке которого сердечник, при больших амплитудах.

# Автоколебания

Вынужденные незатухающие колебания в реальных системах, период и амплитуда которых не зависит от характера внешнего воздействия, а определяется свойствами самой автоколебательной системы.

**Автоколебательные системы –  
системы, способные совершать  
незатухающие колебания в  
отсутствии периодического внешнего  
воздействия.**

Кратко рассмотрим возникновение автоколебаний на примере лампового генератора электромагнитных колебаний, где  $L$  – лампа-триод,  $S$  – сетка,  $A$  – анод,  $K$  – катод,  $L_2$  – индуктивность,  $R$  – сопротивление,  $C$  – ёмкость,  $L_1$  – катушка обратной связи,  $\mathcal{E}$  – ЭДС источника тока.



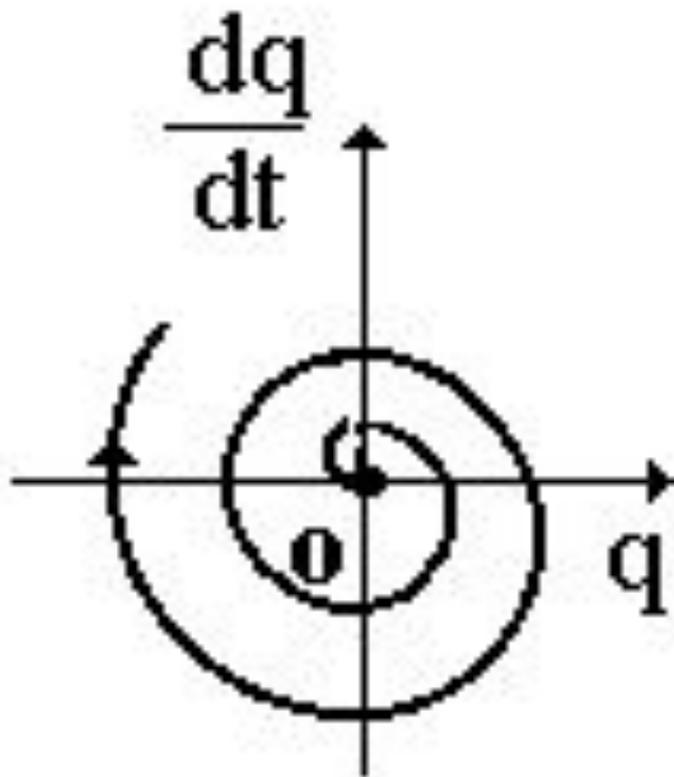
При разряде конденсатора через лампу будет течь анодный ток  $I_a$ , а потенциал сетки упадет, что приведет к уменьшению анодного тока.

Если витки катушек намотаны параллельно, то за счет взаимной индукции затухание в контуре увеличится.

Возникнет отрицательная обратная СВЯЗЬ.

Если же витки катушек намотаны антипараллельно, то затухание в контуре уменьшится, амплитуда колебаний начнет возрастать. Возникнет положительная обратная СВЯЗЬ.

Вид фазовой кривой для такого случая приведен на рисунке.



Уравнение для данного контура  
можно записать в виде:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -\frac{MS}{C}q$$

ИЛИ

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$q$  – заряд на обкладках  
конденсатора.

$$2\delta = \frac{R}{L} + \frac{MS}{LC}$$

$M, S = \text{const}$ ,  $S$  – крутизна сеточной характеристики;  $M$  – коэффициент взаимной индукции, колебания в автоколебательном контуре будут подчиняться закону:

$$q = q_0 e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

Если выполняется условие  $-SM / C > R$  ( $\delta < 0$ ), то состояние равновесия будет неустойчивым фокусом. Любое малое отклонение системы от равновесия будет возрастать. Колебательный контур начнет самовозбуждаться.

В контуре устанавливаются автоколебания с постоянной амплитудой, которая не зависит от начальных условий, а определяется параметрами системы. Это есть общее свойство всех автоколебательных систем.

Роль нелинейности.

Амплитуда автоколебаний от начальных условий не зависит.

Автоколебания могут возбуждаться периодическими внешними силами, но период автоколебаний не зависит от периода этих сил.

Релаксационные колебания – это колебания, которые происходят под действием постоянной вынуждающей силы за счёт перехода системы из одного состояния в другое (пример: ветер и дерево). Параметрические колебания – колебания за счёт изменения параметра системы.



# ЛЕКЦИЯ № 11

## Волны

# ВОПРОСЫ

31. Волны. Типы и характеристики волн. Волновое уравнение и уравнение плоской бегущей волны. Стоячие волны (вывод).
32. Упругие волны. Энергия волны. Вектор Умова.
33. Поведение звука на границе раздела двух сред. Ударные волны. Эффект Доплера.

## Вопрос № 26.

31. Волны. Типы и характеристики волн. Волновое уравнение и уравнение плоской бегущей волны. Стоячие волны (вывод).

Волна – процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени.

Таким образом, волна это некоторая функция  $S = S(x, y, z, t)$ .

Эту функцию можно представить в следующем виде:

$$S(z, t) = S(z - vt)$$

– распространение волны вдоль оси  $Z$ .

# Волновое уравнение (пространственное и вдоль оси Z)

$$\nabla^2 S - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0.$$

оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Рассмотрим плоскую  
монохроматическую волну (на одной  
частоте)

$$S(z, t) = a \cos(\omega t - kz)_z.$$

$\omega$  – циклическая частота волны,

$k = 2\pi/\lambda = \omega/v$  – волновой вектор,

$v = \omega/k = \lambda\omega/2\pi$  – фазовая скорость,

$\lambda$  – длина волны,

$T$  – период,

$(\omega t - kz)$  – фаза волны.

Для плоской бегущей волны  $S$  и фаза одинаковы, синфазны, в любой точке  $(x, y)$  плоскости  $z = \text{const}$ .

Поверхности, где колебания синфазны, называются волновыми поверхностями.

Поверхность, до которой дошла волна в данный момент времени, называется волновым фронтом.

Волновой вектор показывает  
направление распространения  
ВОЛНЫ

$$S(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} - \varphi)$$

Стационарные волны – волновая функция постоянна.

Синусоидальная волна – колебания в некоторой точке пространства происходят по закону синуса.

Скалярные волны – волновое возмущение описывается скалярной величиной (плотность, давление).

Векторные волны – волновое возмущение описывается векторной величиной (напряжённость)

Продольные волны – колеблющая  
 величина совершает колебания  
 параллельно волновому вектору  
 (вдоль направления  $\vec{S} \parallel \vec{k}$ ),  
 Поперечные волны – колеблющая  
 величина совершает колебания  
 перпендикулярно волновому вектору  
 (поперёк направления  $\vec{S} \perp \vec{k}$ )

Плоскополяризованная волна – волна, колебания в которой вектора  $S$  происходят в фиксированной плоскости. Эта плоскость называется плоскостью поляризации.

## Стоячие волны

Рассмотрим сложение двух волн:

$$S_1(z, t) = a \cos(\omega t - kz),$$

$$S_2(z, t) = a \cos(\omega t + kz),$$

одна волна падающая (вектор  $-k$ ),  
другая волна отражённая от какой-либо преграды (вектор  $+k$ ).

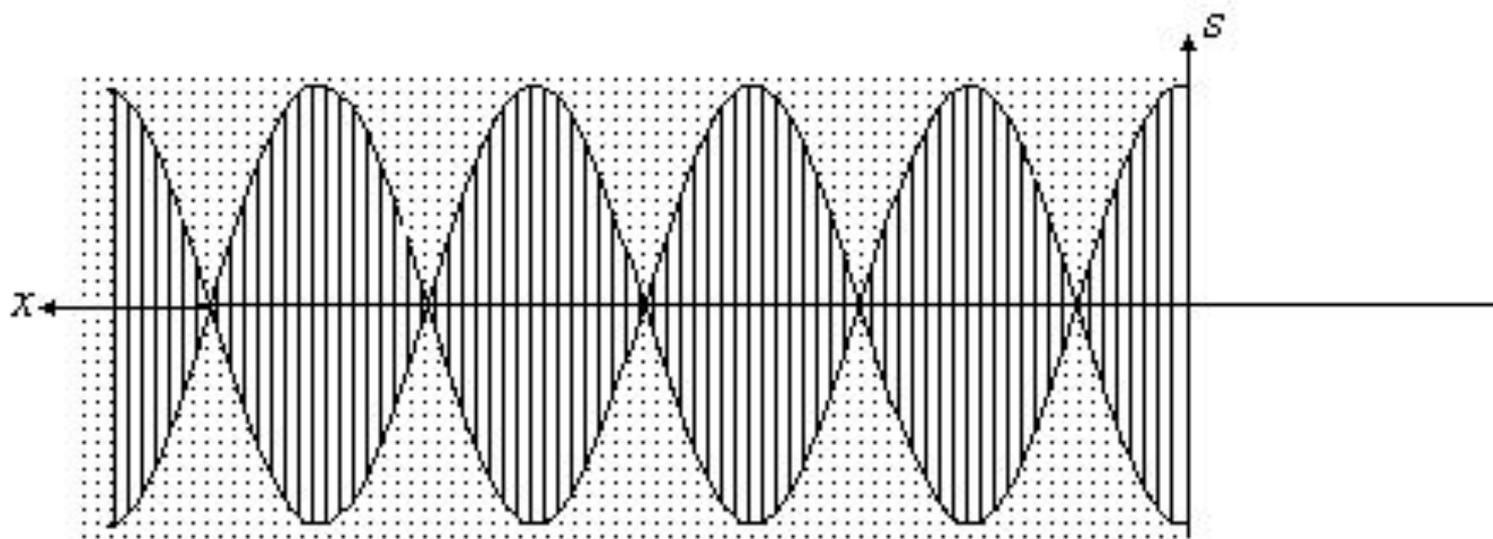
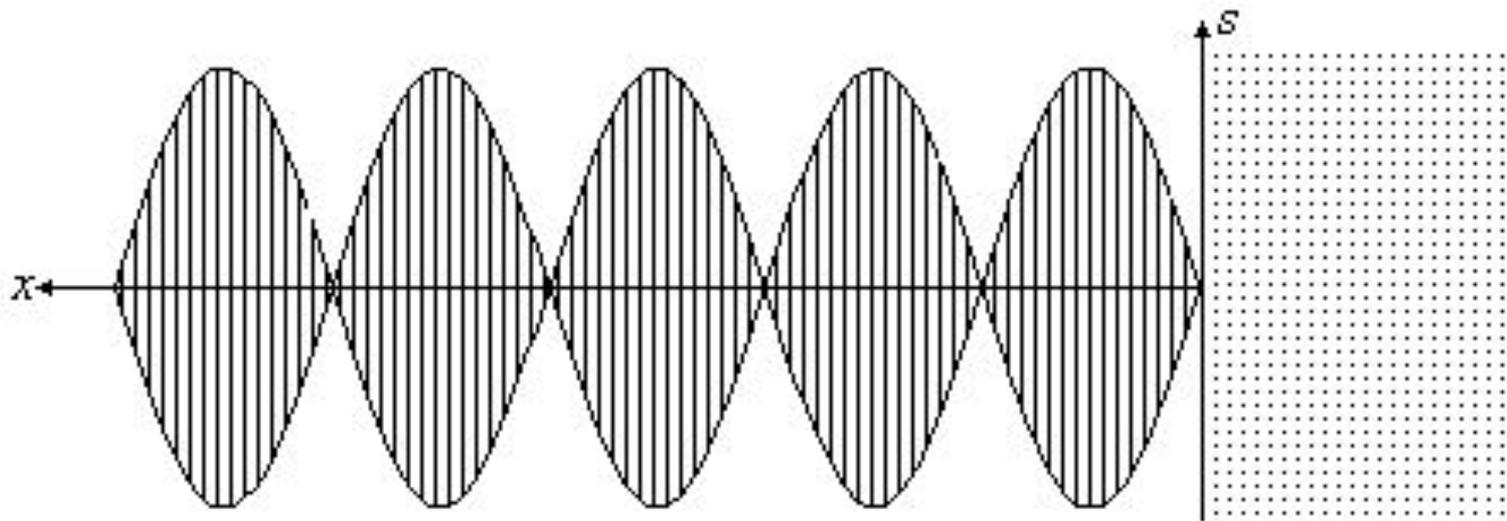
В результате сложения падающей и отражённой волны получаем выражение:

$$S_1 + S_2 = 2a \cos(kz) \cos(\omega t).$$

Временные и пространственные коэффициенты оказались разделены. Это выражение описывает волну, у которой нет перемещения волновых поверхностей. Это и есть стоячие волны.

Если волна отражается от среды менее плотной, чем среда распространения, то сдвига фаз в волне не происходит. В этой точке у стоячих волн всегда максимум амплитуды – пучность.

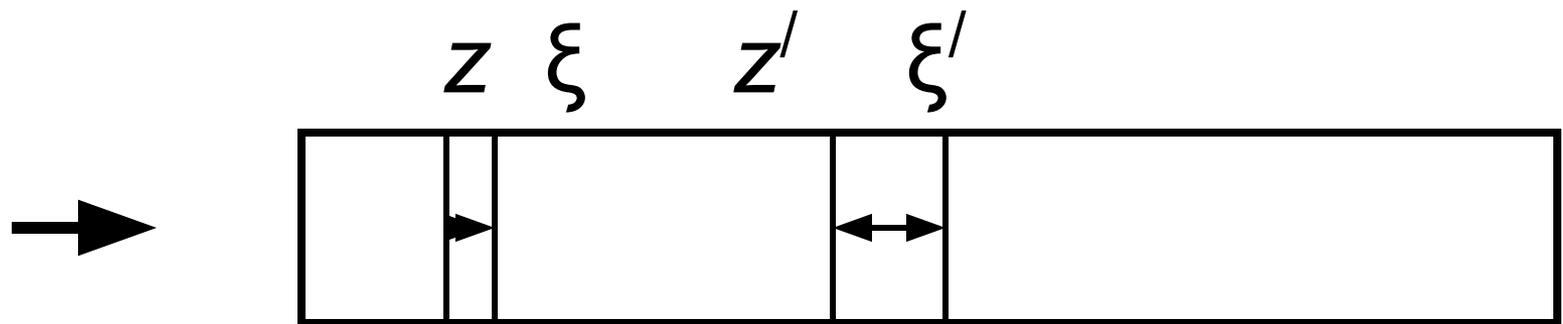
Если волна отражается от более плотной среды, то происходит сдвиг фазы на пол длины волны. В этой точке у волны узел – нулевая амплитуда.





# 32. Упругие волны. Энергия волны. Вектор Умова.

Упругие волны в твёрдых телах  
 Рассмотрим стержень, на который  
 оказывается некоторое ударное  
 воздействие.



здесь  $z$  – координата,  $\xi$  – новая  
 координаты частиц,  $\Delta z$  – смещение  
 частиц из-за удара  $F$  ( $z + \Delta z = \xi$ ).

Продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{\xi - \xi'}{z - z'} \Rightarrow \varepsilon = \frac{d\xi}{dz}$$

$dz$  – расстояние между точками без напряжения,  $d\xi$  – расстояние между точками при деформации (из-за распространения волны).

Сами частицы стержня смещаются незначительно, приводя в движение соседние частицы, те передают импульс соседним частицам и т.д. – именно так малые смещения частиц приводят к распространению волнового возмущения на большие расстояния.

# Волновое уравнение упругих деформаций

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0.$$

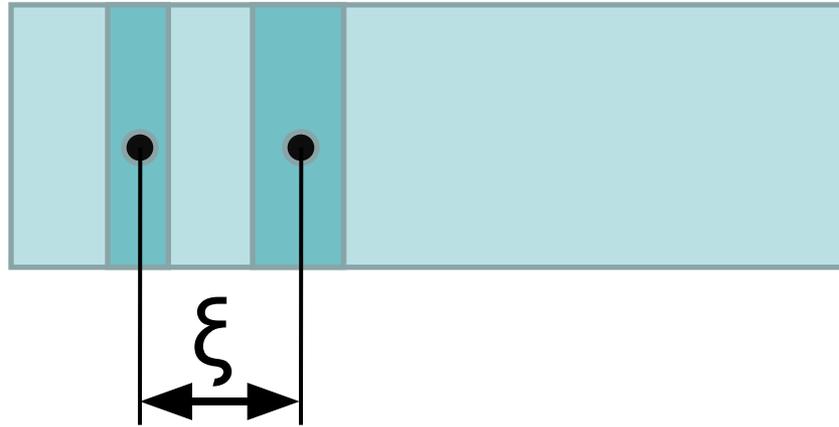
$v^2 = E/\rho_0$  – скорость волны,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho_0$  – плотность вещества без нагрузки.

Упругие волны в газах и жидкостях  
Волна в газах или жидкостях  
распространяется за счёт изменения  
давления и плотности.

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0.$$

$\xi$  – смещение центра масс участка  
среды.



$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \text{ — скорость волны,}$$

$dp$  — изменение давления,  $d\rho$  —  
изменение плотности.

Для газов

$$p = \frac{\rho RT}{M}, \quad v = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{M}}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v},$$

$p_0$  – давление в обычных условиях,

$\rho_0$  – плотность в обычных условиях,

$\gamma$  – показатель адиабаты,  $C_p$ ,  $C_v$  –

теплоёмкости при постоянном

давлении и объёме

1 моля газа, соответственно.

## Энергия волны

В упругой волне энергия складывается из кинетической и потенциальной составляющих.  
Объёмная плотность энергии

$$w = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

Волновой процесс представляет собой передачу энергии без передачи вещества.

Введём вектор – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойтинга):

$$q = -\sigma v, \quad \vec{q} = -\sigma v \vec{n}.$$

$\sigma = E\varepsilon$  – напряжение,  $n$  – единичный вектор, который направлен так же как и направление бегущей волны.

В газе или жидкости

$$\overline{q} = \Delta p \overline{v} n$$

Поток энергии через площадку  $S$  за время  $dt$ :

$$dW = -q S dt$$



33. Поведение звука на границе раздела двух сред. Ударные волны. Эффект Доплера.

Поведение звука границе раздела  
двух сред.

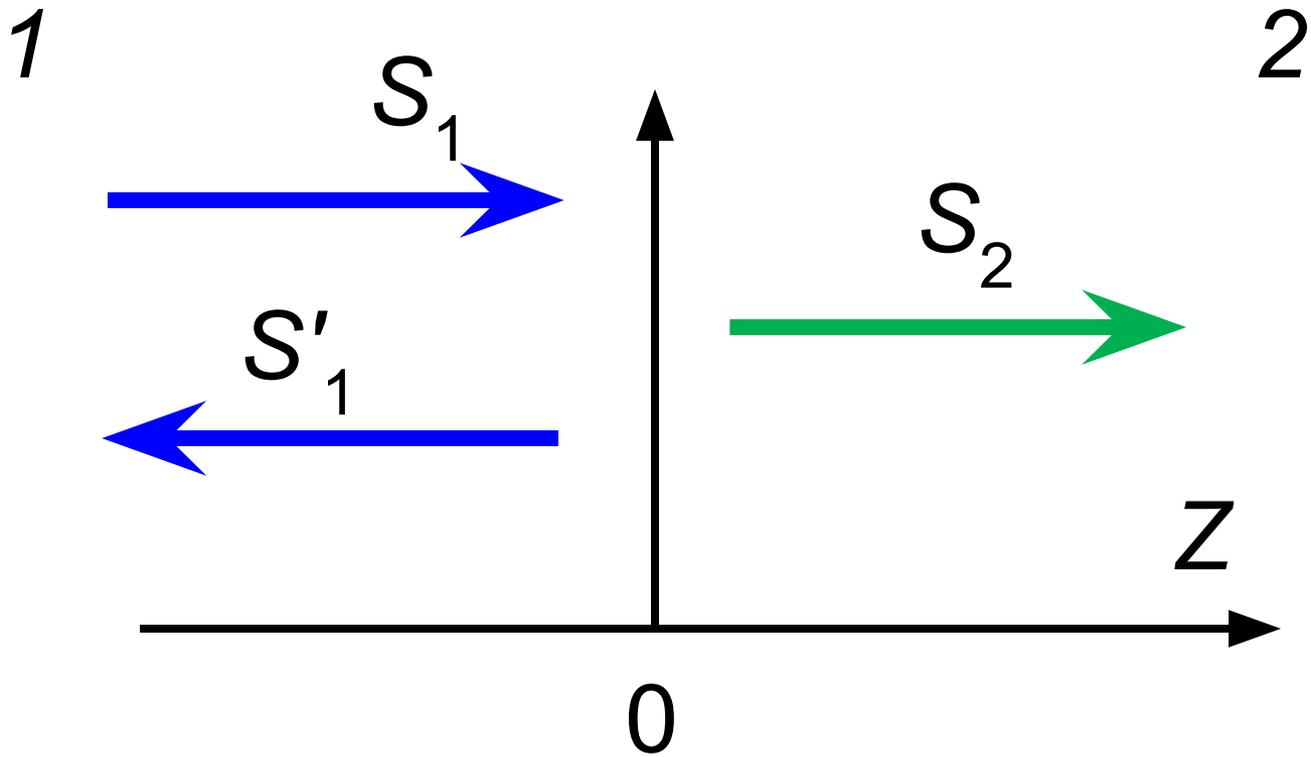
Рассмотрим плоскую звуковую волну

$$S_1 = a_1 \cos(\omega t - k_1 z),$$

в области  $z < 0$ .

На границе раздела ( $z = 0$ ) волна  
разделяется на две:

прошедшую ( $S_2$ ) и отражённую ( $S'_1$ ).



Прошедшая волна

$$S_2 = a_2 \cos(\omega t - k_2 z),$$

отражённая волна

$$S'_1 = a'_1 \cos(\omega t + k_1 z),$$

$$k_1 \neq k_2, \quad v_1 \neq v_2.$$

Запишем граничные условия:

$$E_1 k_1 (a_1 - a'_1) = E_2 k_2 a_2.$$

Это условие получено из условия равенства сил, действующих на границе со стороны одной среды на другую.

Из условия равенства сил

$$a'_1 = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} a_1, \quad a_2 = \frac{2\gamma}{1 + \gamma} a_1.$$

здесь

$$\gamma = \frac{E_2 k_2}{E_1 k_1} = \frac{\sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_1 \rho_1}}$$

Порог слышимости (минимальная слышимая интенсивность звука)

$$I_0 \approx 10^{-12} \text{ Вт/м}^2,$$

Болевой порог

$$I \approx 10^{12} I_0.$$

Интенсивность звука выражают в децибелах:

$$\beta = 10 \log I/I_0, \quad 10^{10} I_0 \div \beta = 100 \text{ дБ},$$

порог слышимости  $\beta_0 = 0$  дБ,

болевого порог  $\beta = 120$  дБ.

## Ударные волны

В случае малых возмущений среда линейна – волна синусоидальна. С

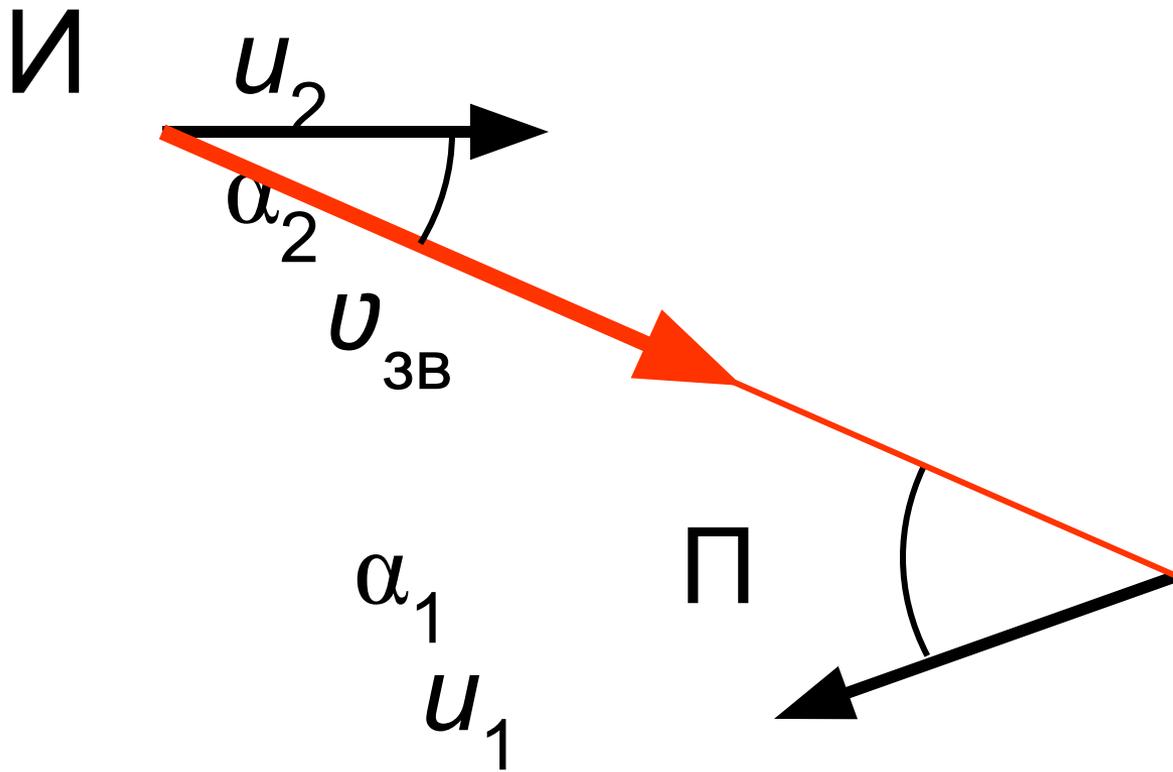
ростом амплитуды возмущения среда теряет линейность, волна становится не синусоидальной.

Участки с большим возмущением имеют большую скорость. Возникают волны различных частот. В этом случае говорят о взрывной волне.

Эффект Доплера – изменение частоты излучения при относительном движении источника и приёмника (верхний знак относится к сближению, нижний – к расхождению)

$$\nu = \nu_0 \frac{1 \pm \frac{u_1}{v_{3B}} \cos \alpha_1}{1 \mp \frac{u_2}{v_{3B}} \cos \alpha_2} = \nu_0 \frac{v_{3B} \pm u_1 \cos \alpha_1}{v_{3B} \mp u_2 \cos \alpha_2}.$$

Здесь  $\nu$  – частота принимаемого сигнала,  $\nu_0$  – частота испускаемого сигнала,  $u_{\text{ЗВ}}$  – скорость сигнала (звукового или светового),  $u_1$  – скорость приёмника,  $u_2$  – скорость источника,  $\alpha_1$  – угол между направлением на источник и движением приёмника,  $\alpha_2$  – угол между направлением на приёмник и направлением движения источника.



Движение и приёмника и источника  
вдоль одной линии.  
На встречу друг другу

$$v = v_0 \frac{v_{3B} + u_1}{v_{3B} - u_2}.$$

Удаляются друг от друга

$$v = v_0 \frac{v_{3B} - u_1}{v_{3B} + u_2}.$$