

Дискретная математика



ДНФ и импликанты

- **Функция f имплицирует функцию g** , если $f \rightarrow g \equiv 1$.
- Замечание: Если $f \rightarrow g \equiv 1$,
 $M_f \subseteq M_g$ то .

Импликант

- Если f имплицирует g , и f представлена единственной элементарной конъюнкцией, то f называется *импликантом g* .
- Если из импликанта нельзя удалить ни одной переменной, то оно называется *простым импликантом*.

Теорема

- Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представима единственной элементарной конъюнкцией
 - всех n переменных, то $|M_f| = 1$;
 - $m < n$ переменных, то

$$|M_f| = 2^{n-m} .$$

Пример

Пусть $f(x, y, z) = xyz$.

Она принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $x = 1, y = 1, z = 1$.

Значит $M_f = \{111\}$.

Пример

Пусть $f(x, y, z) = \bar{y}z$.

Она принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $y = 0, z = 1$.

Значит, чему равняется переменная x – неважно, и она может принимать любые значения. Поэтому

$$M_f = \{ 001, 101 \} .$$

Утверждение 1

Представление функции в виде ДНФ соответствует представлению ее единичного множества в виде объединения единичных множеств входящих в эту ДНФ элементарных конъюнкций.

Пример

Пусть функция представлена своей ДНФ.

$$f(x, y, z) = x\bar{y}z \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \quad .$$

Тогда ее единичное множество может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} M_f &= M_{x\bar{y}z} \cup M_{\bar{y}\bar{z}} \cup M_{\bar{x}\bar{y}} = \\ &= \{101\} \cup \{000, 100\} \cup \{000, 001\} \end{aligned}$$

Получилось, что $M_f = \{000, 001, 100, 101\}$

Утверждение 2

Любая конъюнкция ДНФ функции является импликантом данной функции.

Утверждение 3

Если конъюнкция ДНФ функции не является простым импликантом, то можно найти соответствующий ей простой импликант (или импликанты) и заменить им (или их дизъюнкцией) непростой импликант.

Определение

ДНФ, состоящая только из простых импликантов, называется *сокращенной*.

.

Пример

Пусть функция представлена своей

$$\text{ДНФ. } f(x, y, z) = \bar{x} \vee x\bar{y}z$$

Тогда ее единичное множество

имеет вид:

$$\begin{aligned} M_f &= M_{\bar{x}} \cup M_{x\bar{y}z} = \{000, 001, 010, 011\} \cup \{101\} = \\ &= \{000, 001, 010, 011, 101\} \end{aligned}$$

Пример

Очевидно, что \bar{X} – это простой импликант. Он состоит из одной буквы, и если ее вычеркнуть, получится вырожденная конъюнкция (конъюнкция не имеющая переменных), что возможно только в случае, если $f = 1$.

Пример

Проверим, будет ли простым

импликант $k = x\bar{y}z$.

Вычеркнем из него

переменную x .

Пример

Получим конъюнкцию $k_1 = \bar{y}z$

Ее единичное множество содержит 2

набора: $M_{k_1} = \{001, 101\} \subseteq M_f$

то есть k_1 по-прежнему является импликантом f .

Значит $k = x\bar{y}z$ – не простой

импликант.