

Презентация на тему:

Выполнили:

студентки группы ГТБ-1-057  
Козлова Е.К., Хаспекова А.А.

Проверила:

к.т.н., доц. Е.О. Лагунова.

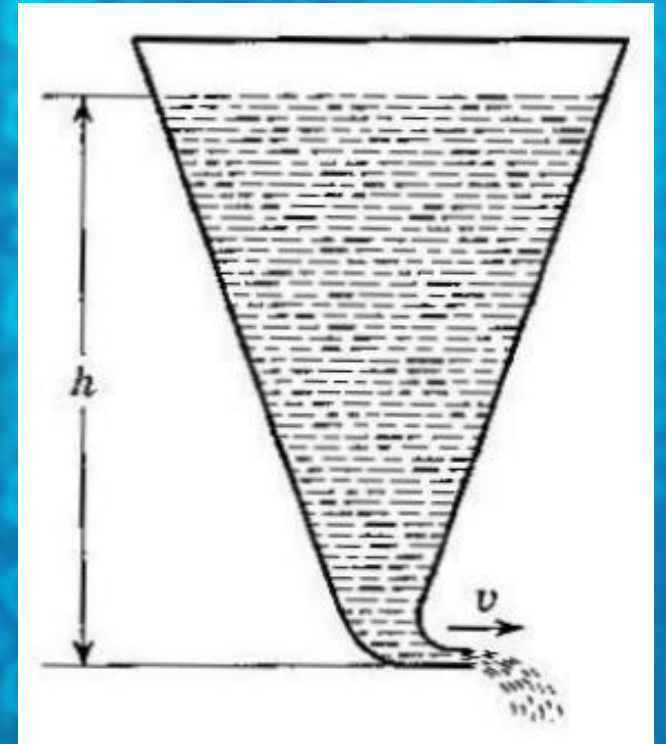
Экспериментальный факт состоит в том, что скорость вытекания воды через небольшое отверстие равна  $v = 0,6\sqrt{2gh}$ , где

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения,

$h$  — высота уровня воды над отверстием.

Заметим, что  $v = v(h)$  является функцией от  $h$ , значит, по мере вытекания воды скорость вытекания уменьшается.

Если попытаться вывести формулу для  $v$  из закона сохранения энергии, то получим  $v = \sqrt{2gh}$ .



Составим дифференциальное уравнение вытекания воды.

Пусть  $S(h)$  — площадь сечения сосуда на высоте  $h$  над отверстием, а высота  $h = h(t)$  есть функция времени, описывающая вытекание. За время от  $t$  до  $t + \Delta t$  высота изменится на величину  $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$  (которая отрицательна), а объём  $\Delta V$  вытекшей жидкости будет примерно равен  $-S(h) \Delta h$ .

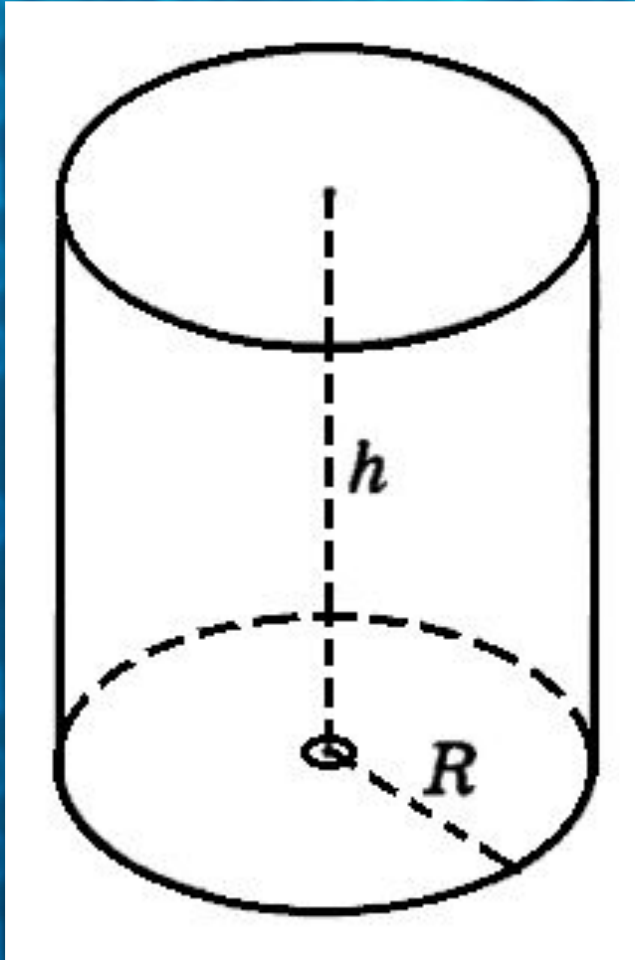
С другой стороны, если  $s$  — площадь сечения отверстия, через которое вытекает вода, то ясно, что  $\Delta V \approx v(h) s \Delta t$ , так как за время  $\Delta t$  вытекает вода того же объёма, что и цилиндр сечения  $s$  и высоты  $v \Delta t$ .

Точность обеих формул для  $\Delta V$  возрастает с уменьшением  $\Delta t$ . Приравнявая найденные выражения для  $\Delta V$ , получим  $-S(h) \Delta h \approx v(h) s \Delta t$ . Деля на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , мы приходим к формуле

$$-S(h) h' = sv(h)$$

или

$$h' = -\frac{s}{S(h)} v(h).$$



Задача:

За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака высотой 2 м и диаметром основания 1 м через отверстие в дне диаметром 1 см?

$H = 2$  м – высота бака


$R = 0,5$  м – радиус основания бака

$r = 0,005$  м – радиус отверстия

$$S(h) = \pi R^2 = \text{const}$$


$$s = \pi r^2 \text{ – площадь отверстия}$$

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta h \approx -\pi r^2 \cdot 0,6 \sqrt{2gh} \Delta t$$


$$h' = -0,6 \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2gh}$$

Поделим обе части на  $\sqrt{2gh}$ , получим:

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{2gh(t)}} = -0,6 \frac{r^2}{R^2} \quad \text{или} \quad \left( \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} \right)' = \left( -0,6 \frac{r^2}{R^2} t \right),$$


$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0,6 \frac{r^2}{R^2} t + C$$

Теперь определим  $C$ .

$$h(0) = H \quad \rightarrow \quad C = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

В итоге получим:

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0,6 \frac{r^2}{R^2} t + \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

$$h = 0 \quad \rightarrow \quad 0,6 \frac{r^2}{R^2} T = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

$$T = \frac{2\sqrt{H}R^2}{0,6r^2\sqrt{2g}} = \frac{2\sqrt{2}(0,5)^2}{0,6 \cdot (0,5 \cdot 10^{-2})^2 \sqrt{2 \cdot 9,8}} \approx 10^4 \text{ c} \approx 3 \text{ ч.}$$