Презентация на тему:

Выполнили: студентки группы ГТБ-1-057
Козлова Е.К., Хаспекова А.А.

Проверила: к.т.н., доц. Е.О. Лагунова.

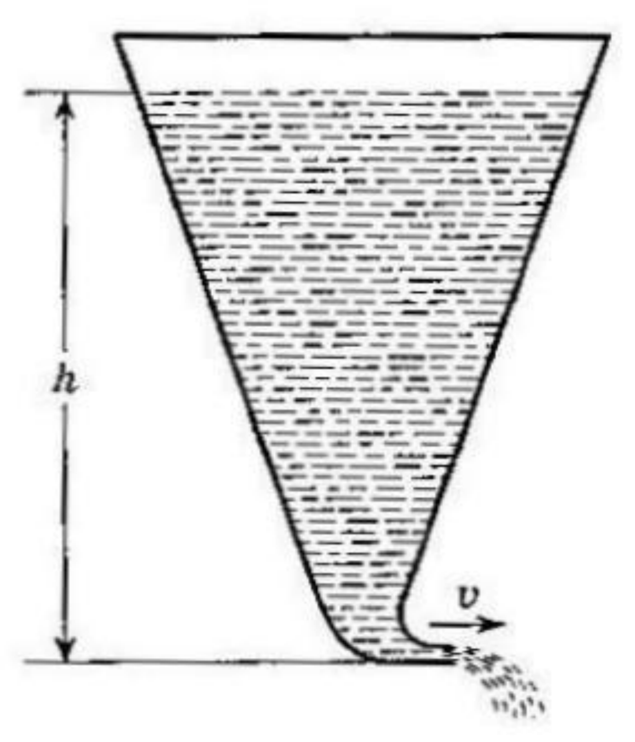
Экспериментальный факт состоит в том, что скорость вытекания воды через небольшое отверстие равна $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, где

g = 9,8 м/с² — ускорение свободного падения,

h — высота уровня воды над отверстием.

Заметим, что $v = v(h)$ является функцией от h, значит, по мере вытекания воды скорость вытекания уменьшается.

Если попытаться вывести формулу для v из закона сохранения энергии, то получим $v = \sqrt{2gh}$.



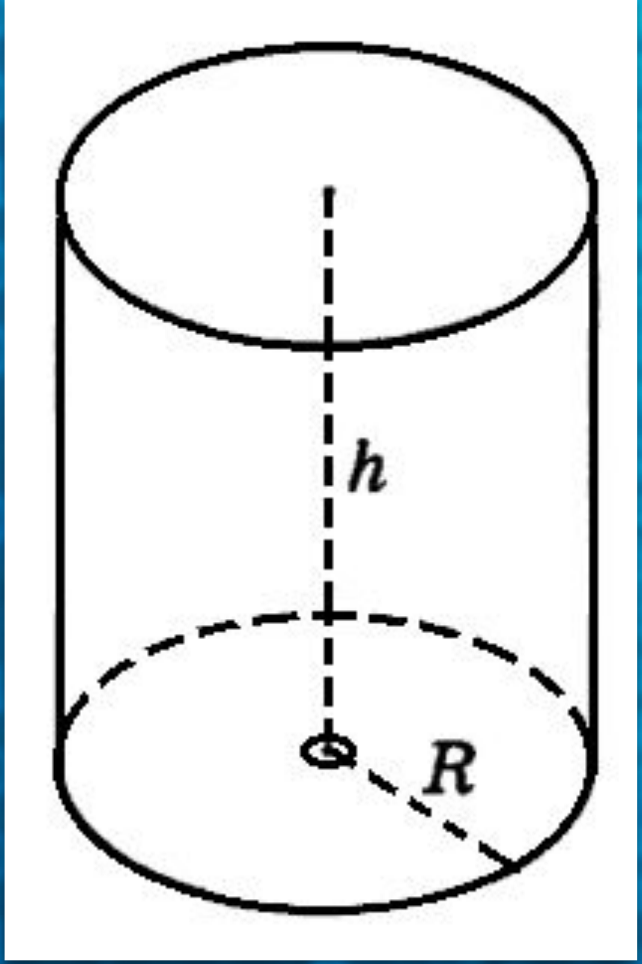
Составим дифференциальное уравнение вытекания воды.

Пусть $S(h)$ — площадь сечения сосуда на высоте h над отверстием, а высота $h = h(t)$ есть функция времени, описывающая вытекание. За время от t до $t + \Delta t$ высота изменится на величину $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$ (которая отрицательна'), а объём ΔV вытекшей жидкости будет примерно равен $-S(h)\,\Delta h$.

С другой стороны, если s — площадь сечения отверстия, через которое вытекает вода, то ясно, что $\Delta V \approx v(h)\,s\,\Delta t$, так как за время Δt вытекает вода того же объёма, что и цилиндр сечения s и высоты $v\,\Delta t$.

Точность обеих формул для ΔV возрастает с уменьшением Δt. Приравнивая найденные выражения для ΔV, получим $-\,S(h)\,\Delta h \approx v(h)\,s\,\Delta t$. Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to\ 0$, мы приходим к формуле

$$\boxed{-S(h)\,h' =\ sv(h)} \quad \text{или} \quad \boxed{h' = -\frac{s}{S(h)}\ v(h).}$$



Задача:

За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака высотой 2 м и диаметром основания 1 м через отверстие в дне диаметром 1 см?

$H = 2$ м – высота бака

$R = 0{,}5$ м – радиус основания бака

$r = 0{,}005$ м – радиус отверстия

$S(h) = \pi R^2 = const$

$s = \pi r^2$ – площадь отверстия

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta h \approx -\pi r^2 \cdot 0{,}6\sqrt{2\mathrm{gh}}\Delta t$$

$$h' = -0{,}6\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh}$$

Поделим обе части на $\sqrt{2gh}$, получим:

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{2gh(t)}} = -0{,}6\frac{r^2}{R^2}$$

или

$$\left(\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\right)' = \left(-0{,}6\frac{r^2}{R^2}t\right)'$$

$$\boxed{\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0{,}6\frac{r^2}{R^2}t + C}$$

Теперь определим C.

$$h(0) = H \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

В итоге получим:

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0{,}6\frac{r^2}{R^2}t + \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

$$h = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}6\frac{r^2}{R^2}T = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

$$T = \frac{2\sqrt{H}R^2}{0{,}6r^2\sqrt{2g}} = \frac{2\sqrt{2}(0{,}5)^2}{0{,}6\cdot(0{,}5\cdot 10^{-2})^2\sqrt{2\cdot 9{,}8}} \approx 10^4 c \approx 3 \text{ ч.}$$