

Презентация на тему:

Выполнили:

студентки группы ГТБ-1-057
Козлова Е.К., Хаспекова А.А.

Проверила:

к.т.н., доц. Е.О. Лагунова.

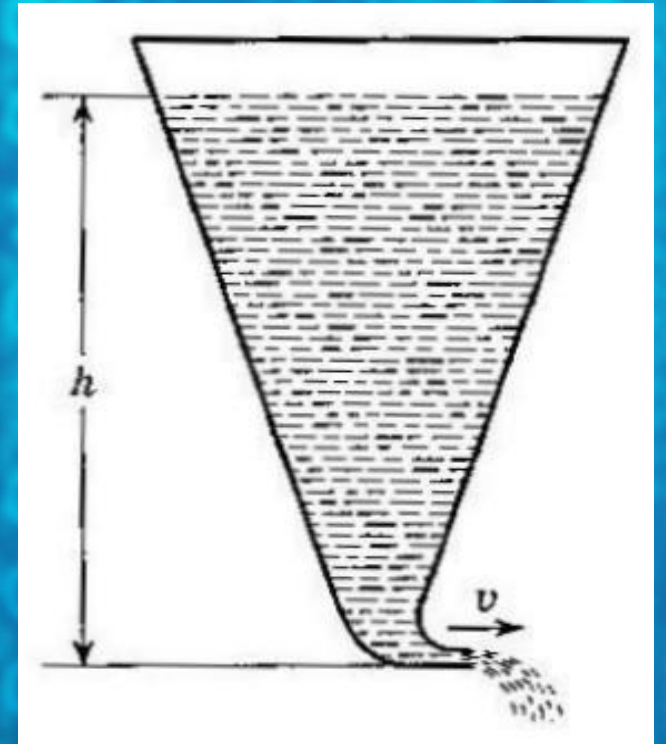
Экспериментальный факт состоит в том, что скорость вытекания воды через небольшое отверстие равна $v = 0,6\sqrt{2gh}$, где

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения,

h — высота уровня воды над отверстием.

Заметим, что $v = v(h)$ является функцией от h , значит, по мере вытекания воды скорость вытекания уменьшается.

Если попытаться вывести формулу для v из закона сохранения энергии, то получим $v = \sqrt{2gh}$.



Составим дифференциальное уравнение вытекания воды.

Пусть $S(h)$ — площадь сечения сосуда на высоте h над отверстием, а высота $h = h(t)$ есть функция времени, описывающая вытекание. За время от t до $t + \Delta t$ высота изменится на величину $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$ (которая отрицательна), а объём ΔV вытекшей жидкости будет примерно равен $-S(h) \Delta h$.

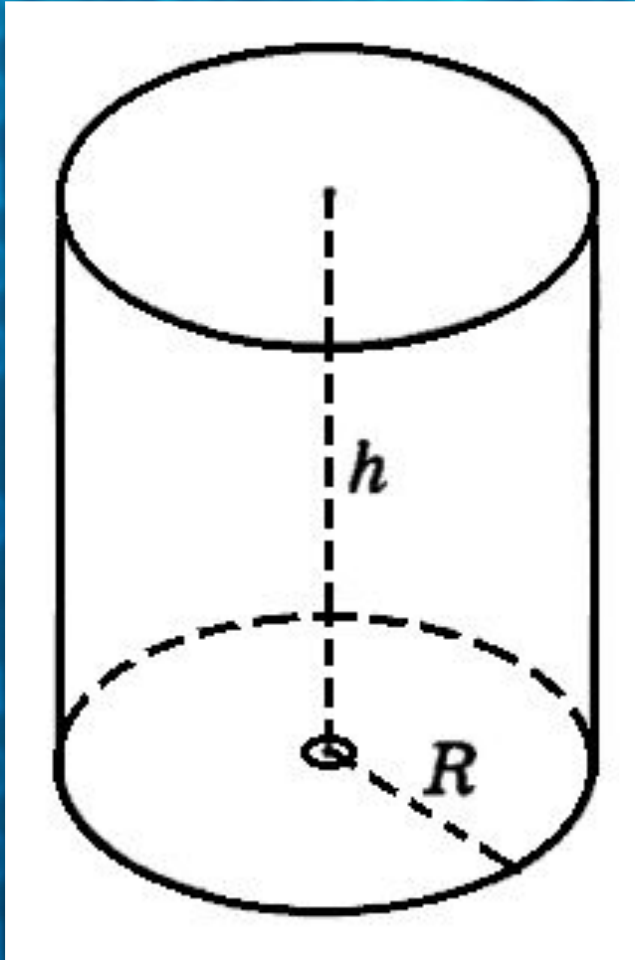
С другой стороны, если s — площадь сечения отверстия, через которое вытекает вода, то ясно, что $\Delta V \approx v(h) s \Delta t$, так как за время Δt вытекает вода того же объёма, что и цилиндр сечения s и высоты $v \Delta t$.

Точность обеих формул для ΔV возрастает с уменьшением Δt . Приравнявая найденные выражения для ΔV , получим $-S(h) \Delta h \approx v(h) s \Delta t$. Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, мы приходим к формуле

$$-S(h) h' = sv(h)$$

или

$$h' = -\frac{s}{S(h)} v(h).$$



Задача:

За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака высотой 2 м и диаметром основания 1 м через отверстие в дне диаметром 1 см?

$H = 2$ м – высота бака


$R = 0,5$ м – радиус основания бака

$r = 0,005$ м – радиус отверстия

$$S(h) = \pi R^2 = \text{const}$$


$s = \pi r^2$ – площадь отверстия

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta h \approx -\pi r^2 \cdot 0,6 \sqrt{2gh} \Delta t$$


$$h' = -0,6 \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2gh}$$

Поделим обе части на $\sqrt{2gh}$, получим:

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{2gh(t)}} = -0,6 \frac{r^2}{R^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} \right)' = \left(-0,6 \frac{r^2}{R^2} t \right),$$


$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0,6 \frac{r^2}{R^2} t + C$$

Теперь определим C .

$$h(0) = H \quad \rightarrow \quad C = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

В итоге получим:

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0,6 \frac{r^2}{R^2} t + \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

$$h = 0 \quad \rightarrow \quad 0,6 \frac{r^2}{R^2} T = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$$

$$T = \frac{2\sqrt{H}R^2}{0,6r^2\sqrt{2g}} = \frac{2\sqrt{2}(0,5)^2}{0,6 \cdot (0,5 \cdot 10^{-2})^2 \sqrt{2 \cdot 9,8}} \approx 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ ч.}$$