

§3. Базіс лінейнай прасторы. Каардынаты.

Азн. 1. Сістэма вектараў лінейнай прасторы V называецца яе **базісам**, калі яна **лінейна незалежная** і ўся прастора V **лінейна выражаецца** праз гэтую сістэму.

Азн. 2. Лінейная прастора, што мае **канцоўны базіс**, называецца **канцоўнамернай**. Лінейную прастору, што складаецца толькі з аднаго нулявога вектара, таксама лічаць канцоўнамернай (**нулявая прастора**).

Азн. 3. Ненулявая лінейная прастора, што не мае канцоўнага базісу называецца **бясконцамернай**.

У далейшым будзем разглядаць **канцоўнамерныя лінейныя прасторы**.

Сцв. 1. Калі ў лінейнай прасторы існуе базіс з n вектараў, то кожны іншы базіс гэтай прасторы складаецца з n вектараў.

Доказ. Няхай у л.п. V існуе базіс з n вектараў. Тады адвольны вектар прасторы лінейна выражаецца праз гэты базіс. Згодна тэарэме мінулага параграфа адвольная сістэма, што ўтрымлівае больш за n вектараў – л.з. Калі б у л.п. існаваў базіс з меншай за n колькасцю вектараў m ($m < n$), то, аналагічна, адвольная сістэма вектараў колькасці, большай за m , у прыватнасці, зыходны базіс была б л.з.

- Азн. 4. Лінійная прастора, у якой існуе базіс з n вектараў, называецца n – мернай. Калі прастора V n – вымерная, то лік n называюць вымернасцю (памернасцю) прасторы V і пішуць: $n = \dim V$.

- Прыклады:

- 1. Прастора свабодных вектараў V^3 . Адвольныя тры некампланарныя вектары з'яўляюцца базісам. $\dim V^3 = 3$.
- 2. V^2 – прастора вектараў, паралельных фіксаванай плоскасці. Адвольныя два некалінеярныя вектары з'яўляюцца базісам. $\dim V^2 = 2$.
- 3. V^1 - прастора свабодных вектараў, паралельных фіксаванай прамой. Адвольны ненулявы вектар з'яўляецца базісам. $\dim V^1 = 1$.
- 4. $P[x]$ - прастора паліномаў над полем P : $P[x]$, Базісам з'яўляецца, напрыклад, набор вектараў : x, x^2, \dots, x^n . $\dim P[x] = n$.

- Тэарэма 1. Маюць месца наступныя сцвяджанні для кожнай n – мернай лінейнай прасторы :
 - 1) адвольная сістэма вектараў, у якой іх колькасць большая за n , лінейна залежная;
 - 2) адвольная сістэма з n лінейна незалежных вектараў задае базіс;
 - 3) адвольную лінейна незалежную сістэму вектараў, колькасць вектараў у якой меншая за n , можна дапоўніць да базісу.
- Доказ. 1). Першае сцвяджанне вынікае з Тэарэмы аб лінейнай незалежнасці сістэмы вектараў мінулага параграфа.
- 2). Хай сістэма вектараў $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (1) л.н.з. сістэма вектараў n – мернай лінейнай прасторы, а \mathbf{b} – адвольны вектар прасторы. Згодна 1) сістэма вектараў $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ (2) л.з. Згодна выніку з Тэарэмы аб лінейнай незалежнасці сістэмы вектараў вектар \mathbf{b} лінейна выражаецца праз сістэму (1). Значыць, (1) – базіс V .

- 3). Хай зададзены л.н.з. сістэма вектараў
 - a_1, a_2, \dots, a_k (3) і базіс
 - b_1, b_2, \dots, b_n (4) прасторы V і хай $k < n$. Тады сістэма
 - $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_n$ (5) л.з.
- Паслядоўна выключым з сістэмы (5) вектары, якія ёсць камбінацыі папярэдніх. Так як вектары сістэмы (3) л.н.з., то яны застаюцца ў сістэме і новая сістэма прыме выгляд
 - $a_1, a_2, \dots, a_k, b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_p}$ (6)
- Згодна Тэарэме аб лінейнай залежнасці, сістэма (6) л.н.з. Адвольны вектар прасторы лінейна выражаецца праз (4), а, значыць, і праз эквівалентную ёй сістэму (6). Такім чынам сістэма (6) - базіс лінейнай прасторы, атрыманы дапаўненнем сістэмы (3).

Каардынаты

- Няхай V - n -мерная лінейная прастора над P , a – адвольны вектар прасторы, а

- v_1, v_2, \dots, v_n - базіс V . (7)

- Як вядома, вектар a можна раскласці ў лінейную камбінацыю вектараў базісу:
$$a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n .$$
 (8)

- Азн. Прадстаўленне вектару a ў выглядзе (8) называецца раскладаннем вектара a па вектарам базісу (7). Каафіцыенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называюцца каардынатамі вектара a ў базісе (7). Слупок $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ называецца каардынатым слупком вектара a ў базісе (7).

Тэарэма 2. Каардынаты вектара ў фіксаваным базісе вызначаны адназначна.

- Доказ. Няхай вектар a побач з раскладаннем (8) мае іншае раскладанне
- $$a = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n. \quad (9)$$
- Тады $a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{P}$,
- $i = 1, 2, \dots, n$.
- Адсюль $(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = \vec{0}$. Так як вектары базісу л.н.з., то $\alpha_i - \beta_i = 0$, для ўсіх $i = 1, 2, \dots, n$. Такім чынам, $\alpha_i = \beta_i$, што даказвае тэарэму.

- Разгледзім прадстаўленне вектара $a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ у матрычным выглядзе .
- $a = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$. (10)
- Калі абазначыць $(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) = V$, а $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T = A$, то роўнасць (8)
- можна задаць як здабытак базіснага радка V на каардынаты слупок A :
- $a = V A$.
- Так як каардынаты слупок вектара ў дадзеным базісе вызначаны адназначна, то, (Практыкаванне!), складанню вектараў і множанню іх на лік будуць адпавядаць адпаведныя аперацыі над матрыцамі, прычым уласцівасці гэтых аперацый разгледжаныя раней для матрыц, будуць выконвацца і для вектараў – слупкоў і вектараў радкоў.
- **Сцв.** Сістэма вектараў л.н.з. тады і толькі тады, калі л.н.з сістэма іх слупкоў.