

Теория автоматического управления

Позиционные звенья

Позиционные типовые звенья

Соотношение между входом и выходом после завершения переходного процесса

$$y_{уст} = kx$$

Виды позиционных звеньев

- Пропорциональное звено
- Апериодическое звено первого порядка
- Апериодическое звено второго порядка
- Колебательное звено
- Консервативное звено

Пропорциональное звено

Уравнение движения $y(t) = kX(t)$, где k -- коэффициент усиления

Пропорциональное звено

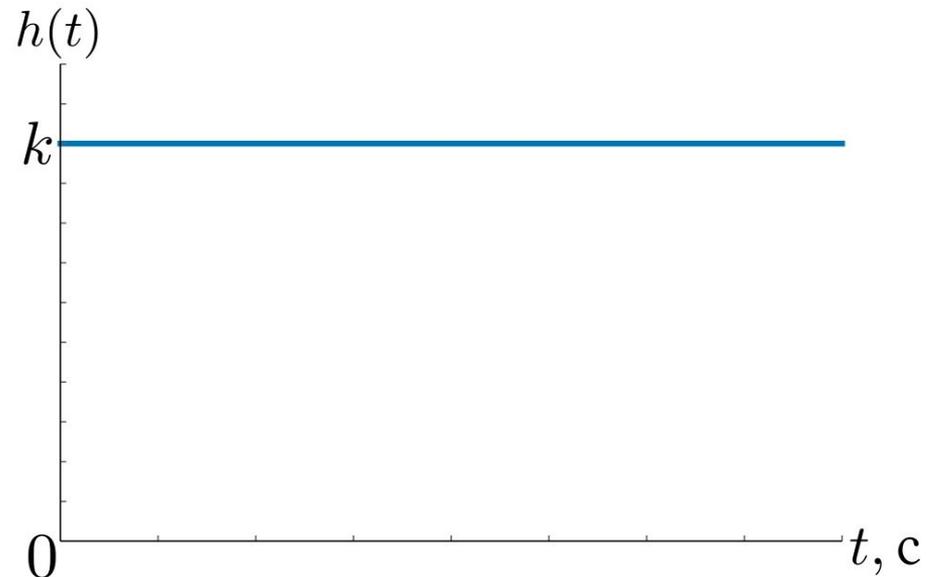
Уравнение движения $y(t) = kX(t)$, где k -- коэффициент усиления

Передаточная функция

$$W(p) = W(j\omega) = k$$

Переходная функция

$$h(t) = k1(t)$$

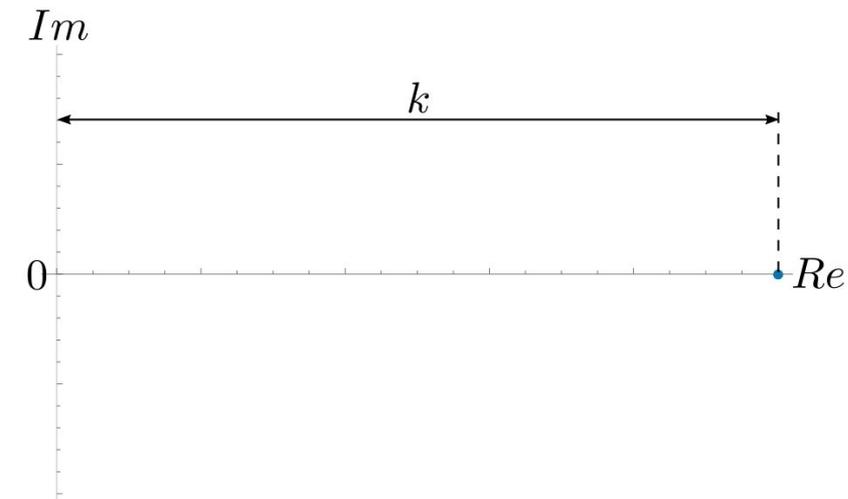


Пропорциональное звено

Уравнение движения $y(t) = kX(t)$, где k -- коэффициент усиления

Частотная передаточная
функция

$$W(j\omega) = k$$



Пропорциональное звено

Уравнение движения $y(t) = kX(t)$, где k -- коэффициент усиления

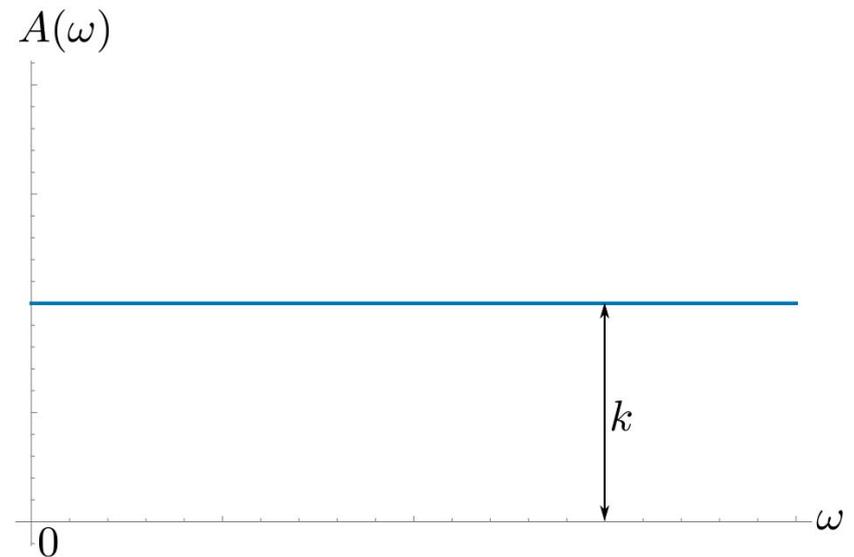
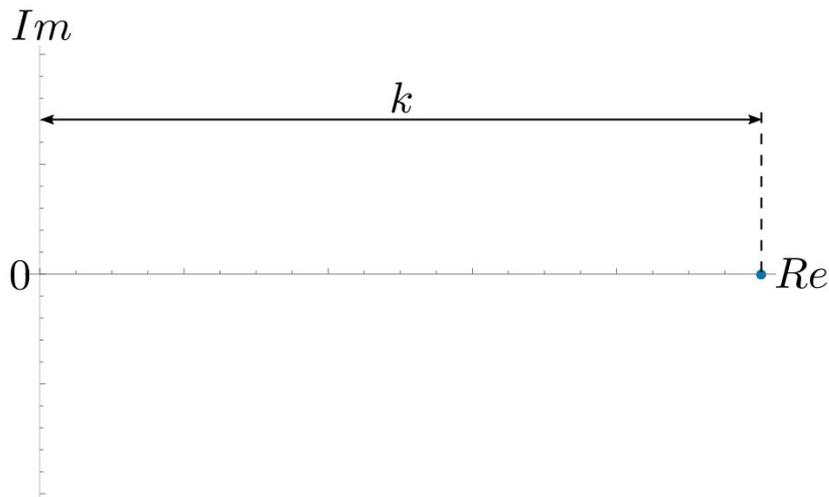
АЧХ и ФЧХ

Частотная передаточная
функция

$$W(j\omega) = k$$

$$A(\omega) = k,$$

$$\psi(\omega) = 0$$



Пропорциональное звено

Уравнение движения $y(t) = kX(t)$, где k -- коэффициент усиления

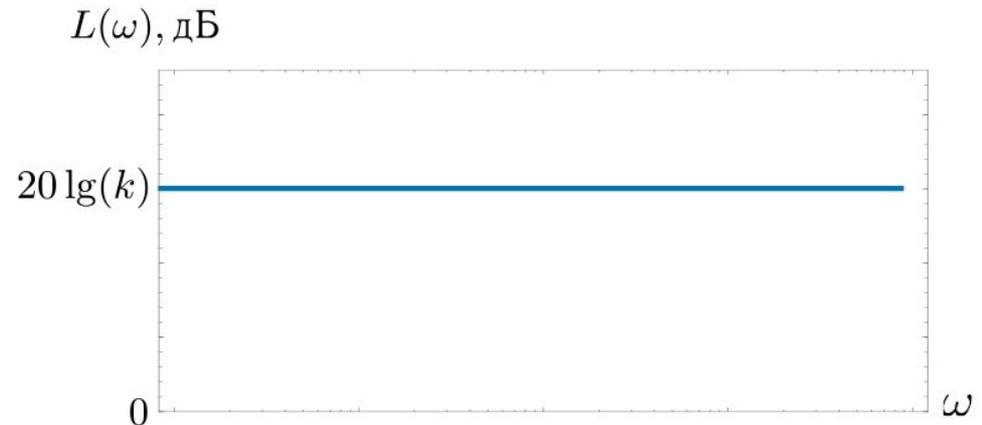
ЛАЧ
X $L(\omega) = 20 \lg k$



Пропорциональное звено

Уравнение движения $y(t) = kX(t)$, где k -- коэффициент усиления

ЛАЧ
X $L(\omega) = 20 \lg k$



ЛФЧ
X $\psi(\omega) = 0$



Пропорциональное звено

Примеры

- Потенциометрический датчик
- Редуктор
- Широкополосный усилитель напряжения

Апериодическое звено 1 порядка

Уравнение $T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t)$

движения T – постоянная времени

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$$

Апериодическое звено 1 порядка

Уравнение

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t)$$

движения

T – постоянная времени

Переходная функция

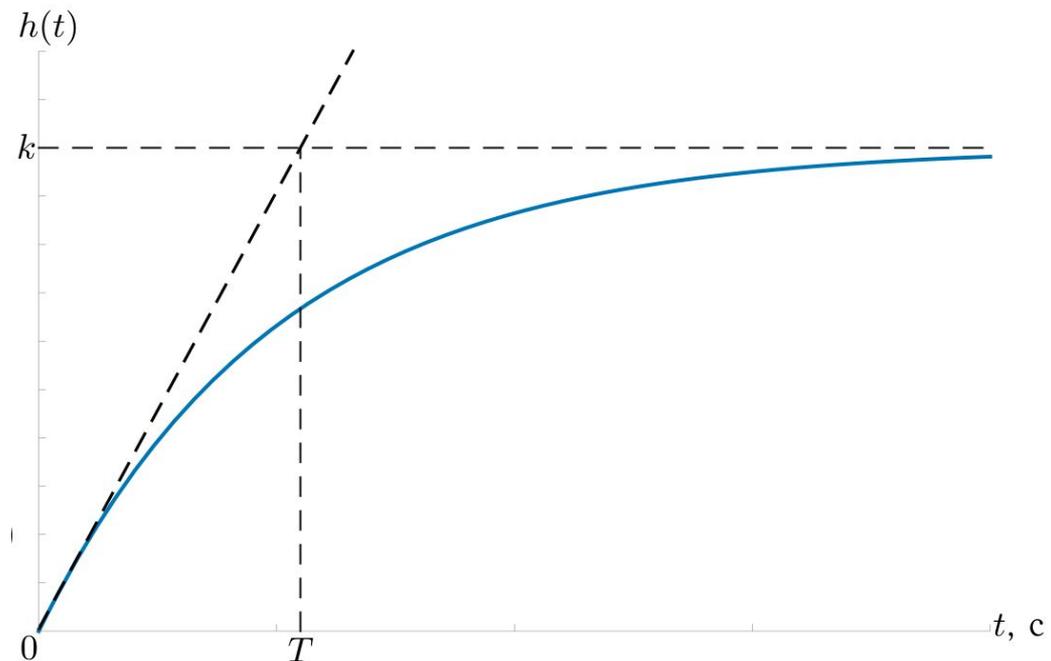
$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t)$$

Время переходного процесса

$$t_n \approx 3T,$$

$$h(3T) = k(1 - e^{-3})1(t) \approx$$

$$\approx k(1 - 0.05)1(t) = 0.95k1(t)$$



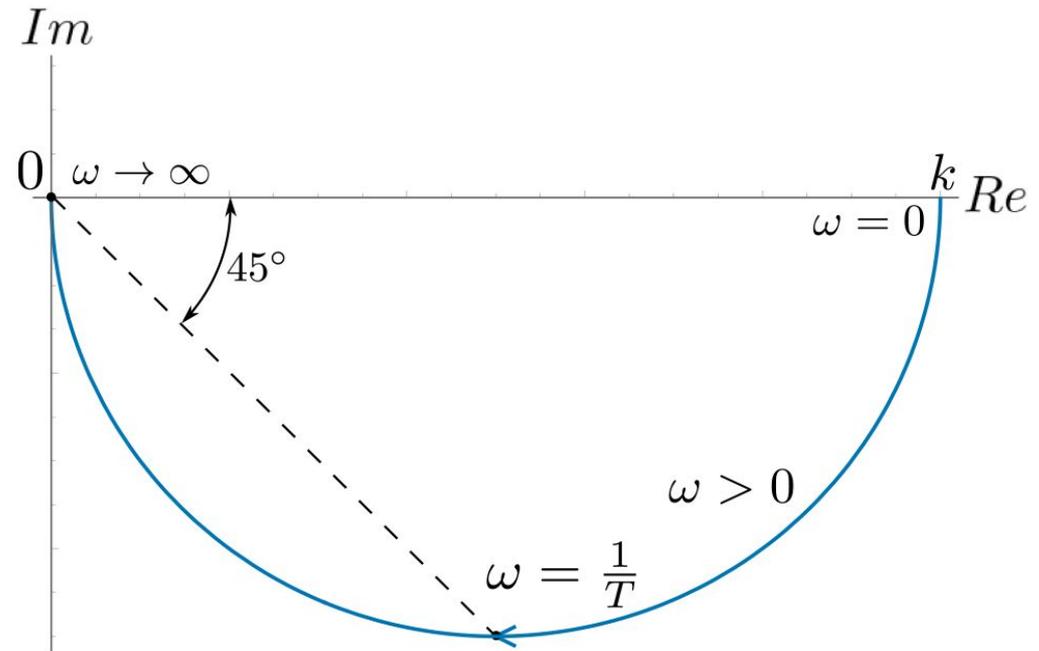
Апериодическое звено 1 порядка

Уравнение
движения

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t)$$

Частотная передаточная
функция

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$



Апериодическое звено 1 порядка

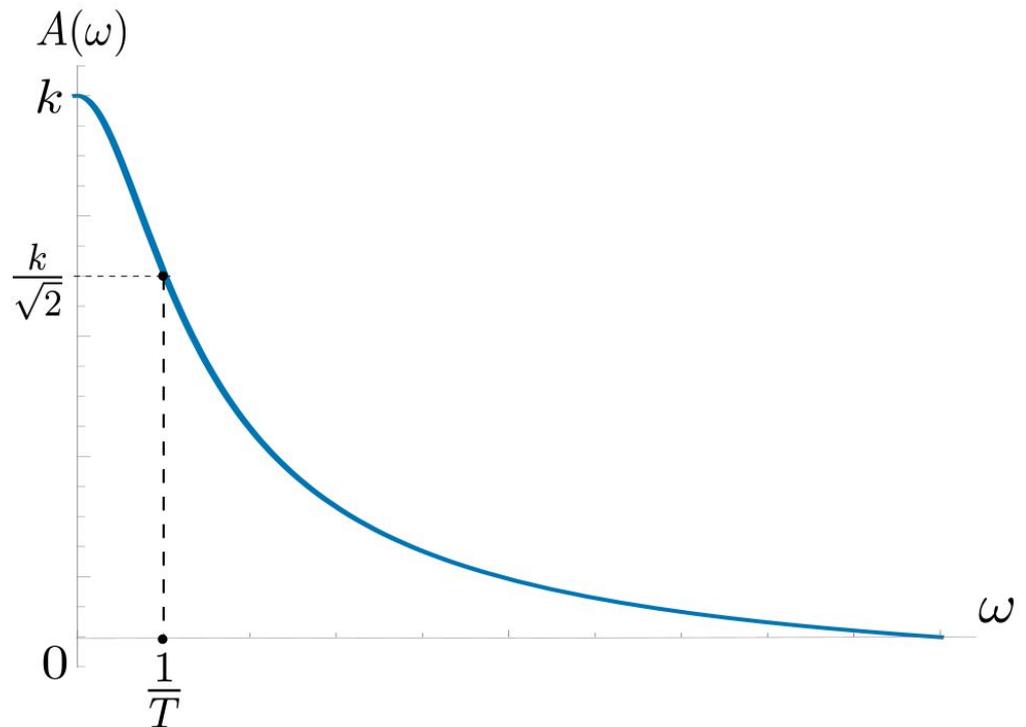
Уравнение
движения

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t)$$

АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T$$



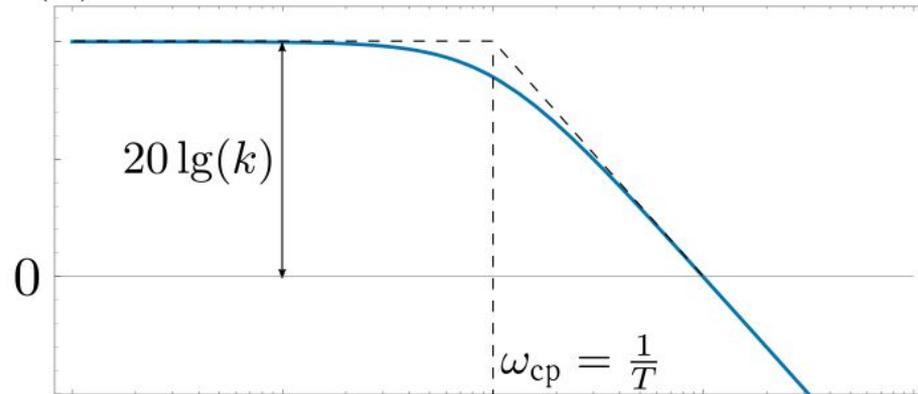
Апериодическое звено 1 порядка

Уравнение

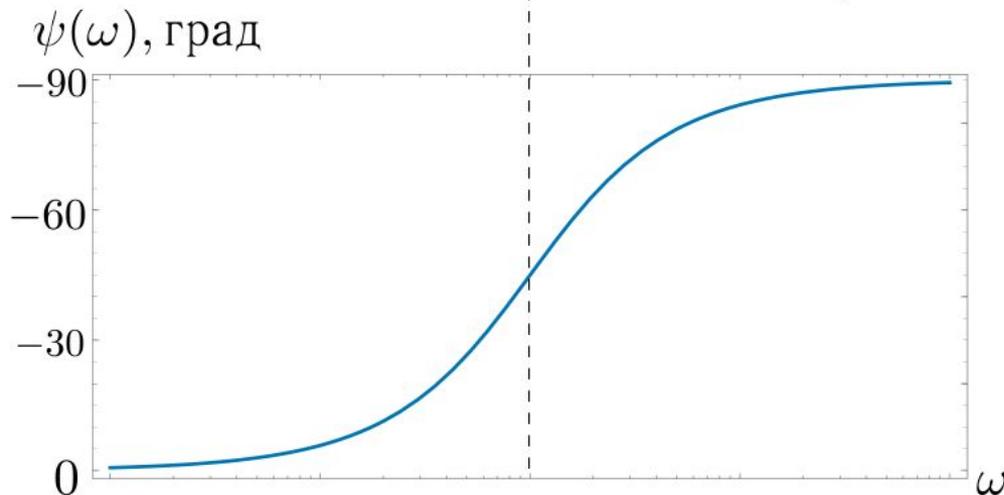
$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t)$$

двигатель $L(\omega), \text{дБ}$

ЛАЧХ



ЛФЧХ



Апериодическое звено 1 порядка

Примеры

- Процесс разгона двигателя
- Усилитель мощности
- Тепловые процессы
- RC–цепь, LR–цепь

Апериодическое звено 2 порядка

Уравнение

ДВИЖ

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = kx(t), \quad T_1 \geq 2T_2$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$$

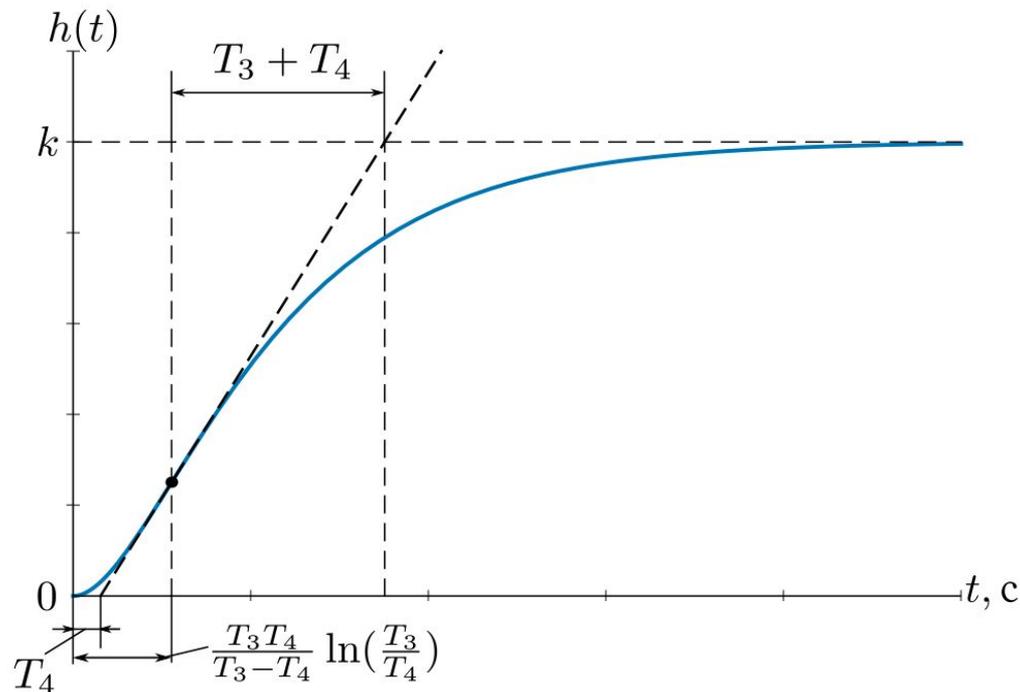
Апериодическое звено 2 порядка

Уравнение

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = kx(t), \quad T_1 \geq 2T_2$$

Переходная функция

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_4 - T_3} e^{-t/T_4} \right) \mathbf{1}(t).$$

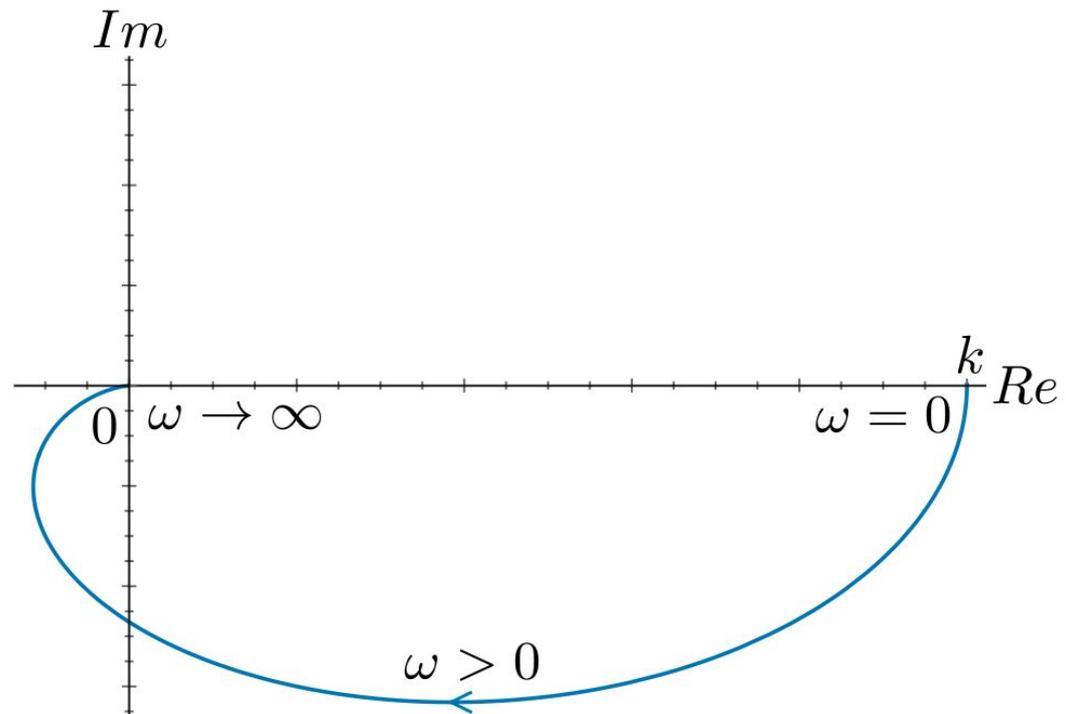


Апериодическое звено 2 порядка

Уравнение
движения

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = kx(t), \quad T_1 \geq 2T_2$$

АФЧХ



Апериодическое звено 2 порядка

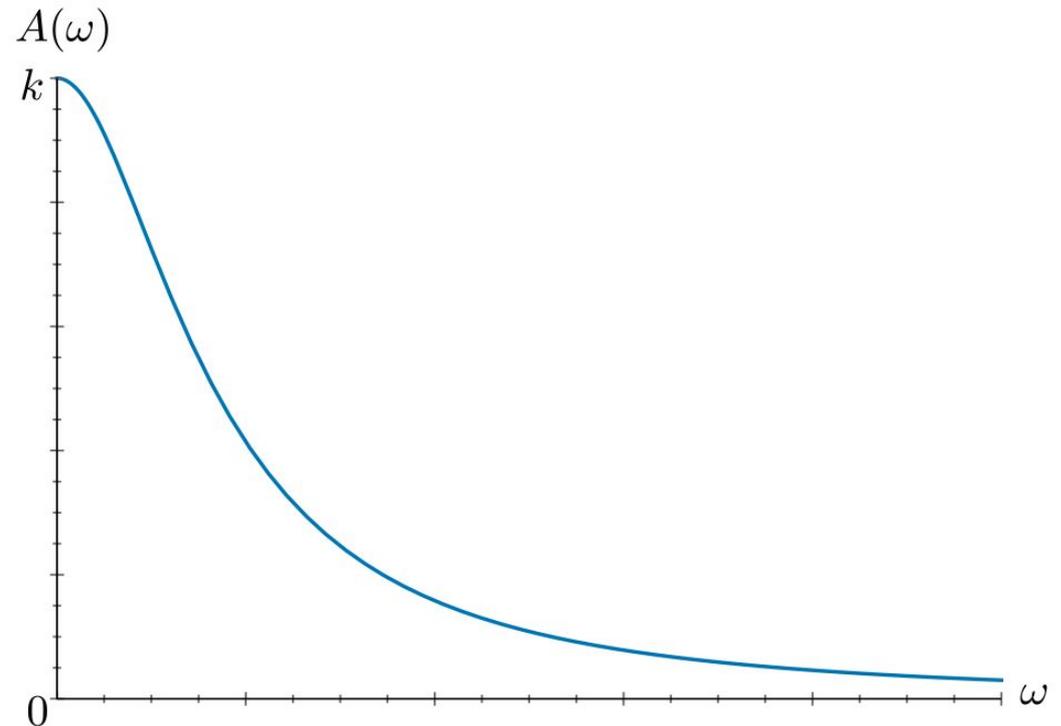
Уравнение
движения

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = kx(t), \quad T_1 \geq 2T_2$$

АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}},$$

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T_3 - \operatorname{arctg} \omega T_4$$



Апериодическое звено 2 порядка

Уравнение
движения

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = kx(t), \quad T_1 \geq 2T_2$$

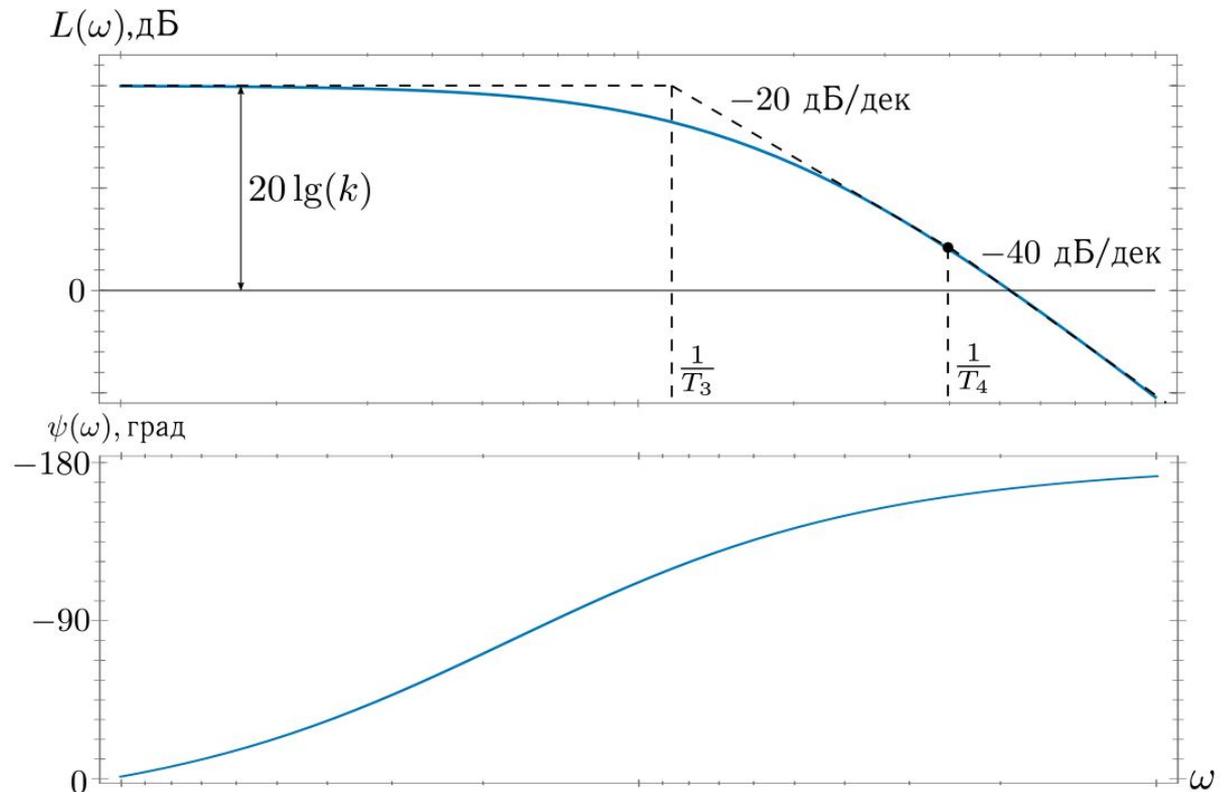
ЛАЧХ

Сопрягающие частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{T_3}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_4}$$

ЛФЧХ



Апериодическое звено 2 порядка

Примеры

- Двигатель постоянного тока
- Последовательное соединение RL– и RC–цепей

Колебательное звено

Уравнение $T^2\ddot{y}(t) + 2T\xi\dot{y}(t) + y(t) = kX(t)$

T — постоянная времени ξ — параметр затухания, $0 < \xi < 1$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \alpha \pm j\lambda,$$

где $\alpha = \xi/T$ — коэффициент затухания, $\lambda = \sqrt{1-\xi^2}/T$ — угловая частота колебаний

Колебательное звено

Уравнение

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2T\xi \dot{y}(t) + y(t) = kX(t)$$

T — постоянная времени

ξ — параметр затухания, $0 < \xi < 1$

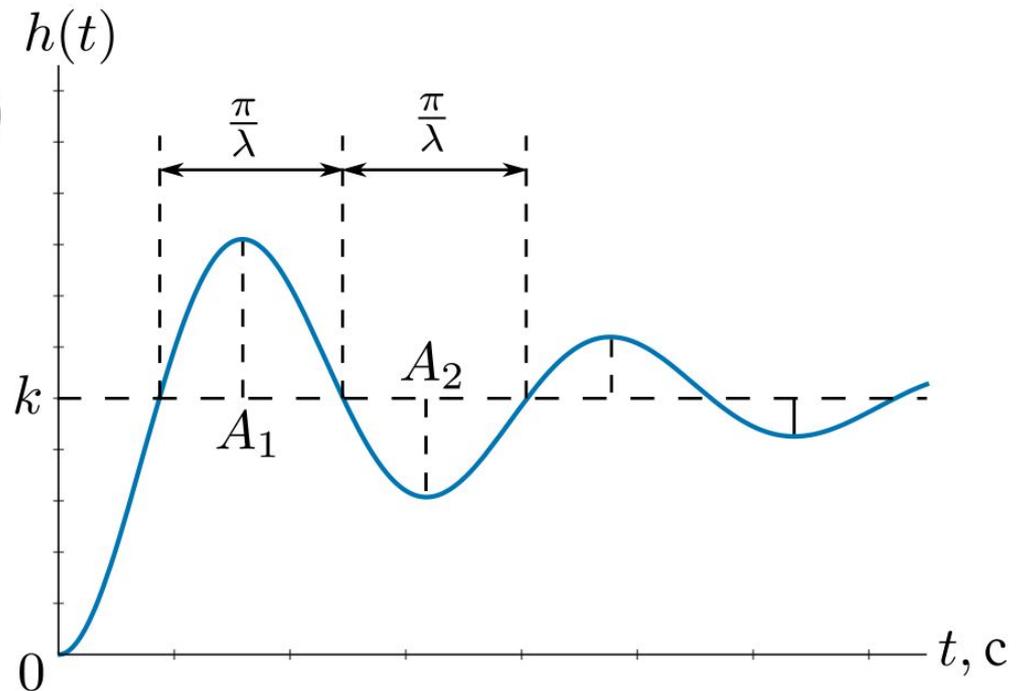
Переходная функция

$$h(t) = k(1 - A_0 e^{-\alpha t} \sin(\lambda t + \phi_0))1(t)$$

$$A_0 = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}},$$

$$\phi_0 = -\operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\alpha}.$$

$$\alpha = \frac{\xi}{T} = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2}$$

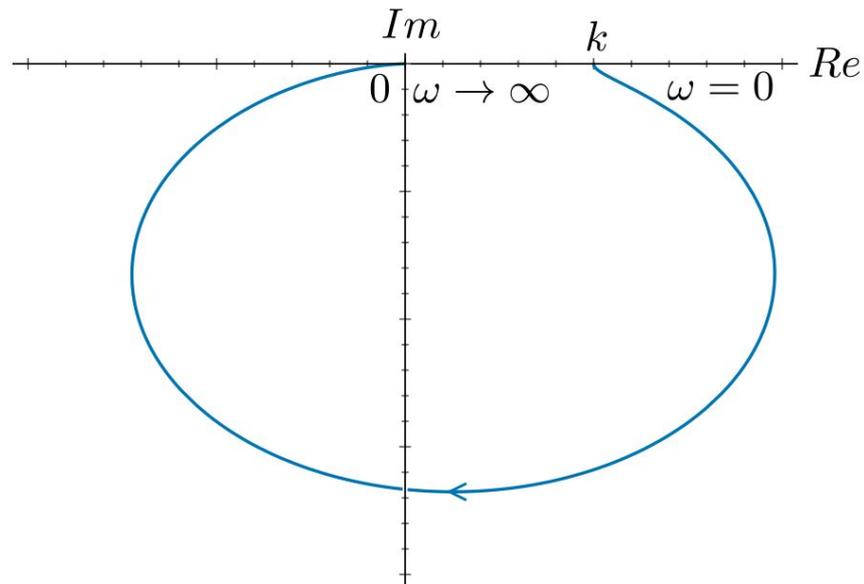


Колебательное звено

Уравнение
движения

$$T^2\ddot{y}(t) + 2T\xi\dot{y}(t) + y(t) = kX(t)$$

АФЧХ



Колебательное звено

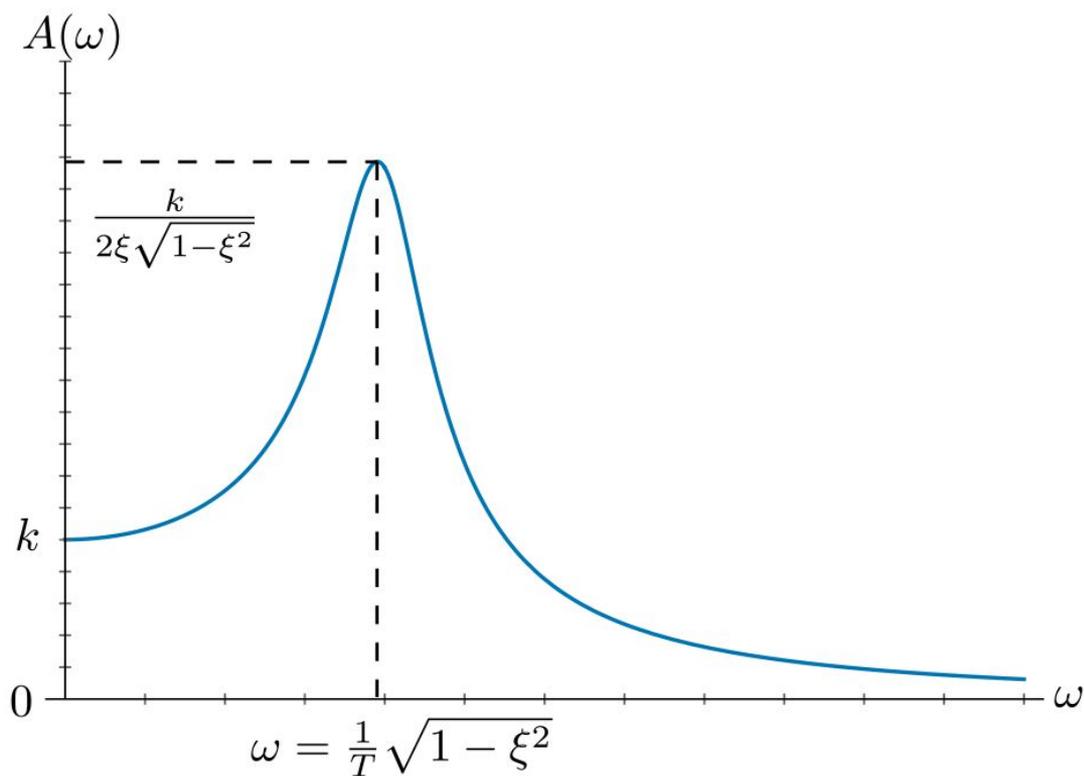
Уравнение
движения

$$T^2\ddot{y}(t) + 2T\xi\dot{y}(t) + y(t) = kX(t)$$

АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}},$$

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$



Колебательное звено

Уравнение
движения

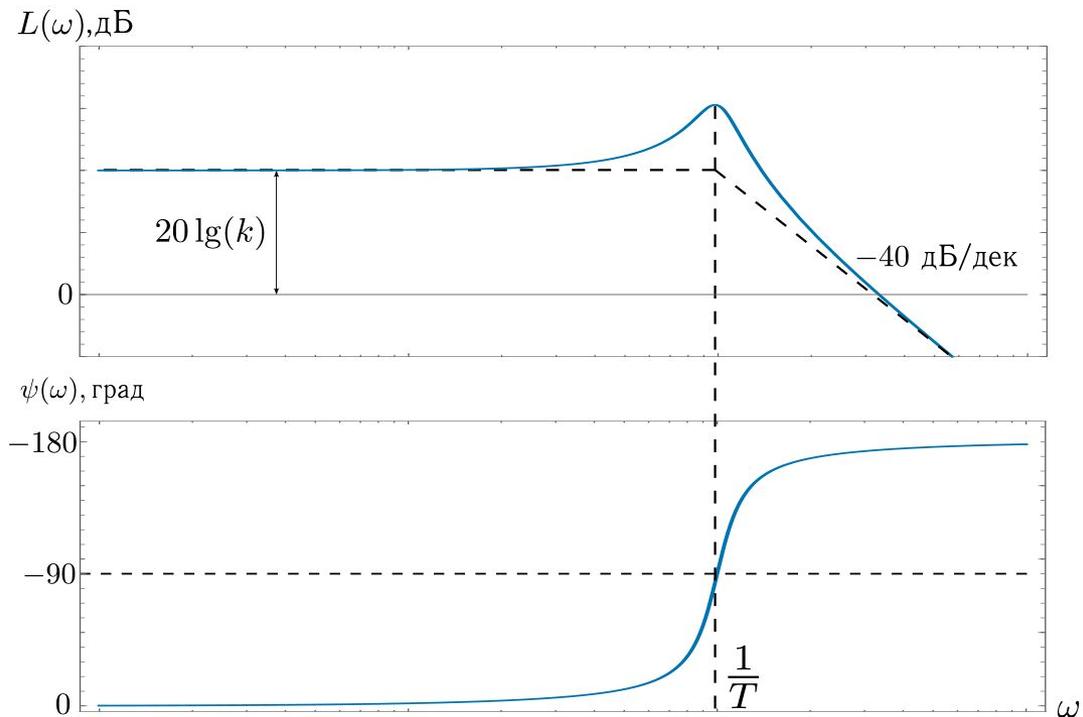
$$T^2 \ddot{y}(t) + 2T\xi \dot{y}(t) + y(t) = kx(t)$$

ЛАЧХ

Сопрягающая частота $\omega = \frac{1}{T}$

Резонансный пик будет
существовать при $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ЛФЧХ



Колебательное звено

Примеры

- Маятниковая система в вязкой среде
- RLC–цепь

Консервативное звено

Уравнение $T^2 \ddot{y}(t) + y(t) = kX(t)$

T – постоянная времени $\xi = 0$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \pm j \frac{1}{T}$$

где $1/T$ — угловая частота собственных колебаний

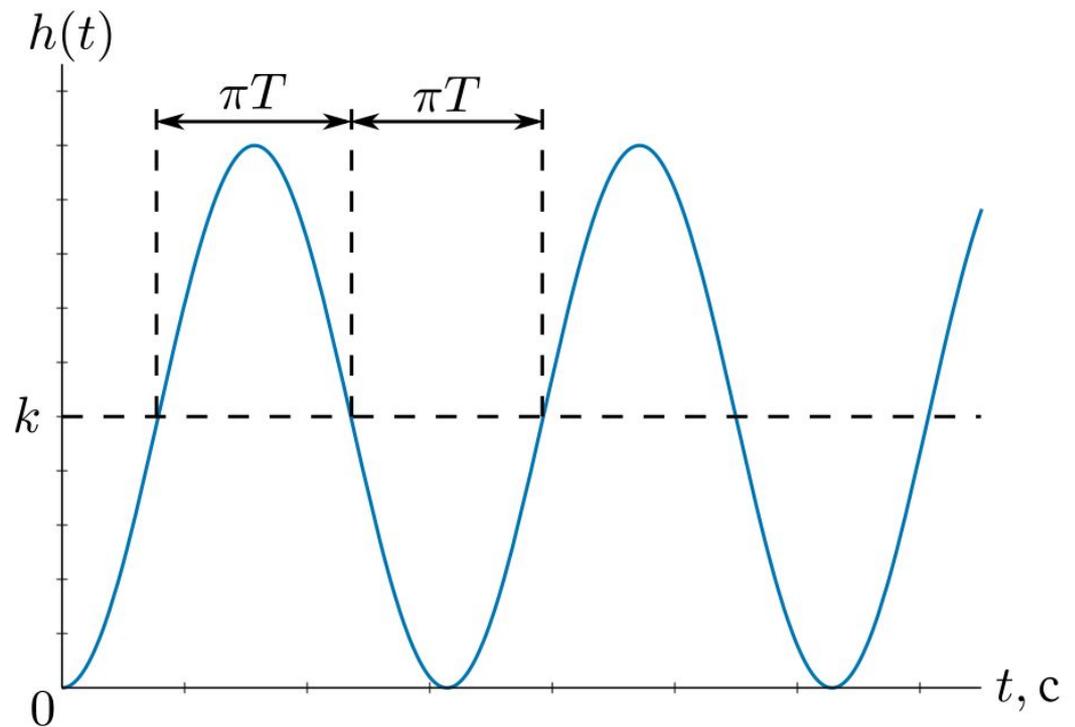
Консервативное звено

Уравнение
движения

$$T^2 \ddot{y}(t) + y(t) = kX(t)$$

Переходная функция

$$h(t) = k(1 - \cos \omega t)1(t)$$

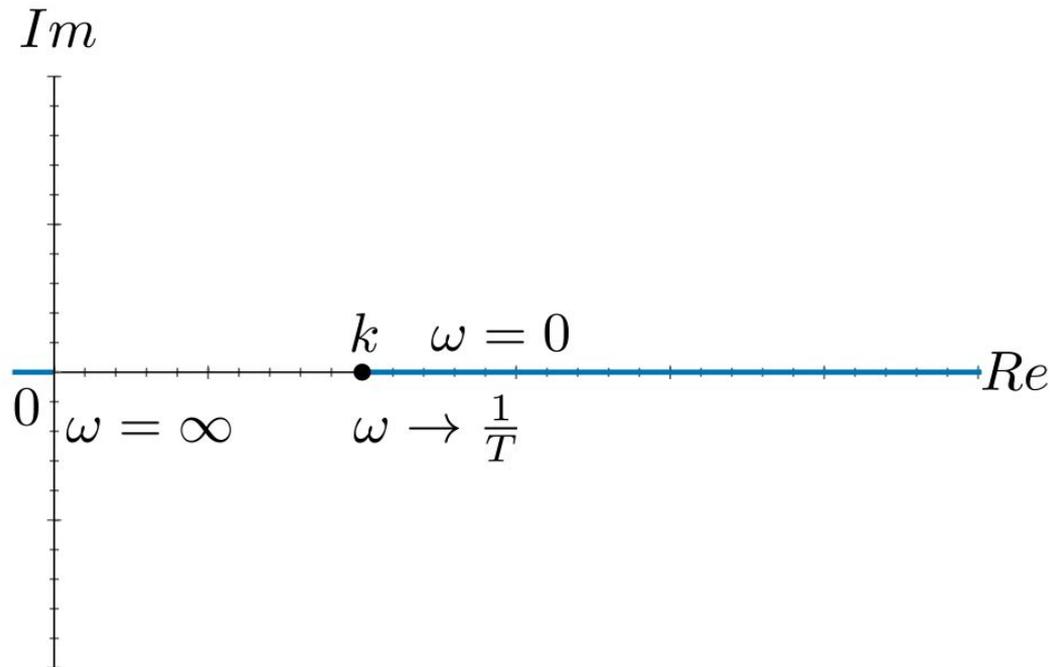


Консервативное звено

Уравнение
движения

$$T^2 \ddot{y}(t) + y(t) = kX(t)$$

АФЧХ



Консервативное звено

Уравнение
движения

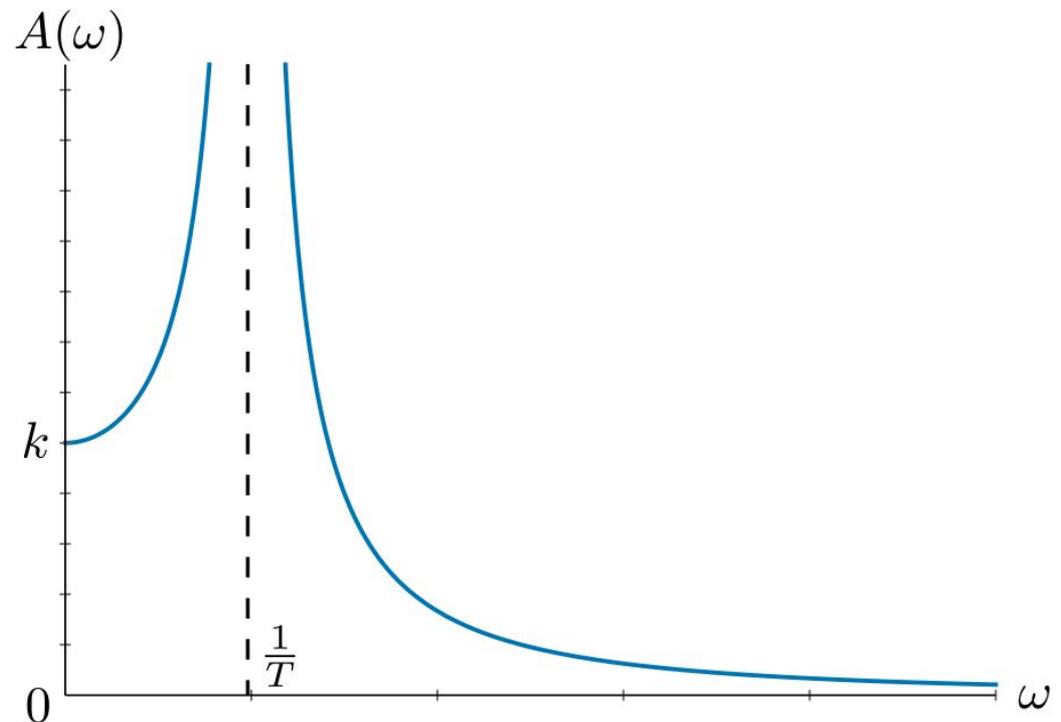
$$T^2 \ddot{y}(t) + y(t) = kX(t)$$

АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = \frac{k}{|1 - \omega^2 T^2|},$$

$$\psi = 0 \text{ при } 0 < \omega < \frac{1}{T}$$

$$\psi = -\pi \text{ при } \omega > \frac{1}{T}$$

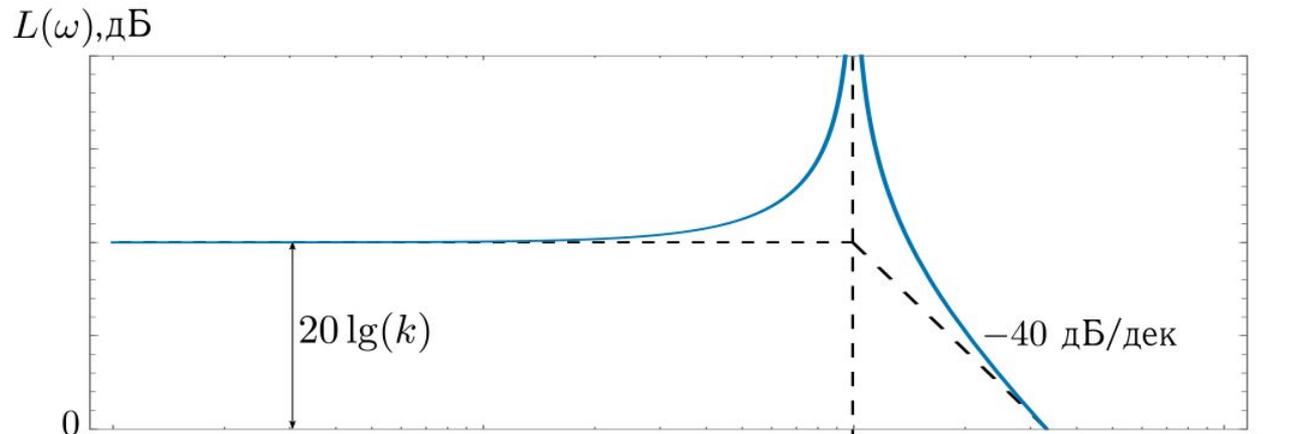


Консервативное звено

Уравнение
движения

$$T^2 \ddot{y}(t) + y(t) = kx(t)$$

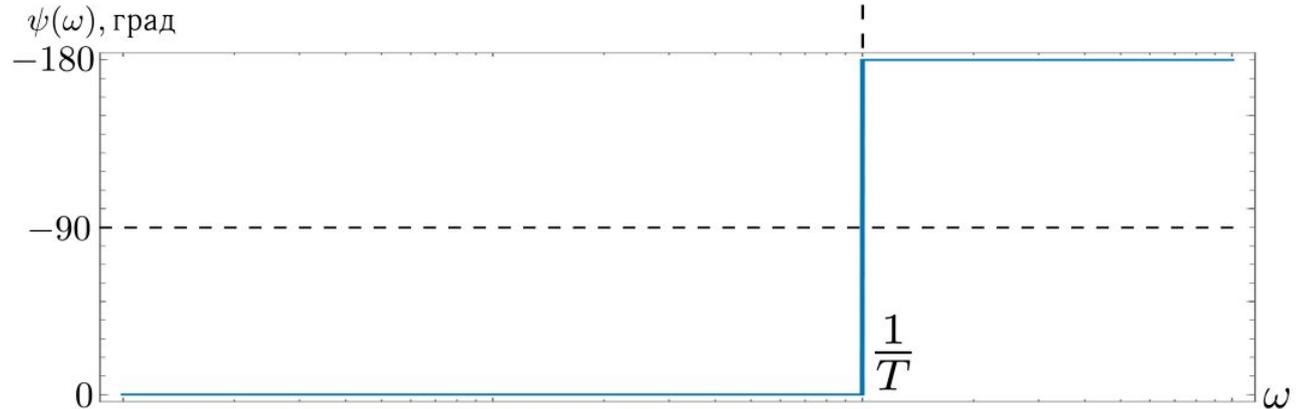
ЛАЧХ



Сопрягающая частота

$$\omega = \frac{1}{T}$$

ЛФЧХ



Консервативное звено

Примеры

- Маятниковая система в вакууме
- идеальная LC-цепь