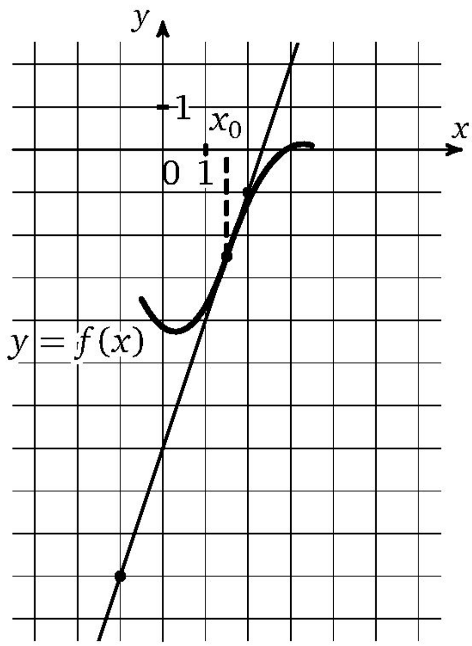
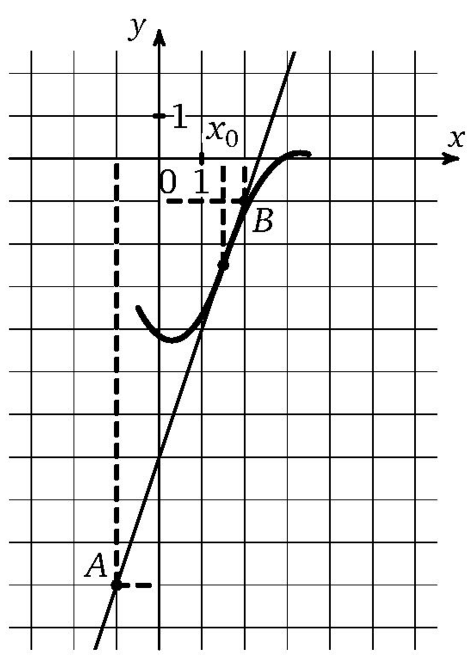
1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



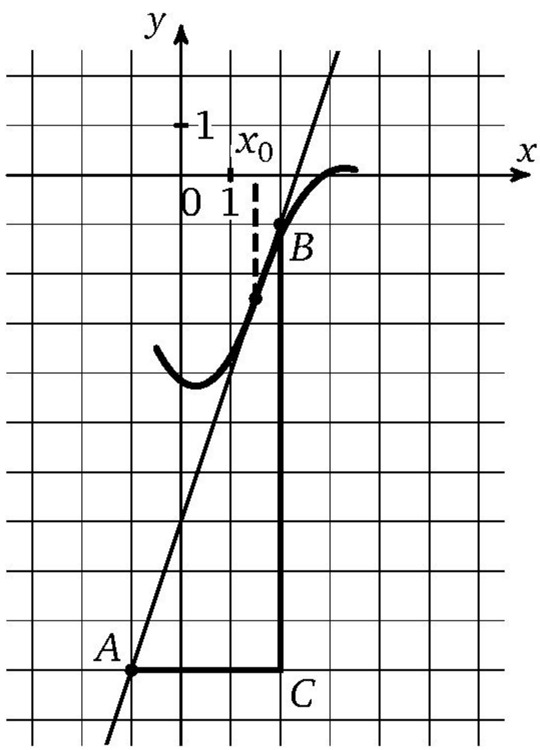
Решение. Значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно $\operatorname{tg}\alpha$ — угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке. Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на



касательной, абсциссы и ординаты которых — целые числа, причем точка A расположена левее (ее абсцисса меньше).

Знак производной (углового коэффициента) можно определить по рисунку, например, так: если касательная «смотрит вверх» — точка B лежит выше точки A, — то производная положительна, если точка B ниже, то отрицательна (если касательная горизонтальна, то производная равна 0).

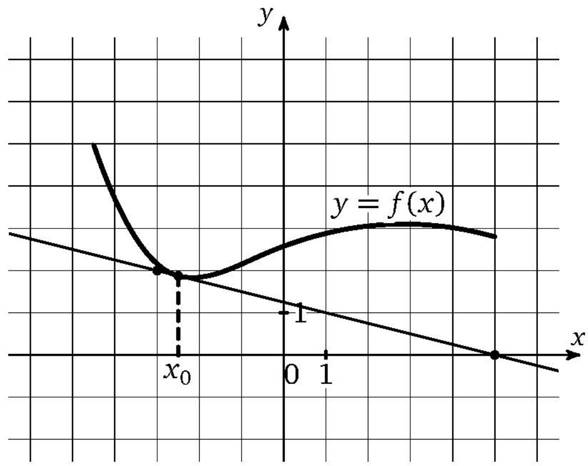
Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC (см. рисунок).



Модуль углового коэффициента будет равен $\frac{BC}{CA}$. Найдем координаты точки A, опустив перпендикуляры на оси Ox и Oy (на рисунке на с. 11 показаны пунктиром). Имеем в первой задаче: $A(-1; -10)$, $B(2; -1)$ и $C(2; -10)$. Тогда длина BC равна разнице ординат точек B и C, то есть $BC = -1 - (-10) = -1 + 10 = 9$, длина AC равна разнице абсцисс точек C и A, $CA = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$. Отсюда искомое значение производной равно $\frac{9}{3} = 3$.

Ответ: 3.

2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Задача 2. *Ответ*: $-0{,}25$.

При решении этой задачи важно помнить, что тангенс острого угла прямоугольного треугольника — это отношение противолежащего катета к прилежащему, а не большего к меньшему и что производная бывает отрицательной, в отличие от тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

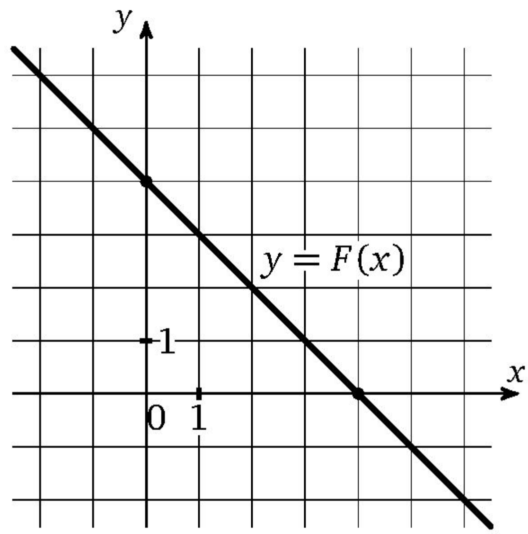
При решении таких задач можно использовать следующее рассуждение.

Если уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y = kx + b$, то значение производной в точке x_0 равно k.

Найдя координаты двух точек $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, лежащих на касательной, мы можем найти k из системы уравнений

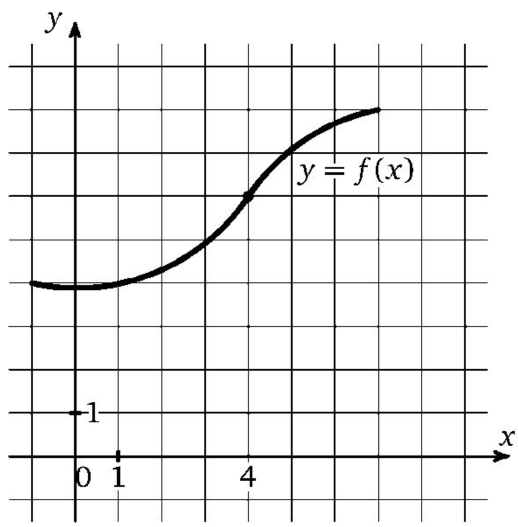
$$\begin{cases} y_a = k \cdot x_a + b, \\ y_b = k \cdot x_b + b. \end{cases}$$

3. Прямая, изображенная на рисунке, является графиком одной из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите $f(1)$.

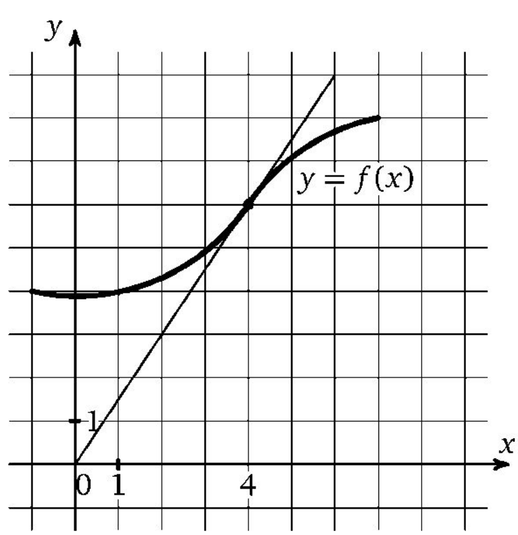


При решении задачи 3 следует воспользоваться тем, что по определению первообразной функции $F'(x) = f(x)$. Таким образом $f(3) = F'(3)$. Так как графиком $F(x)$ является прямая, то значением производной функции F в каждой точке будет угловой коэффициент этой прямой. Он считается так же, как в предыдущих задачах. Откуда $f(3) = -1$.

4. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой 4, проходит через начало координат. Найдите $f'(4)$.

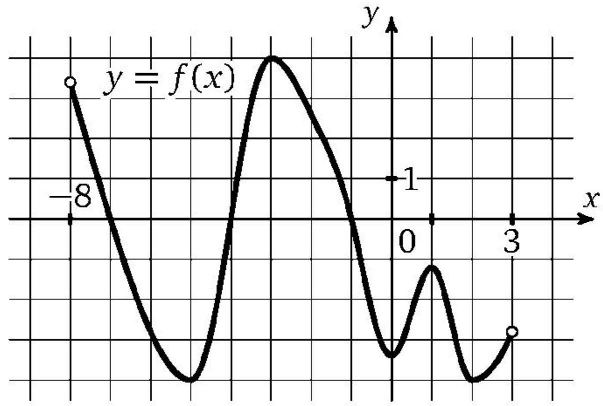


Решение. Если касательная проходит через начало координат, то можно изобразить ее на рисунке, проведя прямую через начало координат и точку касания. Далее решение задачи аналогично решению задач 1—3. В качестве точек с целочисленными координатами, лежащих на касательной, можно взять начало координат и точку касания.

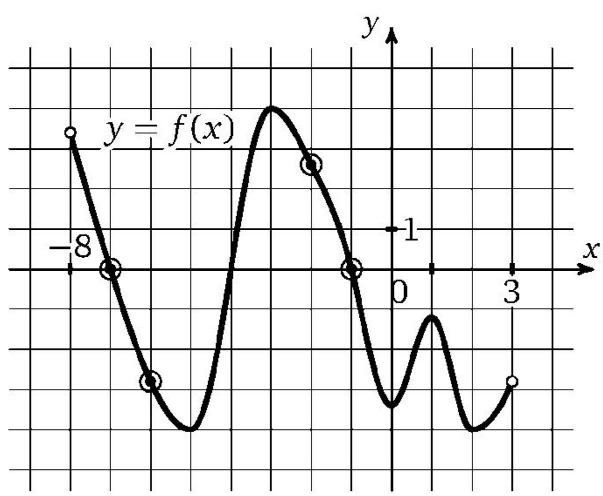


Ответ: 1,5.

5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Определите количество целых чисел x_i, для которых $f'(x_i)$ отрицательно.



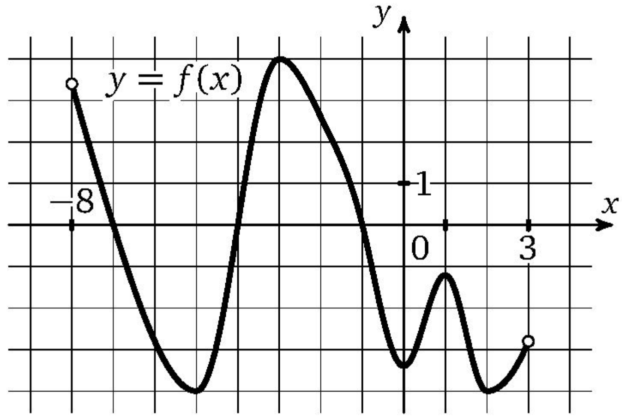
Решение. Решим эту задачу, воспользовавшись следующим утверждением. Производная дифференцируемой функции на промежутке убывания (возрастания) неположительна (неотрицательна). Значит, необходимо выделить промежутки убывания функции и сосчитать количество целых чисел, принадлежащих этим промежуткам. Причем производная равна нулю на концах этих промежутков, значит, нужно брать только внутренние точки промежутков.



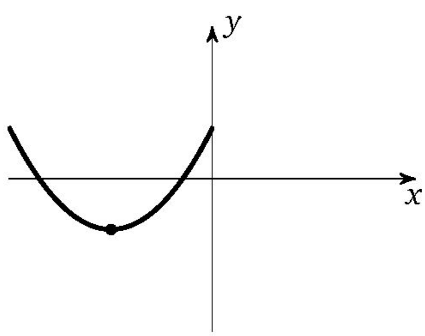
Ответ: 4.

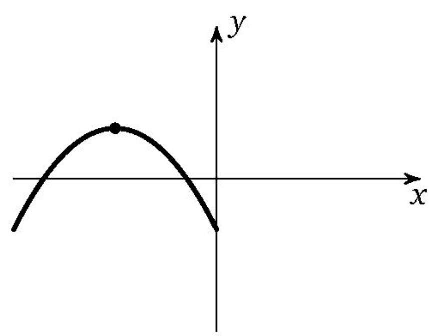
При решении этой задачи важно не ошибиться в том, какие мы точки ищем, с положительной производной или с отрицательной, для этого можно в условии задачи подчеркнуть соответствующее слово.

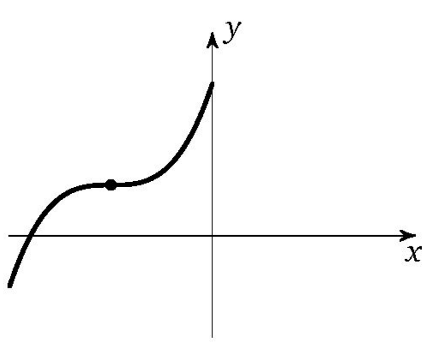
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Решение. Возможны три различные «картинки» (формально говоря, в окрестности изолированного нуля производной, но только такие случаи и рассматриваются в школьном курсе и могут встретиться на экзамене).

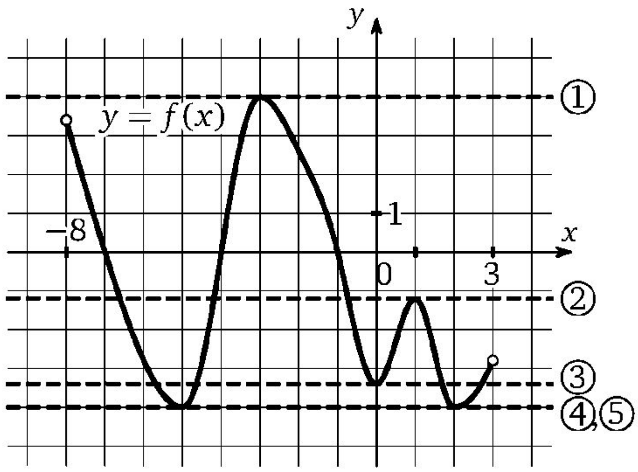






В нашем случае третий вариант не встречается, поэтому отметим на рисунке все места, где встречаются первые два варианта, и сосчитаем их количество.

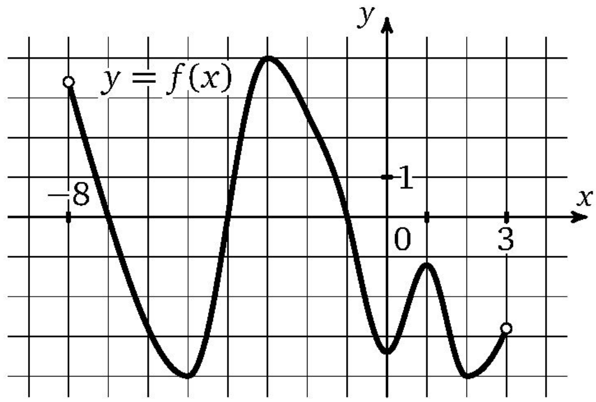
Производная функции в точке x_0 равна 0 тогда и только тогда, когда касательная к графику функции, проведенная в точке с абсциссой x_0, горизонтальна. Отсюда следует другой способ решения задачи — приложить линейку или край листа бумаги к рисунку сверху горизонтально (на рисунке показано пунктиром) и, двигая «вниз», сосчитать количество точек с горизонтальной касательной.



Ответ: 5.

Если перед нами график прямолинейного движения, то вопрос задачи приобретает физический смысл, ведь значение производной в точке будет мгновенной скоростью, а точка, в которой производная равна нулю, соответственно точкой остановки.

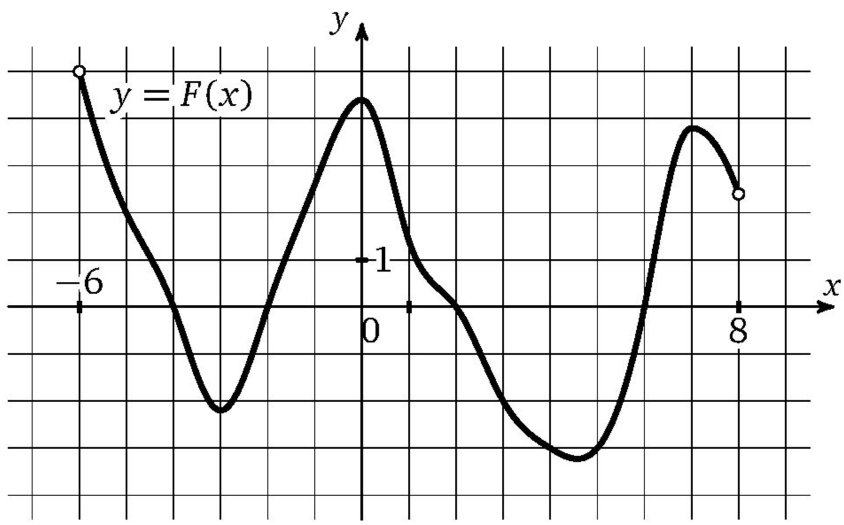
7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.



Решение. Прямая $y = 18$ — горизонтальная, значит, если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Следовательно, при решении этой задачи можно воспользоваться вторым решением задачи 6, то есть приложить линейку или край листа бумаги горизонтально и, двигая его «вниз», сосчитать количество точек с горизонтальной касательной.

Ответ: 5.

8. На рисунке изображен график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции f, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых чисел x_i, для которых $f(x_i)$ положительно.



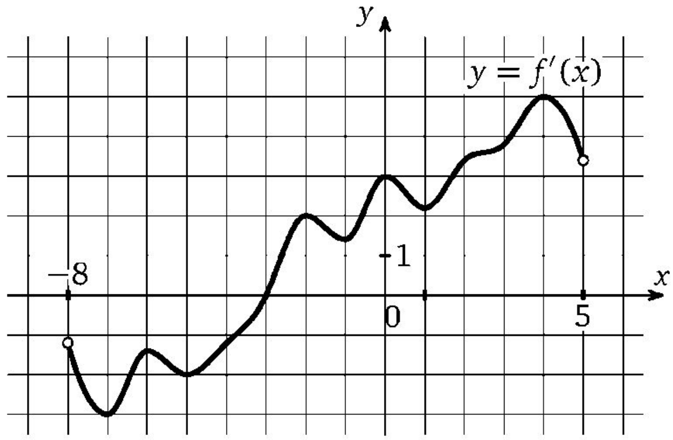
К задачам 8, 9

9 На рисунке изображен график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции f, определенной на интервале $(-6; 8)$. Найдите количество точек, в которых $f(x) = 0$.

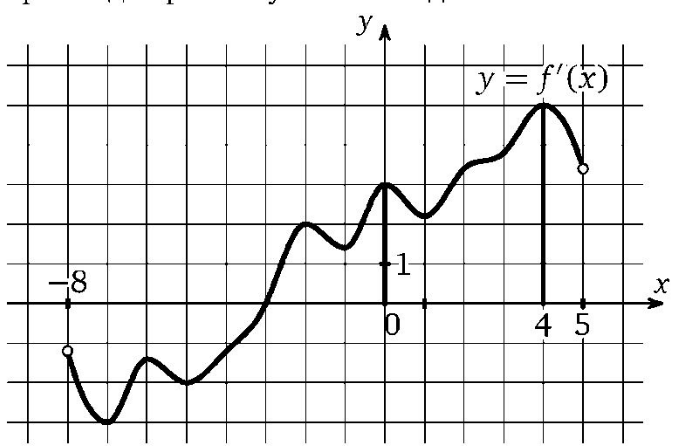
Решение. Стоит отметить, что по ходу решения задача 3 не отличается от задач 1 и 2. В ней мы учитывали, что так как $F(x)$ — первообразная функции f, то $F'(x) = f(x)$.

Решение задач 8 и 9 аналогично решениям задач 5 и 6 диагностической работы. С той лишь разницей, что вместо рассмотрения функции и её производной, мы рассматриваем первообразную и функцию соответственно.

10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. В какой точке отрезка $[0; 4]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Решение. Для начала отметим на рисунке границы отрезка, о котором идет речь в условии задачи.

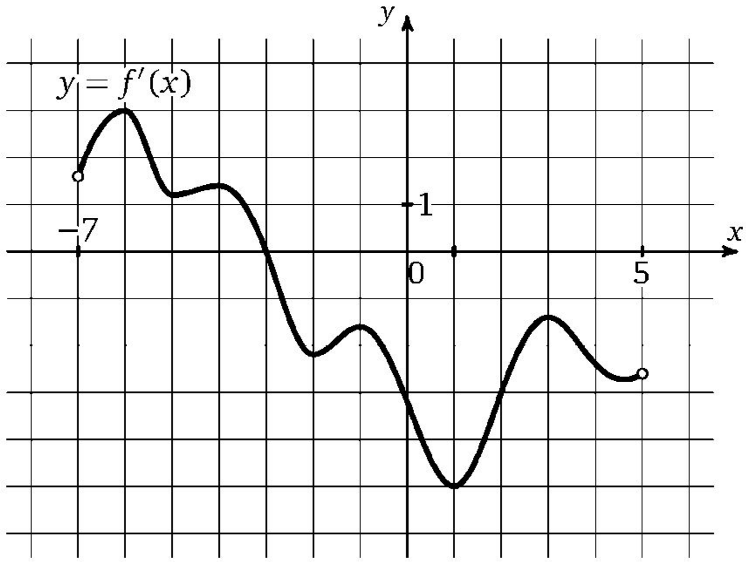


Заметим, что на этом отрезке производная функции положительна, значит, сама функция $f(x)$ возрастает, а значит, наименьшее значение на этом отрезке она принимает в левом конце отрезка, то есть в точке 0 (отметим, что при этом производная на этом отрезке, как видно из графика, принимает наименьшее значение в точке 1).

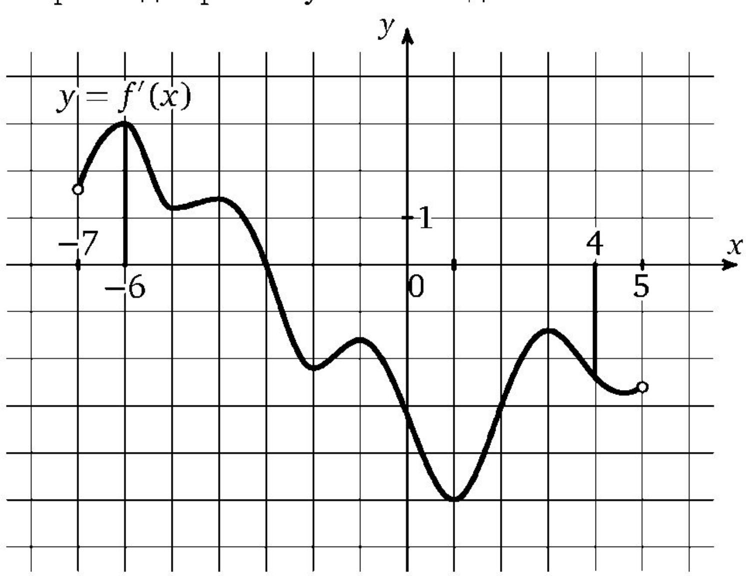
Ответ: 0.

В этой задаче особенно важно внимательно прочитать условие. На рисунке изображен график производной, это слово при решении задачи можно специально подчеркнуть в условии для того, чтобы не запутаться.

11. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-6; 4]$.



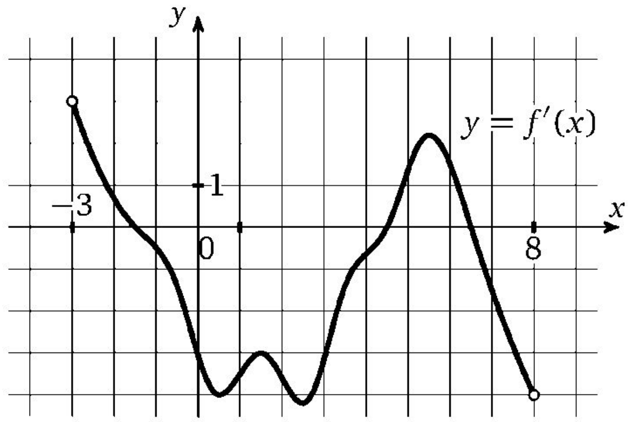
Решение. Для начала отметим на рисунке границы отрезка, о котором идет речь в условии задачи.



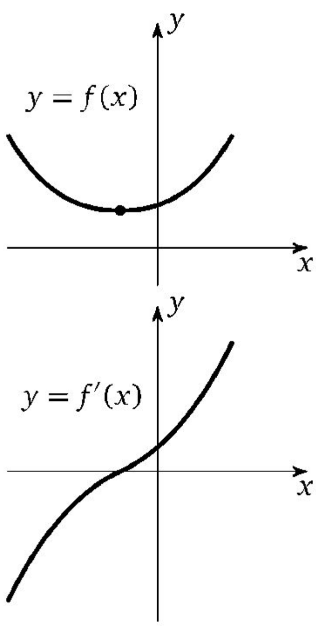
Заметим, что на этом отрезке производная функции один раз обращается в 0 (в точке -3) и при переходе через эту точку меняет знак, откуда ясно, что точка -3 и есть искомая точка экстремума функции на отрезке.

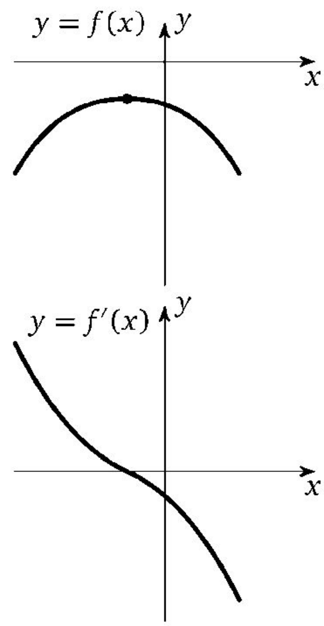
Ответ: -3.

12. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 7]$.



Решение. В точке максимума производная функции равна 0 либо не существует. Видно, что таких точек, принадлежащих отрезку $[-2; 7]$, три: $-1{,}5$; $4{,}5$; $6{,}5$. При этом в точке 4,5 производная слева отрицательна, а справа положительна — это точка минимума (см. рисунок слева).



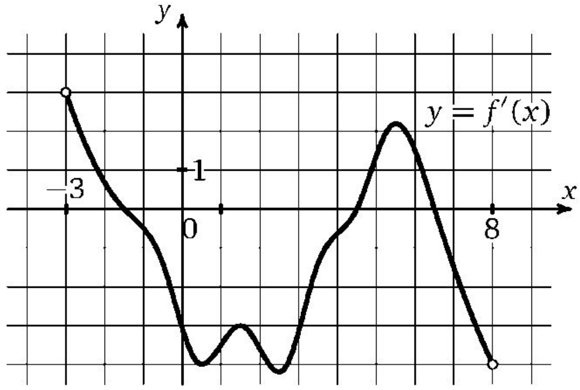


В точках $-1{,}5$ и $6{,}5$ производная меняет знак с «+» на «−» — это точки максимума (см. рисунок справа).

Ответ: 2.

При решении этой задачи помимо того, что необходимо обратить особое внимание на то, что это график производной и точки максимума ищутся не на всей области определения, а на отрезке, нужно еще особо отметить, что ищутся именно точки максимума, а не минимума или экстремума.

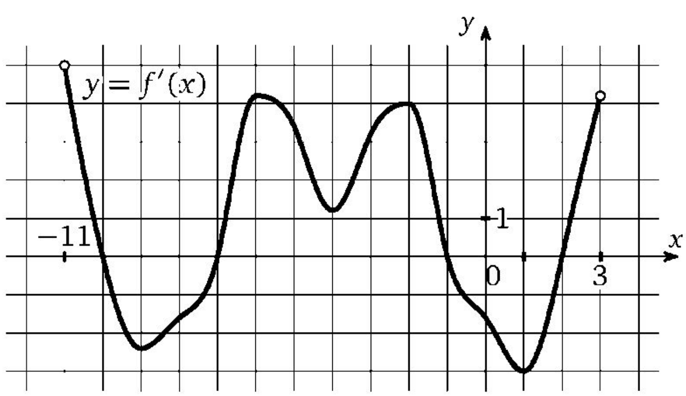
13. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.



Решение. На промежутках убывания дифференцируемой функции $f(x)$ ее производная неположительна (на промежутках возрастания соответственно неотрицательна). У нас таких промежутков два: $[-1{,}5; 4{,}5]$ и $[6{,}5; 8)$, целые числа, входящие в эти промежутки, — это -1; 0; 1; 2; 3; 4; 7, то есть искомая сумма равна $-1+0+1+2+3+4+7=16$.

Ответ: 16.

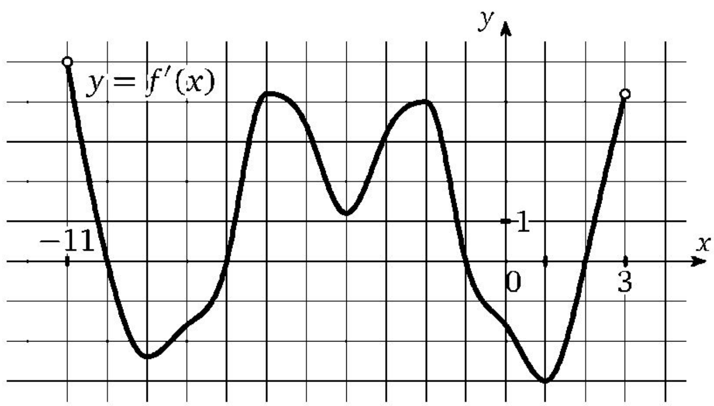
14. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



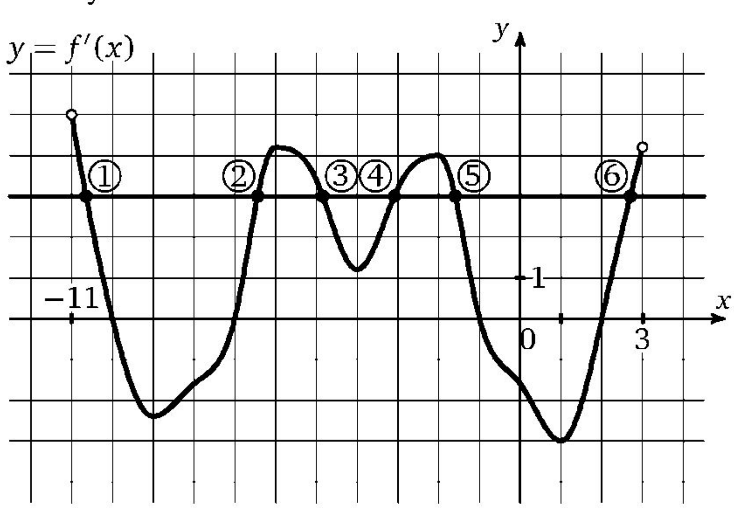
Решение. В этой задаче, как и в задаче 13, необходимо сначала найти промежутки возрастания функции. В нашем случае их 3: $(-11; -10]$, $[-7; -1]$ и $[2; 3)$, наибольшую длину из них, очевидно, имеет промежуток $[-7; -1]$, его длина равна $-1-(-7)=6$.

Ответ: 6.

15. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_i параллельна прямой $y = 3x - 11$ или совпадает с ней.

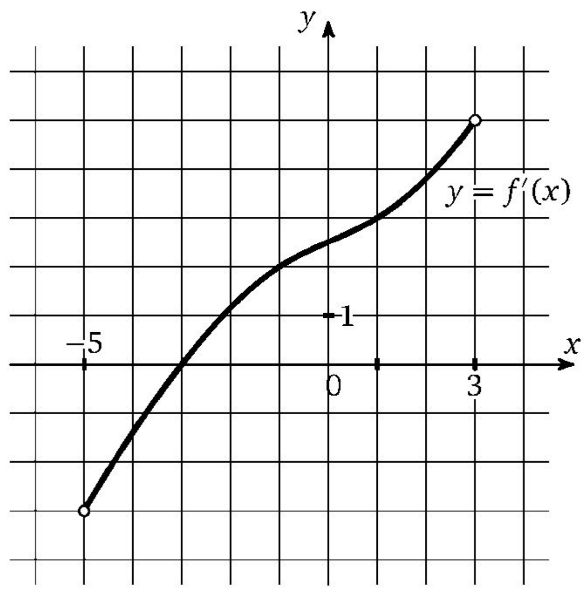


Решение. Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 11$ или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент равен 3, а значит, нам нужно найти количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 3. Для этого на графике производной проведем горизонтальную черту, соответствующую значению $y = 3$, и посчитаем количество точек графика производной, лежащих на этой линии. В нашем случае таких точек 6.



Ответ: 6.

16. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;3)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=2x+7$ или совпадает с ней.



Решение. Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=2x+7$ или совпадает с ней, то значение производной в точке касания равно 2. Для того чтобы найти искомую абсциссу, выясним, в какой точке значение производной функции $f(x)$ равно 2. Для этого проведем горизонтальную прямую $y=2$ и найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с графиком производной. Она и будет искомой абсциссой точки касания.

Ответ: -1.

17. Прямая $y=4x+13$ параллельна касательной к графику функции

$$y=x^2-3x+5.$$

Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Если прямая параллельна касательной к графику функции в какой-то точке (обозначим ее абсциссу через x_0), то ее угловой коэффициент (в нашем случае 4) равен значению производной функции в точке x_0. Производной функции

$$f(x)=x^2-3x+5$$

будет функция

$$f'(x)=2x-3.$$

Значит, для нахождения искомой точки касания необходимо, чтобы $2x-3=4$, откуда $x=3{,}5$.

Ответ: 3,5.

18. Прямая $y=2x+37$ является касательной к графику функции

$$y=x^3+3x^2-7x+10.$$

Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Заметим, что если прямая является касательной к графику, то ее угловой коэффициент должен быть равен производной функции в точке касания, откуда имеем $3x^2+6x-7=2$, то есть $3x^2+6x-9=0$, или $x^2+2x-3=0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: -3 и 1. Таким образом, есть две точки, в которых касательная к графику функции

$$y=x^3+3x^2-7x+10$$

имеет угловой коэффициент, равный 2. Для того чтобы определить, в какой из этих двух точек прямая $y=2x+37$ касается графика функции, вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной. Значение функции

$$y=x^3+3x^2-7x+10$$

в точке -3 равно $-27+27+21+10=31$, а значение в точке 1 равно $1+3-7+10=7$. Заметим, что точка с координатами $(1;7)$ не удовлетворяет уравнению касательной, так как $7\neq 2+37$. А вот точка $(-3;31)$ уравнению касательной удовлетворяет, так как $-6+37=31$. Значит, искомая абсцисса точки касания равна -3.

Ответ: -3.

19. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

Решение. Аналогично решению предыдущей задачи производная функции в точке касания должна совпадать с угловым коэффициентом прямой. Откуда, если за x_1 принять абсциссу точки касания, имеем: $2ax_1 + 2 = 3$, т. е. $ax_1 = \frac{1}{2}$. Найдем значение исходной функции в точке касания:

$$ax_1^2 + 2x_1 + 3 = \frac{1}{2}x_1 + 2x_1 + 3 = \frac{5}{2}x_1 + 3.$$

Так как прямая $y = 3x + 1$ — касательная, имеем: $\frac{5}{2}x_1 + 3 = 3x_1 + 1$, откуда $x_1 = 4$. А значит, $a = \frac{1}{8}$.

Ответ: 0,125.

Немного по-другому следует действовать, если неизвестен другой коэффициент квадратичной функции. Рассмотрим возможные задачи.

Прямая $y = 5x - 13$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 + bx + 37$. Найдите b.

Решение. Если x_0 — абсцисса точки касания, то $4x_0 + b = 5$, откуда $b = 5 - 4x_0$. Аналогично предыдущей задаче найдем x_0. $2x_0^2 + (5 - 4x_0)x_0 + 37 = 5x_0 - 13$, откуда несложными преобразованиями получаем $x_0^2 = 25$. Имеем две возможности: при $x_0 = -5$ имеем $b = 25$, при $x_0 = 5$ имеем $b = -15$.

Как видно, задача имеет два решения, в таких случаях обычно вводится дополнительное условие, позволяющее отбросить одно из них. Например, условие положительности x_0 или значения функции в точке касания.

Самым простым случаем является следующая задача.

Прямая $y = 4x + 3$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + c$. Найдите c.

Решение. Аналогично предыдущим задачам обозначим абсциссу точки касания x_0 и приравняем значение производной функции в точке x_0 угловому коэффициенту касательной: $2x_0 - 2 = 4$, откуда $x_0 = 3$. Значение исходной функции в точке 3 равно $9 - 6 + c = c + 3$, значит, $c + 3 = 4 \cdot 3 + 3$, откуда $c = 12$.

20. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в момент времени $t = 6$ с.

Решение. Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_0 при прямолинейном движении, совершаемом по закону $x = f(t)$, равна значению производной функции f при $t = t_0$, искомая скорость будет равна

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6^2 - 3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 = 20 \text{ м/с.}$$

Ответ: 20.

21. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 2 м/с?

Решение. Воспользовавшись тем же рассуждением, что и в предыдущей задаче, получим, что если искомое время t_0, то

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot t_0^2 - 3 \cdot 2 \cdot t_0 - 5 = 2,$$

откуда $t_0^2 - 6t_0 - 7 = 0$, $t_0 = -1$ или $t_0 = 7$. Ввиду того, что t_0 — время, оно не может быть отрицательным, поэтому ответом в задаче будет 7 секунд.

Ответ: 7.