Урок 49

Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат. Определение тригонометрических функций.

Цель урока. *Обобщить понятие угла, дать понятие радианного измерения углов, научить учащихся переводить углы из градусной меры в радианную и обратно.*
Кратко познакомить учащихся с историей возникновения тригонометрии, развитие которой происходило в связи с необходимостью решения вычислительных задач, выдвигавшихся астрономией, географией, геодезией. Обратить внимание учащихся на тот факт, что академик Петербургской Академии наук Л.Эйлер окончательно разработал символику тригонометрии, которой пользуются и в наши дни. Радианная мера угла появилась уже в трудах И. Ньютона и Г.Лейбница, но вошла в науку и практику вычислений благодаря трудам Л.Эйлера.

Вид занятия. *Обобщения и систематизации знаний.*

Изучение материала.

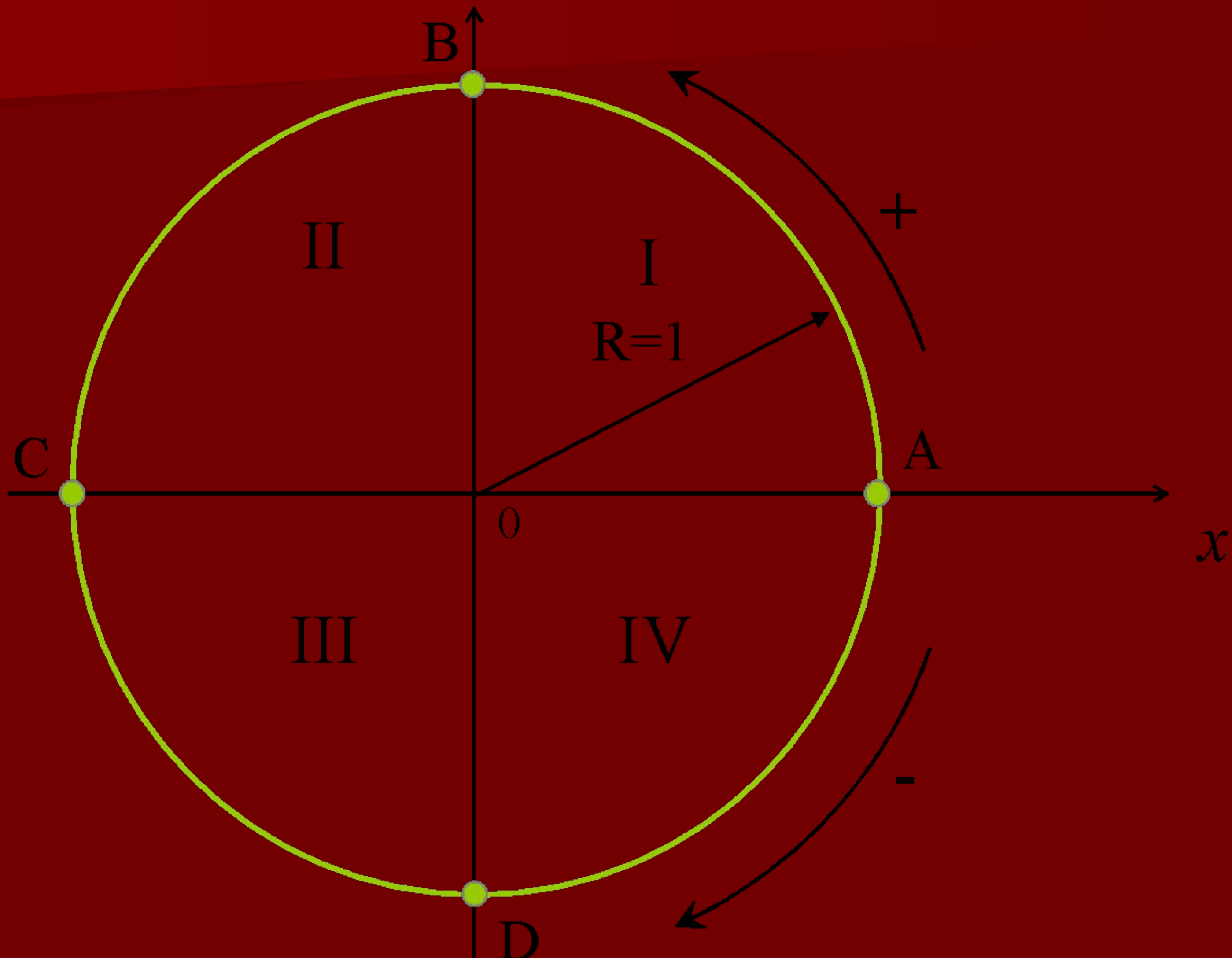
- Понятие единичной окружности.

- Определение радиана..

- Формулы перехода из радиан в градусы и обратно.

- Поворот точки вокруг начала координат.

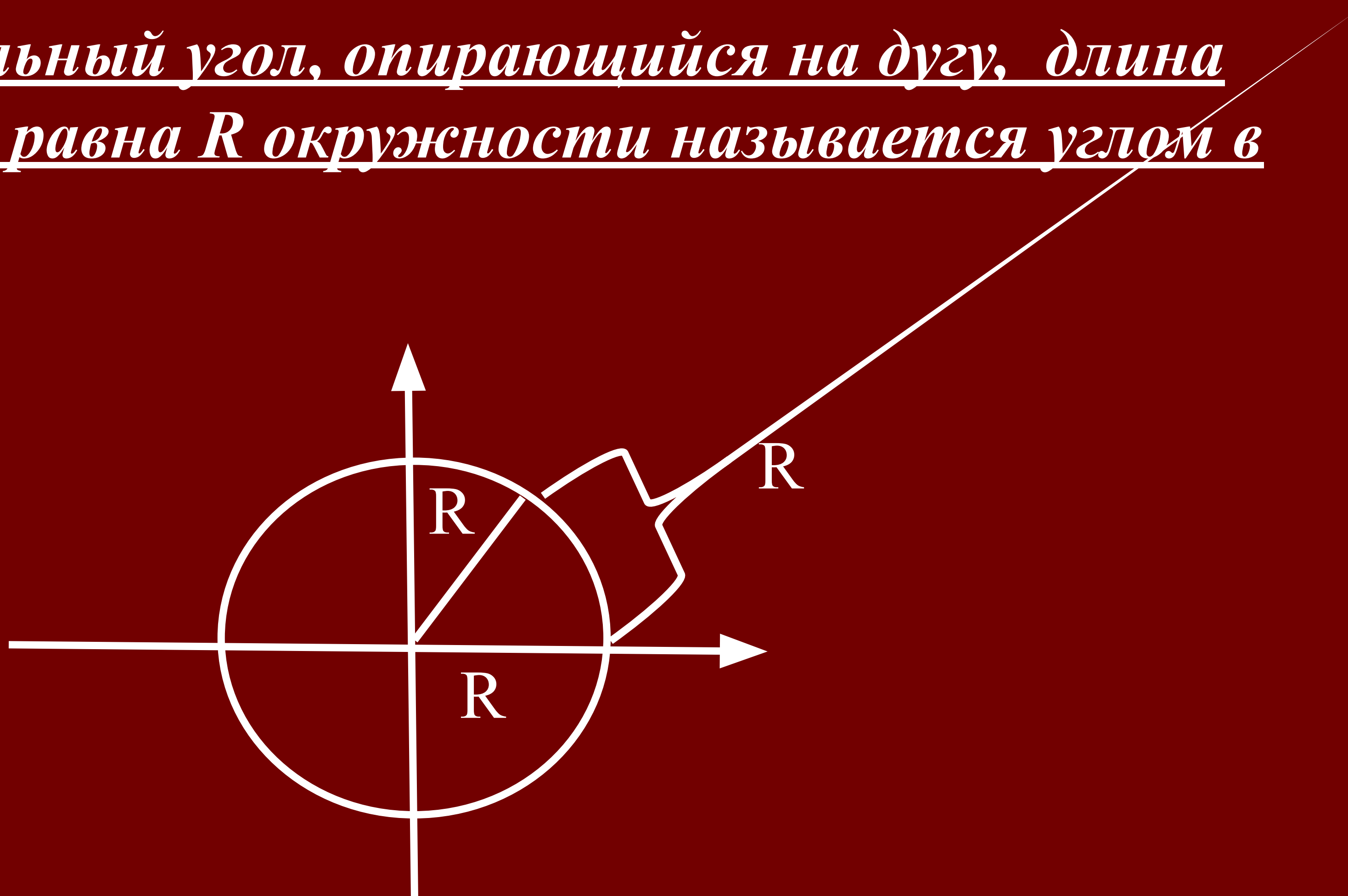
Тригонометрическая окружность, единичная окружность.



Градусная и радианная мера угла.

Углы измеряются градусной и радианной мерами. Рассмотрим единичную окружность.

<u>Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна R окружности называется углом в 1 радиан</u>



Выясним, сколько градусов соответствует углу в 1 радиан.

l=2πR – это длина дуги окружности

πR – это длина дуги полуокружности, полуокружность соответствует центральному углу в 180°. Поэтому длина дуги длиной R стягивает угол в π раз меньший, т.е.

$$1\,рад = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}; \qquad 1^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180}\right)рад;$$

т.к π≈3,14, то $1\ \text{радиан} = \dfrac{180^{o}}{\pi} \approx 57^{o}\ 17'\ 45''$,

$$1^{o} = \frac{\pi}{180^{o}} \approx 0,\ 017\ \text{радиана}.$$

Для того, чтобы перейти от радианной меры к градусной нужно значение угла, заданного в радианной мере угла умножить на $\dfrac{180^o}{\pi}$,

например:

$$1{,}5\,рад = 1{,}5 \cdot 57^{\circ} = 85{,}5^{\circ},$$

$$2{,}1\,рад = 2{,}1 \cdot 57^{\circ} = 119{,}7^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^o}{\pi} = 30^o$$

$$\frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180^o}{\pi} = 108^o$$

2) Для того, чтобы перейти от градусной меры к радианной нужно значение угла, заданного в радианной мере угла умножить на $\dfrac{\pi}{180^o}$,

например:

$$36{,}8^\circ = 36{,}8 \cdot 0{,}017\, рад = 0{,}63\, рад;$$

$$17{,}4^\circ = 17{,}4 \cdot 0{,}017\, рад = 0{,}3\, рад$$

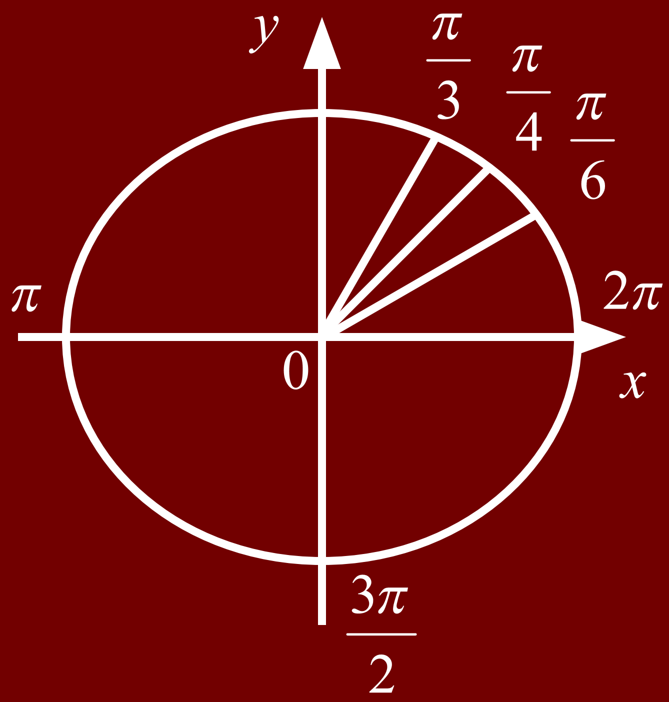
$$45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4},$$

$$210^\circ = 210^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6},$$

Запомни !

градусы	0	30	45	60	90	180	270	360
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Отметим эти точки на единичной окружности



Самостоятельно

градусы	**0,5**	**36**	**159**	**108**				
радианы					$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10}$	2,5	1,8

градусы	0,5	36	159	108	150	54	142,5	102,6
радианы	0,0085	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{53\pi}{60}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10}$	2,5	1,8

Поворот точки вокруг начала координат

1)Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1;0) на угол:

$$4\pi - (1;0);\quad -\frac{3\pi}{2};\quad -6{,}5\pi;\quad \frac{\pi}{4};\quad \frac{\pi}{3};\quad -45^{\circ};$$

2)На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки с координатами (1;0) на заданный угол:

$$\frac{\pi}{4};\qquad -\frac{\pi}{3};\qquad -\frac{3\pi}{4} = -135;\qquad \frac{4\pi}{3};$$

$$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi;\qquad -225^{\circ};$$

На какой угол можно повернуться еще, чтобы попасть в эти точки?

$$\frac{\pi}{4}+2\pi = \quad \frac{9\pi}{4} = \quad \frac{\pi}{4}+2\pi n;$$

$$-\frac{\pi}{3}-2\pi = -\frac{7\pi}{3};$$

$$-\frac{3\pi}{4}-2\pi n;$$

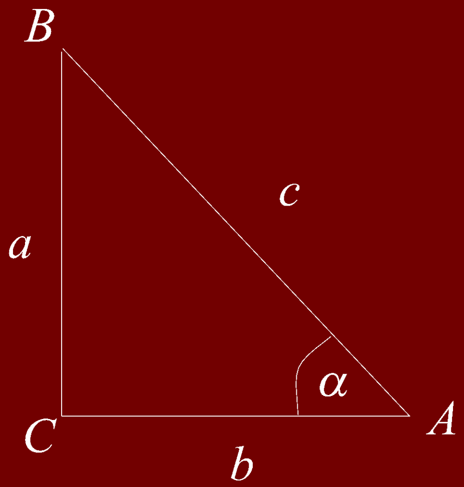
$$\frac{4\pi}{3} = 240+2\pi n;$$

<u>Вывод</u>. Одной и той же точке М на единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha\pm2\pi n$, где n – целое число.

$$7\pi = \pi + 3\cdot\pi; \qquad -\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi; \qquad \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3};$$

$$-\frac{7\pi}{4};$$

Определение тригонометрических функций через стороны прямоугольного треугольника



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}, \quad tg\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

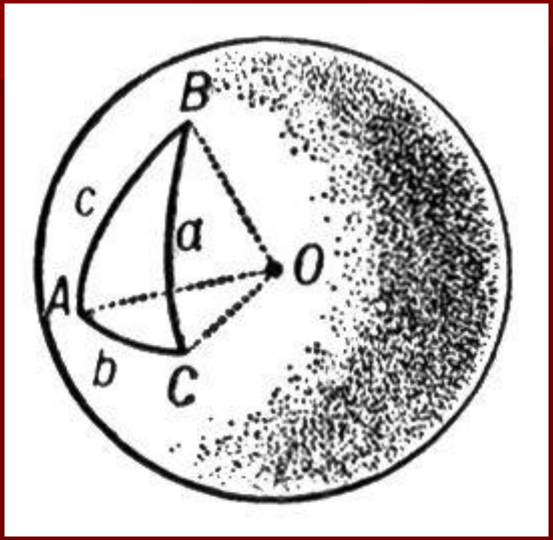
$$ctg\alpha = \frac{b}{a} \quad ctg\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$$

История тригонометрии.

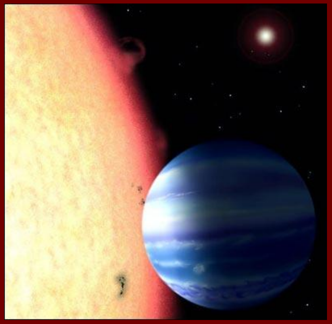
Тригонометрия – математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.

- Впервые способы решения треугольников, основанные на зависимостях между сторонами и углами треугольника, были найдены древнегреческими астрономами *Гиппархом* (2 в. до н. э.) и *Клавдием Птолемеем* (2 в. н. э.).
- Позднее зависимости между отношениями сторон треугольника и его углами начали называть тригонометрическими функциями.

История тригонометрии.

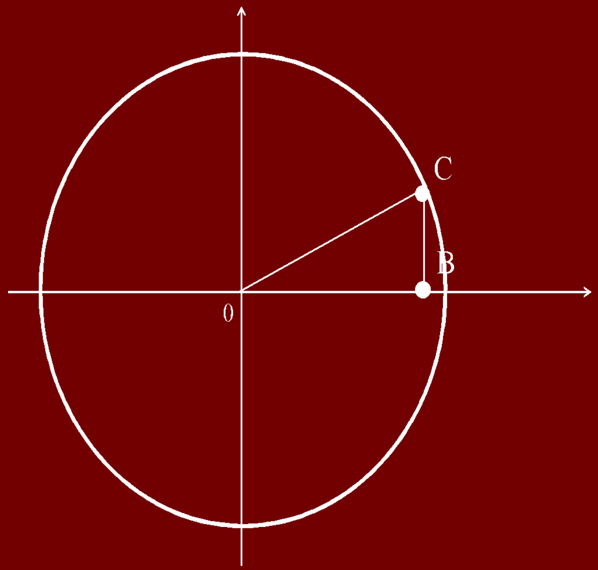


История тригонометрии
Зачатки тригонометрических познаний зародились в древности. На раннем этапе тригонометрия развивалась в тесной связи с астрономией и являлась ее вспомогательным разделом.



История тригонометрии.

Если мы понимаем под синусом угла α в прямоугольном треугольнике OBC отношение катета BC (линия синуса) к гипотенузе OC (т.е. радиусу единичной окружности), то в середине века термином «синус» обозначали саму линию синуса BC.



История тригонометрии.

Окончательный вид тригонометрия приобрела в XVIII веке в трудах Л. Эйлера.

История тригонометрии.

Леонард Эйлер *(1707-83), российский ученый — математик, механик, физик и астроном. По происхождению швейцарец. В 1726 был приглашен в Петербургскую АН и переехал в 1727 в Россию. Был адъюнктом (1726), а в 1731-41 и с 1766 академиком Петербургской АН (в 1742-66 иностранный почетный член). В 1741-66 работал в Берлине, член Берлинской АН. Эйлер — ученый необычайной широты интересов и творческой продуктивности. Автор св. 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки.*

Домашнее задание.

№ 407 (2,4,6); № 408 (2,4,6); №420 № 422