

**ТЕМА**

**ДИПЛОМНОЇ**

**РАБОТИ:**

**РАСХОДУ ГОСУВАННЯ ЯВНОЇ  
РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ДО  
РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ  
ДЛЯ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ  
ЗАДАЧ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО  
СЕРЕДОВИЩА**

**ВИКОН**

**АВ :**

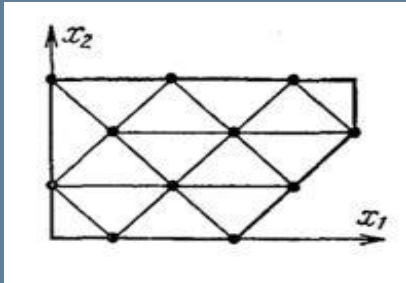
**МИКИТА**

**ПЕТРЕНКО**

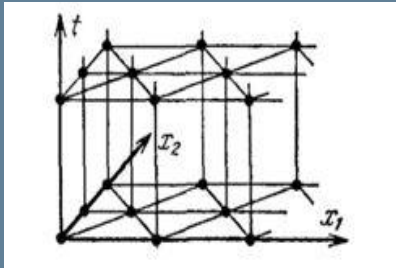
НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ В  
ОБЛАСТЯХ ЗІ СКЛАДНОЮ  
ФОРМОЮ РІДКО ВДАЄТЬСЯ

РОЗВ'ЯЗУВАТИ  
МЕТОДОМ  
АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ  
ВИРІШЕННЯ  
ЦИХ ЗАВДАНЬ  
Є ЧИСЕЛЬНІ  
МЕТОДИ.

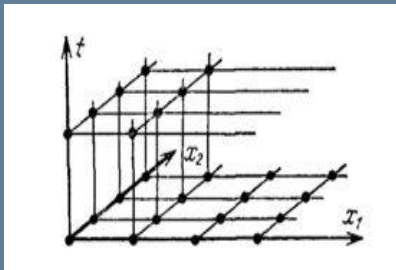
# ЯКІ ІСНУЮТЬ СІТКИ ?



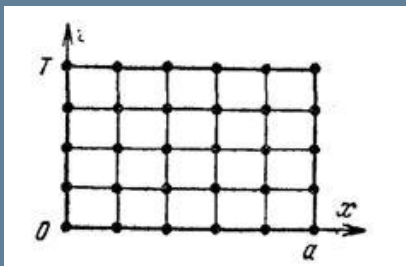
ТРИКУТНА  
СІТКА



СІТКА З ТРИГРАННИМИ  
ПРИЗМАМИ



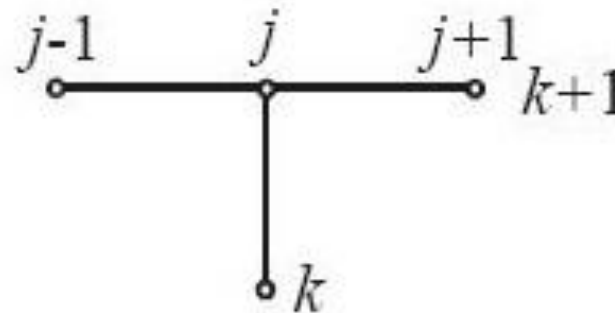
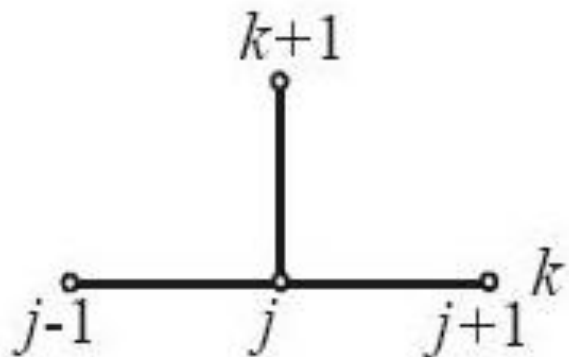
СІТКА З ПРЯМОКУТНИМИ  
ПАРАЛЕЛЕПІПЕДАМИ



ПРЯМОКУТНА  
СІТКА

# ЯВНІ ТА

# НЕЯВНІ



**ШАБЛОН  
ЯВНОЇ  
СХЕМИ**

**ШАБЛОН  
НЕЯВНОЇ  
СХЕМИ**

# ПОСТАНОВКА

## ЗАДАЧІ

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{e^{x+t}} + \frac{x+t}{e^x}, & x \in [-1, 0), \quad t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = 0, & -1 < x \leq 0, \\ u(0, t) = t, & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

### ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗКУ:

1) РОЗГЛЯНУТИ ЯВНУ ДВОШАРОВУ РІЗНИЦЕВУ СХЕМУ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ, ДОСЛІДЖУВАТИ ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ (ПОРЯДОК АПРОКСИМАЦІЇ, СТІЙКІСТЬ);

2) ЗАСТОСУВАТИ РОЗГЛЯНУТУ ЯВНУ СХЕМУ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

3) ОТРИМАНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПОРІВНЯТИ З ТОЧНИМ, ВИЗНАЧИТИ ПОХИБКУ.

# ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СИСТЕМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ МАТЕМАТИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ

MAPLE

$$u(x, t) = -\frac{x}{e^{x+t}} + (x+t) * F(x, t)$$

РОЗВ'ЯЗОК ВІД  
СИСТЕМИ MAPLE

ПОЧАТК  
ОВА  
УМОВА  
ГРАНИЧ  
НА  
УМОВА

$$u(x, 0) = 0$$

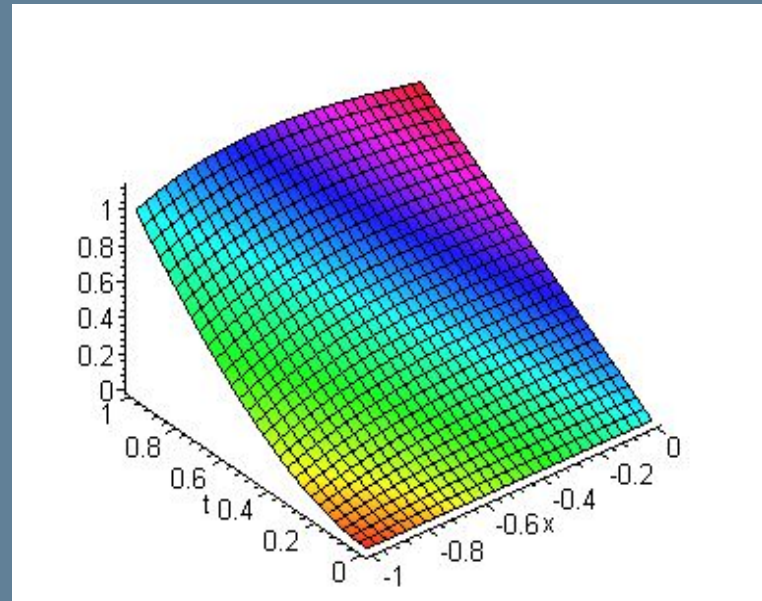
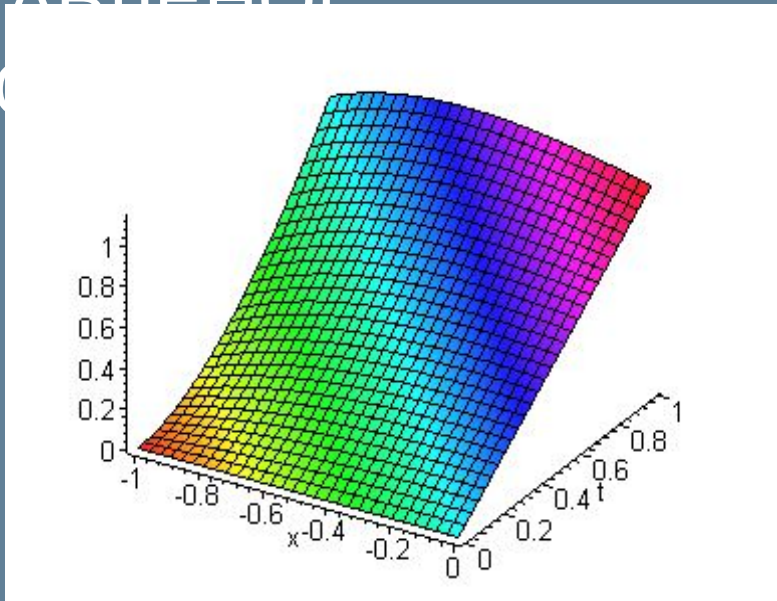
$$u(0, t) = t$$

ВИД НЕВІДОМОЇ  
ФУНКЦІЇ

$$F(x, t) = \frac{1}{e^x}$$

ТОЧНИЙ  
АНАЛІТИЧНИЙ  
РОЗВ'ЯЗОК  
ПОСТАВЛЕНОЇ  
КРАЙО

$$u(x,t) = -\frac{x}{e^{x+t}} + \frac{(x+t)}{e^x}$$



ГРАФІЧНЕ  
ЗОБРАЖЕННЯ  
ОТРИМАНОВОГО  
ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

# ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ХАРАКТЕРИСТИК

$$dt = -dx$$

РІВНЯННЯ  
ХАРАКТЕРИСТИК

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = e^{-c} + \frac{c}{e^{c-\tau}}, \\ U|_{\tau=c} = c, \quad c > 0, \\ U|_{\tau=0} = 0, \quad c \leq 0, \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ  
В НОВИХ  
ЗМІННИХ

$$U(\tau, c) = \int \left( e^{-c} + \frac{c}{e^{c-\tau}} \right) d\tau + A(c) = \frac{\tau}{e^c} - \frac{c}{e^{c-\tau}} + A(c)$$

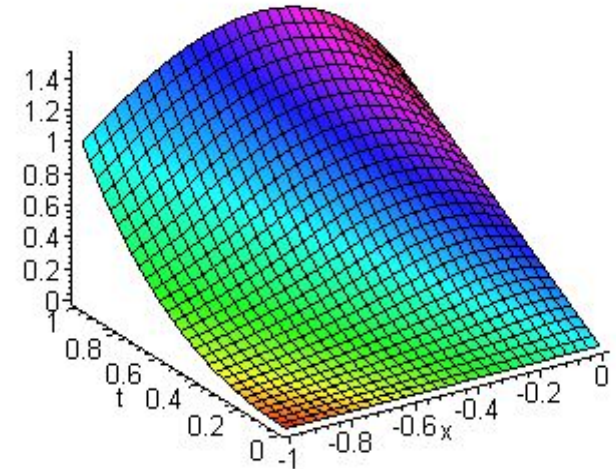
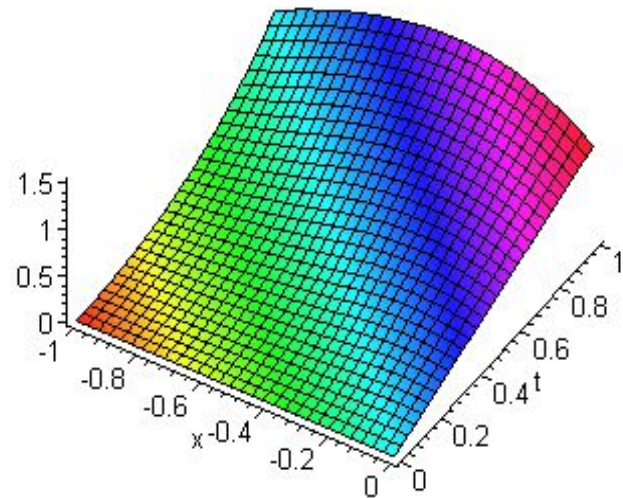
РОЗВ'Я  
ЗОК  
РІВНЯН  
НЯ



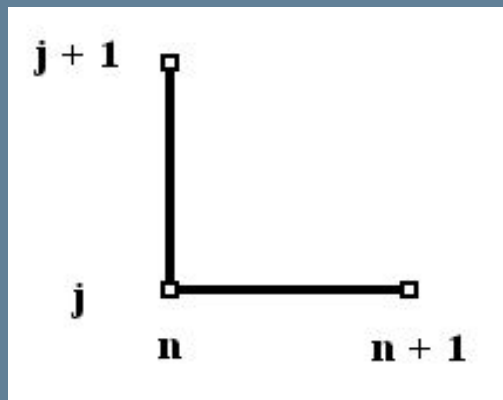
# РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ МЕТОДОМ

## ХАРАКТЕРИСТИК

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{e^{x+t}} - \frac{x+t}{e^x} + \frac{x+t}{e^{x+t}}, & t \leq x, \\ \frac{t}{e^{x+t}} - \frac{x+t}{e^x} + 2(x+t) - \frac{x+t}{e^{x+t}}, & t > x. \end{cases}$$



# НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ



ШАБЛОН ЯВНОЇ  
ДВУШАРОВОЇ РІЗНИЦЕВОЇ  
СХЕМИ РАХУНКУ , ЩО  
БІЖИТЬ

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - \frac{y_{n+1}^j - y_n^j}{h} = \frac{1}{e^{x_n + t_j}} + \frac{x_n + t_j}{e^{x_n}}, & n = 1, 2, 3, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, J, \\ y_n^0 = 0, & n = 1, \dots, N, \\ y_0^j = t_j, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases}$$

КРАЙОВА ЗАДАЧА У  
РІЗНИЦЕВОМУ ВИГЛЯДІ

# ВИЗНАЧЕННЯ ПОРЯДКУ АПРОКСИМАЦІЇ

$$\Psi_n = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{e^{x+t}} - \frac{x+t}{e^x} \right]_n - \left[ \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} - \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{h} - \frac{1}{e^{x_n+t_j}} - \frac{x_n+t_j}{e^{x_n}} \right]$$

**ВИРАЗ ДЛЯ  
НЕВ'ЯЗКИ**

$$\Psi_n = [u_t - u_x]_n - \left[ u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} - \left( u_x + \frac{h}{2} u_{xx} \right) + \dots \right] = \frac{h}{2} u_{xx} - \frac{\tau}{2} u_{tt} + O(\tau+h)$$

# ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ

$$y_n^m = \rho_q^m e^{iqx_n}$$

$$y_n^{m+1} = \rho_q^{m+1} e^{iqx_n}$$

$$y_{n+1}^m = \rho_q^m e^{iq(x_n+h)}$$

$$\frac{\rho_q^{m+1} e^{iqx_n} - \rho_q^m e^{iqx_n}}{\tau} - \frac{\rho_q^m e^{iq(x_n+h)} - \rho_q^m e^{iqx_n}}{h} = 0$$

$$\frac{\rho_q - 1}{\tau} - \frac{e^{iqh} - 1}{h} = 0$$

$$|\rho_q| \leq 1$$

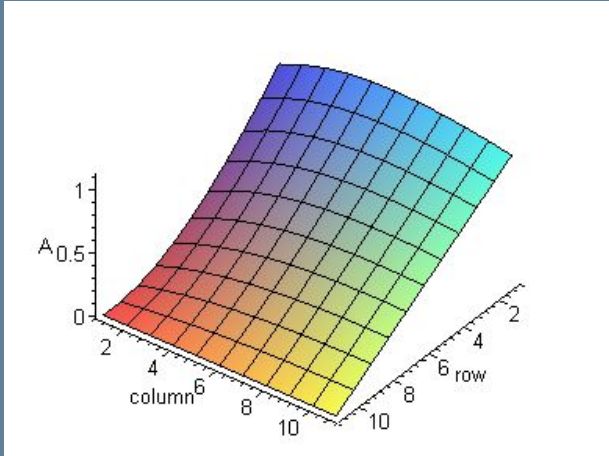
$$\rho_q = 1 - \frac{\tau}{h} (1 - e^{iqh})$$

ОЗНАКА СТІЙКОСТІ ЗА  
ПОЧАТКОВИМИ ДАНИМИ

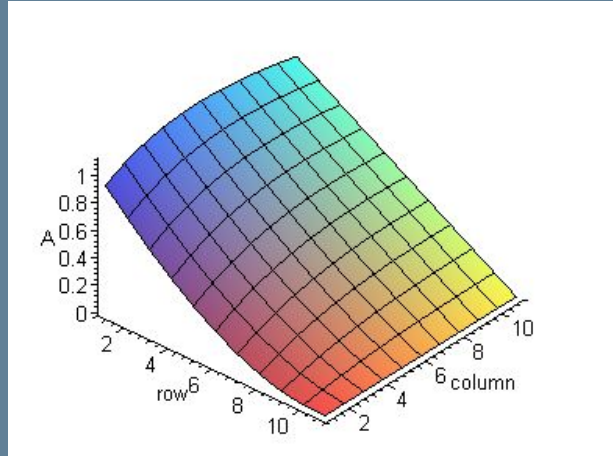
# ПОБУДОВА АЛГОРИТМУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЯВНОЇ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ

$$\begin{cases} y_n^{j+1} = y_n^j + \frac{\tau}{h} (y_{n+1}^j - y_n^j) + \frac{\tau}{e^{x_n+t_j}} + \frac{\tau(x_n+t_j)}{e^{x_n}}, & n = 1, 2, 3, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, J, \\ y_n^0 = 0, & n = 1, \dots, N, \\ y_0^j = t_j, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases}$$

**ЗАДАЧА У  
РІЗНИЦЕВОМУ  
ВІГЛЯДІ**



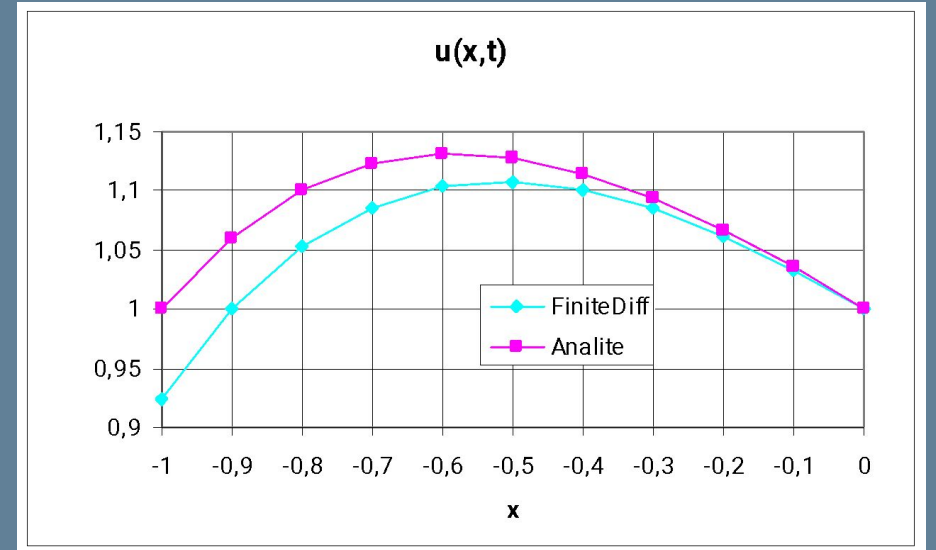
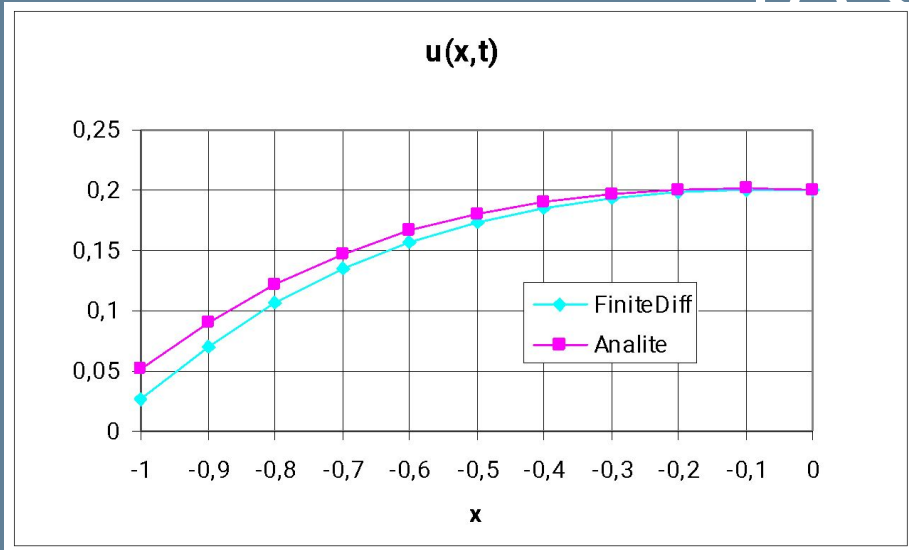
	= -1	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	(ГУ)
= 1	t ,92460	0	,05265	,08616	,10366	,10783	,10102	,08522	,06217	,03334	1	1
,9	,76024	0	,84127	,9	,93991	,96402	,97491	,97485	,96578	,94935	,92702	,9
,8	,60799	0	,69246	,75535	,8	,82929	,84570	,85137	,84815	,83763	,82119	,8
,7	,46908	0	,55455	,61951	,66709	,7	,72058	,73085	,73253	,72712	,71591	,7
,6	,34483	0	,42863	,49336	,54188	,57671	,6	,61361	,61914	,61796	,61123	,6
,5	,23670	0	,31587	,37783	,42514	,46002	,5	,48441	,5	,50821	,51027	,50723
,4	,14629	0	,21758	,27398	,31767	,35056	,4	,37432	,39038	,4	,40423	,40397
,3	,07538	0	,13520	,18295	,22038	,24904	,3	,27024	,28515	,29478	,3	,30153
,2	,02591	0	,07029	,106	,13427	,15620	,2	,17274	,18472	,19285	,19776	,2
,1	0	0	,02459	,04451	,06041	,07288	,08243	,08950	,09449	,09771	,09946	,1
(НУ)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ВИХІДНОЇ  
КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ІЗ  
ЗАСТОСУВАННЯМ ЯВНОЇ

# ПОРІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОХ МЕТОДІВ

## ТА ОЦІНКА ПИБКИ



ПОРІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ  
СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОГО  
І АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДІВ  
ПРИ

$t = 0.2$

ПРИ  
 $t = 1$

**ВИСНОВКИ**  
1) ОТРИМАН АНАЛІТИЧНИЙ  
РОЗВ'ЯЗОК ВИХІДНОЇ  
КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З

ВИКОРИСТАННЯМ MAPLE

2) МЕТОДОМ  
ХАРАКТЕРИСТИК РОЗВ'  
ЯЗАНО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ  
ДЛЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ  
ПЕРЕНОСУ

3) РОЗВ'ЯЗАНО ВИХІДНУ  
КРАЙОВУ ЗАДАЧУ МЕТОДОМ  
СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ З  
ЗАСТОСУ-ВАННЯМ ЯВНОЇ  
СХЕМИ РАХУНКУ , ЩО  
БІЖИТЬ

4) ПРОВЕДЕНО ПОРІВНЯННЯ  
РОЗВ'ЯЗКІВ ВІД ТРЬОХ  
МЕТОДІВ



