

**ТЕМА**

**ДИПЛОМНОЇ**

**РАБОТИ:**

**РАСХОДУ ГОСУВАННЯ ЯВНОЇ  
РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ДО  
РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ  
ДЛЯ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ  
ЗАДАЧ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО  
СЕРЕДОВИЩА**

**ВИКОН**

**АВ :**

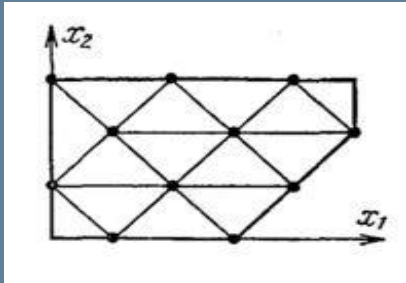
**МИКИТА**

**ПЕТРЕНКО**

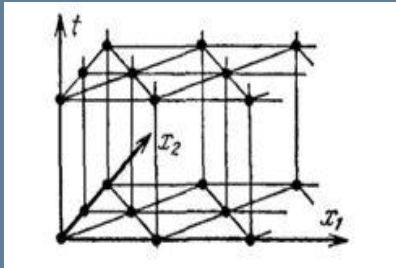
НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ В  
ОБЛАСТЯХ ЗІ СКЛАДНОЮ  
ФОРМОЮ РІДКО ВДАЄТЬСЯ

РОЗВ'ЯЗУВАТИ  
МЕТОДОМ  
АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ  
ВИРІШЕННЯ  
ЦИХ ЗАВДАНЬ  
Є ЧИСЕЛЬНІ  
МЕТОДИ.

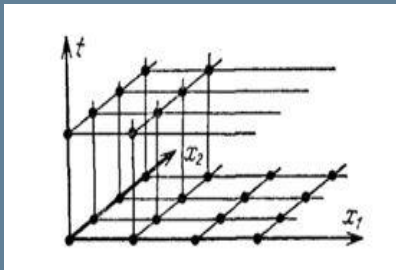
# ЯКІ ІСНУЮТЬ СІТКИ ?



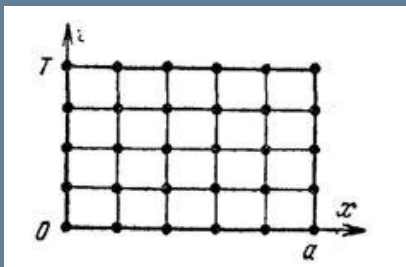
ТРИКУТНА  
СІТКА



СІТКА З ТРИГРАННИМИ  
ПРИЗМАМИ



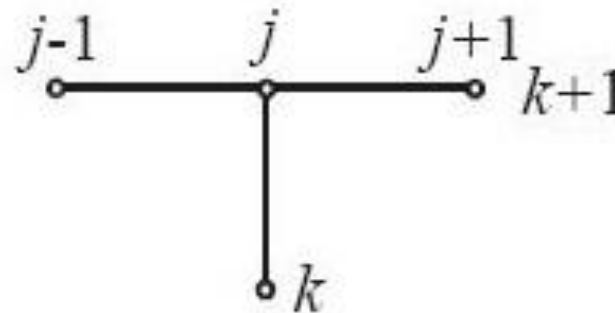
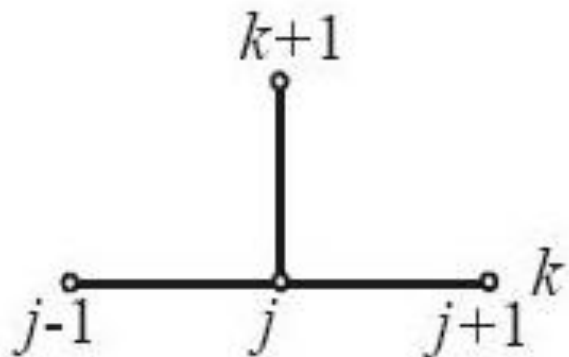
СІТКА З ПРЯМОКУТНИМИ  
ПАРАЛЕЛЕПЕДАМИ



ПРЯМОКУТНА  
СІТКА

# ЯВНІ ТА

# НЕЯВНІ



**ШАБЛОН  
ЯВНОЇ  
СХЕМИ**

**ШАБЛОН  
НЕЯВНОЇ  
СХЕМИ**

# ПОСТАНОВКА

## ЗАДАЧІ

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{e^{x+t}} + \frac{x+t}{e^x}, & x \in [-1, 0), \quad t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = 0, & -1 < x \leq 0, \\ u(0, t) = t, & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

### ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗКУ:

1) РОЗГЛЯНУТИ ЯВНУ ДВОШАРОВУ РІЗНИЦЕВУ СХЕМУ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ, ДОСЛІДЖУВАТИ ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ (ПОРЯДОК АПРОКСИМАЦІЇ, СТІЙКІСТЬ);

2) ЗАСТОСУВАТИ РОЗГЛЯНУТУ ЯВНУ СХЕМУ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

3) ОТРИМАНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПОРІВНЯТИ З ТОЧНИМ, ВИЗНАЧИТИ ПОХИБКУ.

# ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СИСТЕМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ МАТЕМАТИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ

MAPLE

$$u(x, t) = -\frac{x}{e^{x+t}} + (x+t) * F(x, t)$$

РОЗВ'ЯЗОК ВІД  
СИСТЕМИ MAPLE

ПОЧАТК  
ОВА  
УМОВА  
ГРАНИЧ  
НА  
УМОВА

$$u(x, 0) = 0$$

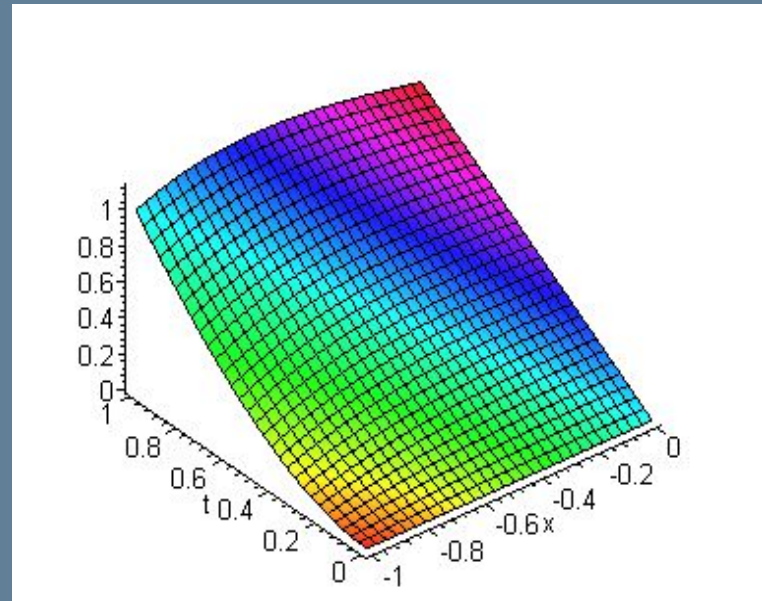
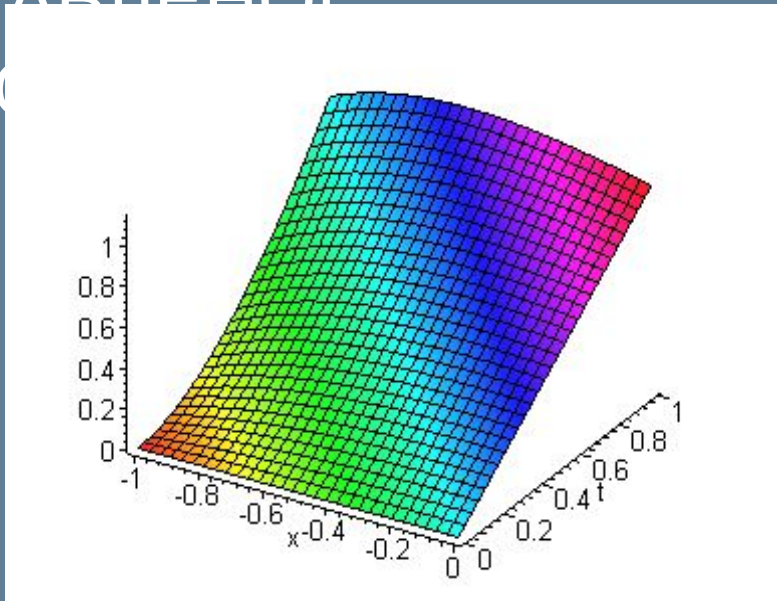
$$u(0, t) = t$$

ВИД НЕВІДОМОЇ  
ФУНКЦІЇ

$$F(x, t) = \frac{1}{e^x}$$

ТОЧНИЙ  
АНАЛІТИЧНИЙ  
РОЗВ'ЯЗОК  
ПОСТАВЛЕНОЇ  
КРАЙО

$$u(x,t) = -\frac{x}{e^{x+t}} + \frac{(x+t)}{e^x}$$



ГРАФІЧНЕ  
ЗОБРАЖЕННЯ  
ОТРИМАНОВО  
ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

# ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ХАРАКТЕРИСТИК

$$dt = -dx$$

РІВНЯННЯ  
ХАРАКТЕРИСТИК

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = e^{-c} + \frac{c}{e^{c-\tau}}, \\ U|_{\tau=c} = c, \quad c > 0, \\ U|_{\tau=0} = 0, \quad c \leq 0, \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ  
В НОВИХ  
ЗМІННИХ

$$U(\tau, c) = \int \left( e^{-c} + \frac{c}{e^{c-\tau}} \right) d\tau + A(c) = \frac{\tau}{e^c} - \frac{c}{e^{c-\tau}} + A(c)$$

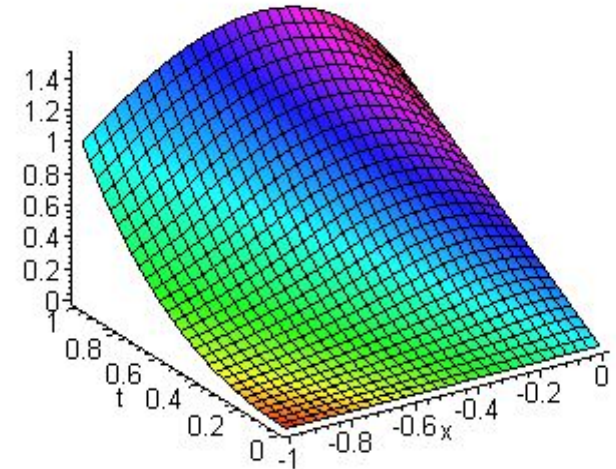
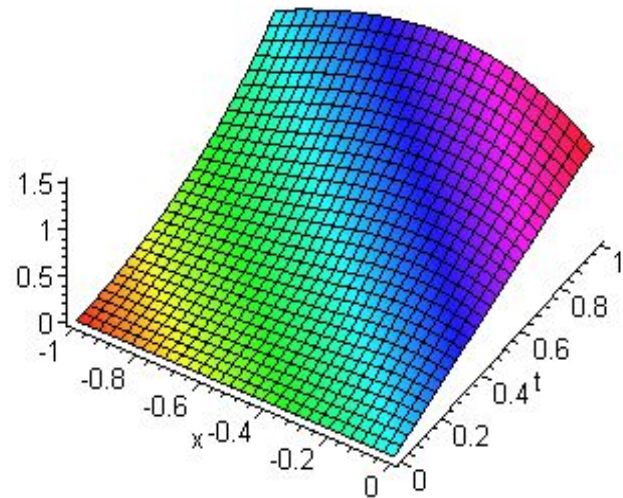
РОЗВ'Я  
ЗОК  
РІВНЯН  
НЯ



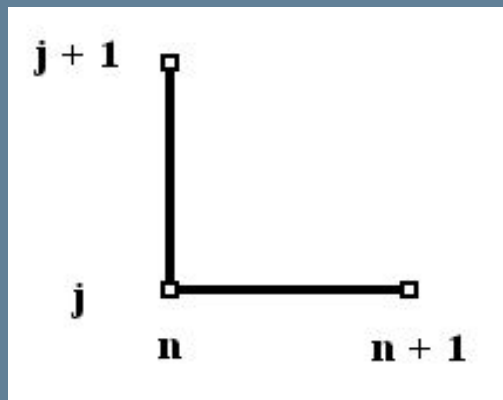
# РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ МЕТОДОМ

## ХАРАКТЕРИСТИК

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{e^{x+t}} - \frac{x+t}{e^x} + \frac{x+t}{e^{x+t}}, & t \leq x, \\ \frac{t}{e^{x+t}} - \frac{x+t}{e^x} + 2(x+t) - \frac{x+t}{e^{x+t}}, & t > x. \end{cases}$$



# НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ



ШАБЛОН ЯВНОЇ  
ДВУШАРОВОЇ РІЗНИЦЕВОЇ  
СХЕМИ РАХУНКУ , ЩО  
БІЖИТЬ

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - \frac{y_{n+1}^j - y_n^j}{h} = \frac{1}{e^{x_n + t_j}} + \frac{x_n + t_j}{e^{x_n}}, & n = 1, 2, 3, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, J, \\ y_n^0 = 0, & n = 1, \dots, N, \\ y_0^j = t_j, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases}$$

КРАЙОВА ЗАДАЧА У  
РІЗНИЦЕВОМУ ВИГЛЯДІ

# ВИЗНАЧЕННЯ ПОРЯДКУ АПРОКСИМАЦІЇ

$$\Psi_n = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{e^{x+t}} - \frac{x+t}{e^x} \right]_n - \left[ \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} - \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{h} - \frac{1}{e^{x_n+t_j}} - \frac{x_n+t_j}{e^{x_n}} \right]$$

**ВИРАЗ ДЛЯ  
НЕВ'ЯЗКИ**

$$\Psi_n = [u_t - u_x]_n - \left[ u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} - \left( u_x + \frac{h}{2} u_{xx} \right) + \dots \right] = \frac{h}{2} u_{xx} - \frac{\tau}{2} u_{tt} + O(\tau+h)$$

# ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ

$$y_n^m = \rho_q^m e^{iqx_n}$$

$$y_n^{m+1} = \rho_q^{m+1} e^{iqx_n}$$

$$y_{n+1}^m = \rho_q^m e^{iq(x_n+h)}$$

$$\frac{\rho_q^{m+1} e^{iqx_n} - \rho_q^m e^{iqx_n}}{\tau} - \frac{\rho_q^m e^{iq(x_n+h)} - \rho_q^m e^{iqx_n}}{h} = 0$$

$$\frac{\rho_q - 1}{\tau} - \frac{e^{iqh} - 1}{h} = 0$$

$$|\rho_q| \leq 1$$

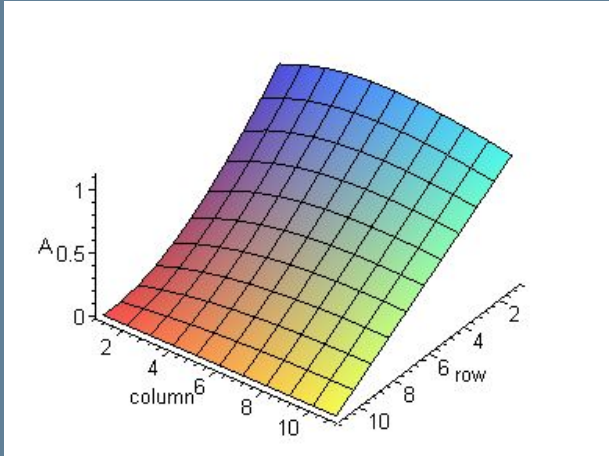
$$\rho_q = 1 - \frac{\tau}{h} (1 - e^{iqh})$$

ОЗНАКА СТІЙКОСТІ ЗА  
ПОЧАТКОВИМИ ДАНИМИ

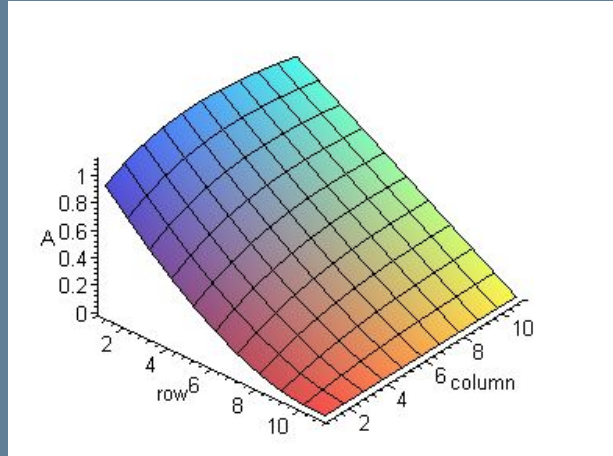
# ПОБУДОВА АЛГОРИТМУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЯВНОЇ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ

$$\begin{cases} y_n^{j+1} = y_n^j + \frac{\tau}{h} (y_{n+1}^j - y_n^j) + \frac{\tau}{e^{x_n+t_j}} + \frac{\tau(x_n+t_j)}{e^{x_n}}, & n = 1, 2, 3, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, J, \\ y_n^0 = 0, & n = 1, \dots, N, \\ y_0^j = t_j, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases}$$

**ЗАДАЧА У  
РІЗНИЦЕВОМУ  
ВІГЛЯДІ**



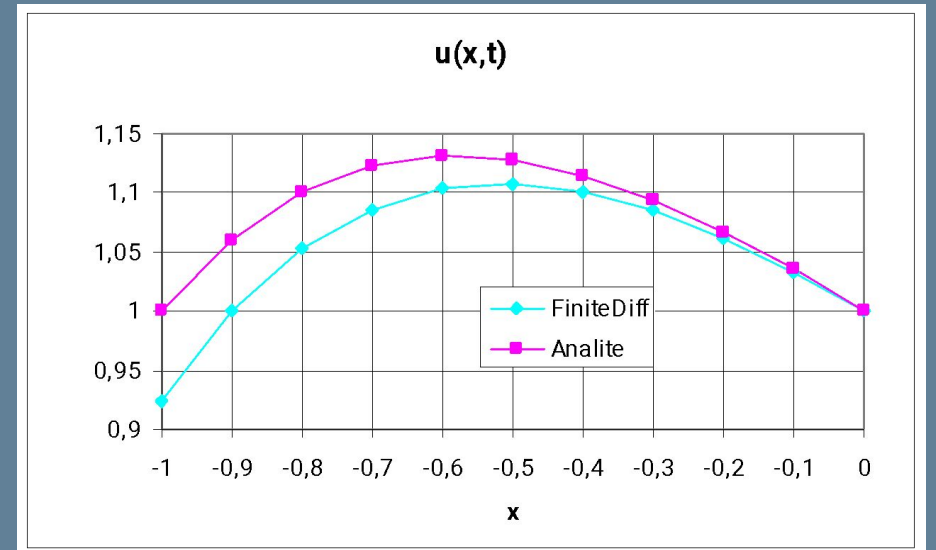
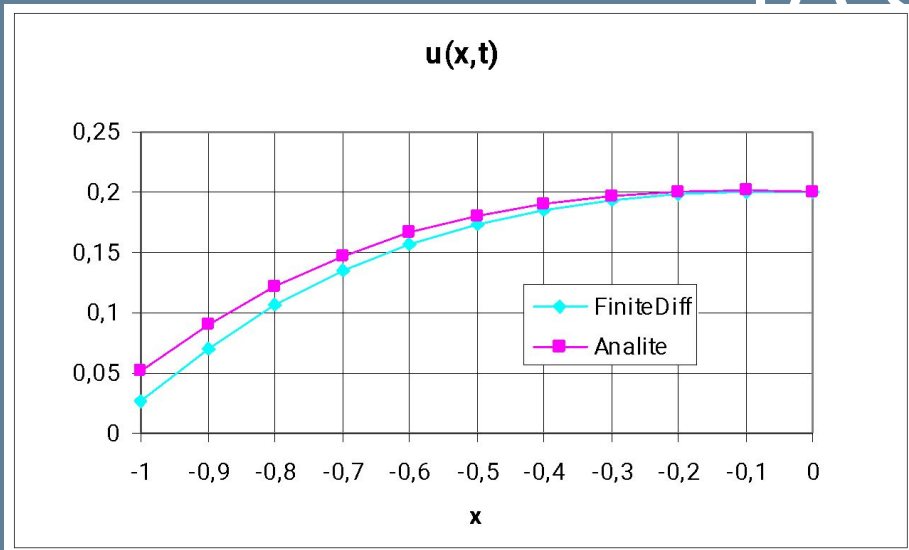
	= -1	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	(ГУ)
= 1	t	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
,9	,92460	,05265	,08616	,10366	,10783	,10102	,08522	,06217	,03334			
,8	,76024	,84127	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
,7	,60799	,69246	,75535	,8	,82929	,84570	,85137	,84815	,83763	,82119	,8	,8
,6	,46908	,55455	,61951	,66709	,7	,72058	,73085	,73253	,72712	,71591	,7	,7
,5	,34483	,42863	,49336	,54188	,57671	,6	,61361	,61914	,61796	,61123	,6	,6
,4	,23670	,31587	,37783	,42514	,46002	,48441	,5	,50821	,51027	,50723	,5	,5
,3	,14629	,21758	,27398	,31767	,35056	,37432	,39038	,4	,40423	,40397	,4	,4
,2	,07538	,13520	,18295	,22038	,24904	,27024	,28515	,29478	,3	,30153	,3	,3
,1	,02591	,07029	,106	,13427	,15620	,17274	,18472	,19285	,19776	,2	,2	,2
(НУ)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ВИХІДНОЇ  
КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ІЗ  
ЗАСТОСУВАННЯМ ЯВНОЇ

# ПОРІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗІВ ДВОХ МЕТОДІВ

## ТА ОЦІНКА ПИБКИ



ПОРІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ  
СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОГО  
І АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДІВ  
ПРИ

$t = 0.2$

ПРИ  
 $t = 1$

**ВИСНОВКИ**  
1) ОТРИМАН АНАЛІТИЧНИЙ  
РОЗВ'ЯЗОК ВИХІДНОЇ  
КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З

ВИКОРИСТАННЯМ MAPLE

2) МЕТОДОМ  
ХАРАКТЕРИСТИК РОЗВ'  
ЯЗАНО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ  
ДЛЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ  
ПЕРЕНОСУ

3) РОЗВ'ЯЗАНО ВИХІДНУ  
КРАЙОВУ ЗАДАЧУ МЕТОДОМ  
СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ З  
ЗАСТОСУ-ВАННЯМ ЯВНОЇ  
СХЕМИ РАХУНКУ , ЩО  
БІЖИТЬ

4) ПРОВЕДЕНО ПОРІВНЯННЯ  
РОЗВ'ЯЗКІВ ВІД ТРЬОХ  
МЕТОДІВ



