

Элементы теории  
упругости, тензоры  
деформаций и  
напряжений



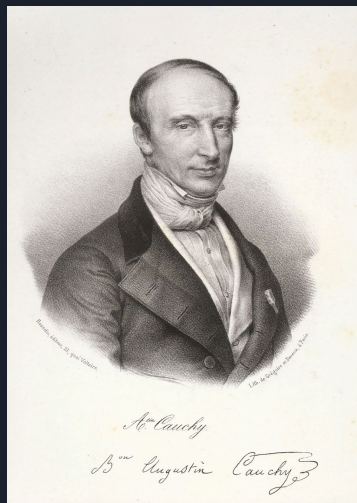
# Теория упругости

*Теория упругости* – раздел механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ), рассматривающий деформацию упругих тел под действием внешних сил, изменения температуры и других причин. *Главная задача теории упругости* — выяснить, каковы будут деформации тела и как они будут меняться со временем при заданных внешних воздействиях. Теория упругости базируется на физической и математической постановке задач, основанной на дифференциальных уравнениях в частных производных, описывающих деформацию упругого тела под нагрузкой.

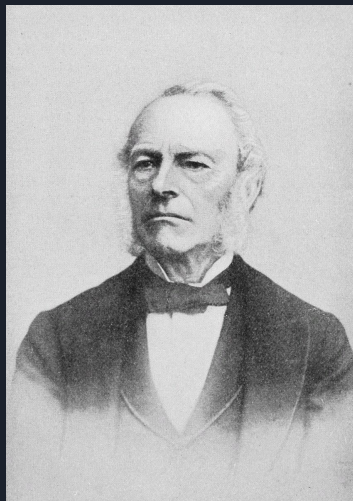
# Теория упругости



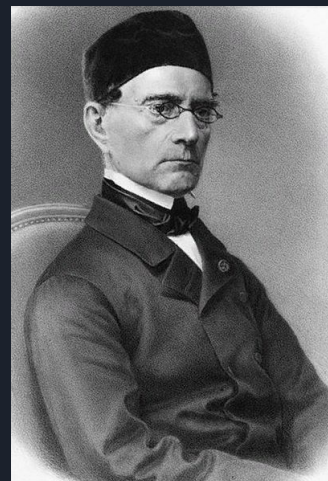
**Симеон Дени Пуассон**



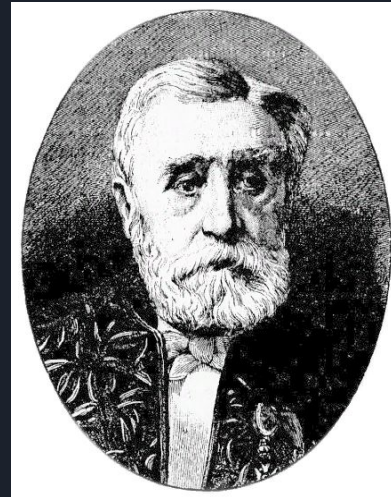
**Огюстен Луи Коши**



**Клод Луи Мари Анри Навье**

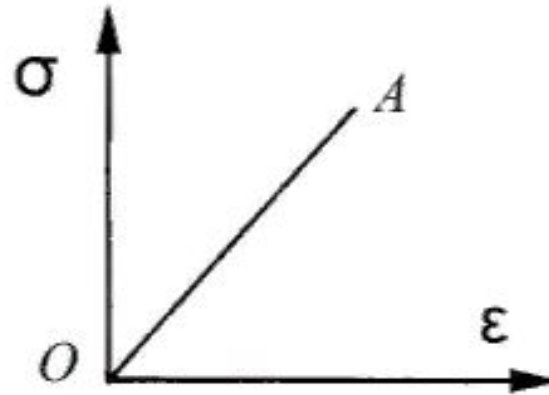


**Габриель Ламе**



**Сан Сен-Венан**

# Теория упругости



*Рис. 1.1.* Диаграмма растяжения упругого материала:  
 $\epsilon$  – деформация;  $\sigma$  – напряжение

# Тензор напряжений



Давление жидкости  
на дно и стенки сосуда

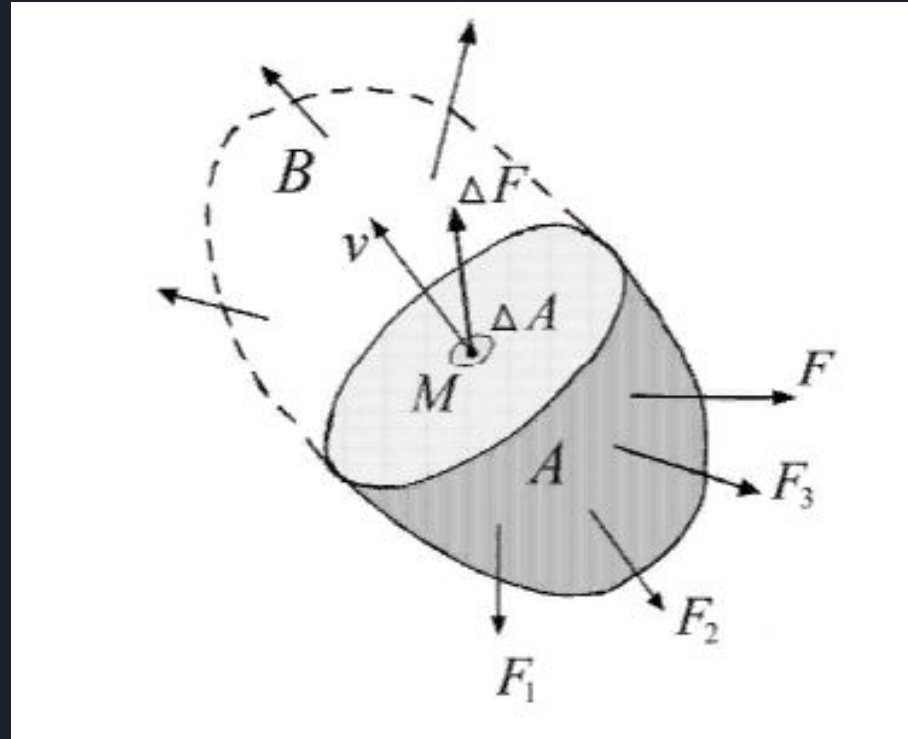
$$p = \rho g h$$

$\rho$  — плотность жидкости

$g$  — ускорение свободного падения (9,81 м/с<sup>2</sup>)

$h$  — высота столба жидкости

# Тензор напряжений



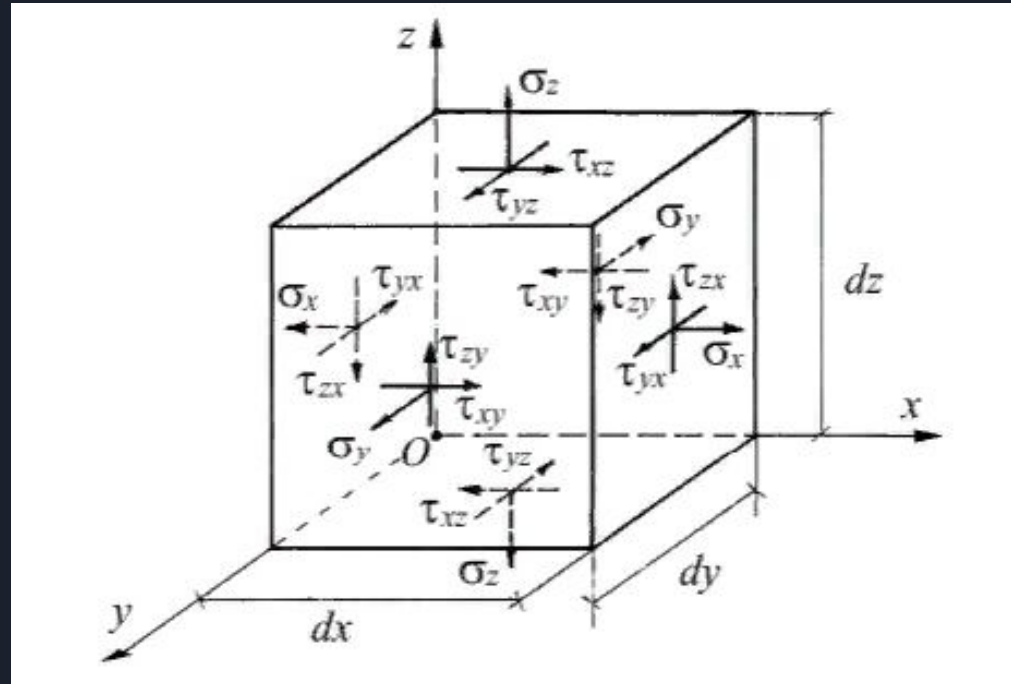
К определению понятия «метод сечений»

## Тензор напряжений

Обозначим через  $\Delta F$  главный вектор внутренних сил, пересекающих площадку  $\Delta A$ . Тогда *напряжением внутренних сил*, или *полным напряжением*,  $p_v$  в точке  $M$  тела на лежащей в плоскости сечения площадке  $\Delta A$  с нормалью  $v$  называется предел отношения

$$p_v = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

# Тензор напряжений



Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда



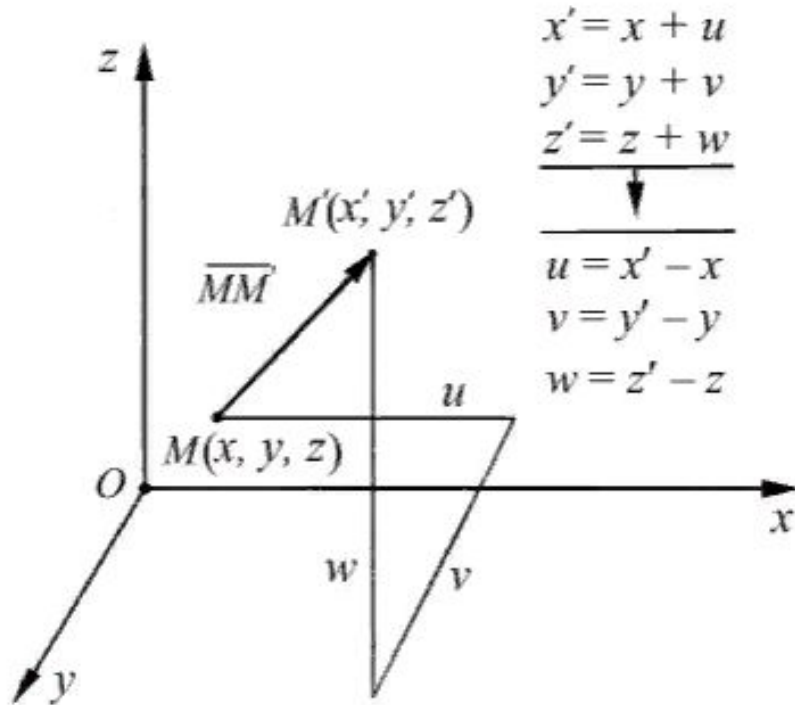
# Тензор напряжений

Совокупность напряжений, действующих на трёх взаимно перпендикулярных гранях параллелепипеда, – три нормальных напряжения  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  и шесть касательных напряжений  $(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy})$  – образует так называемый *тензор напряжений*

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

который характеризует напряжённое состояние в рассматриваемой точке  $O$  твёрдого тела.

# Тензор деформаций



$$x' = x + u$$

$$y' = y + v$$

$$z' = z + w$$

$$\downarrow$$

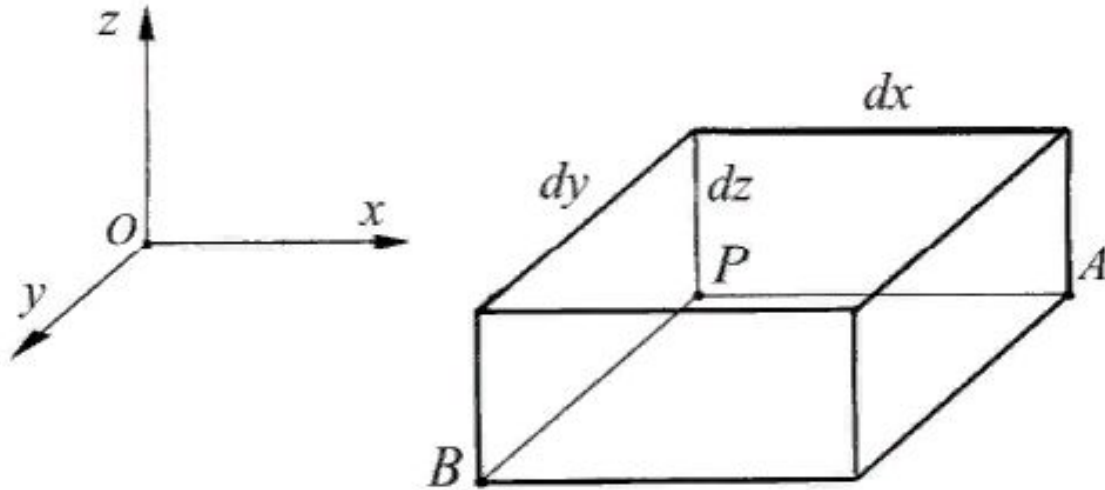
$$u = x' - x$$

$$v = y' - y$$

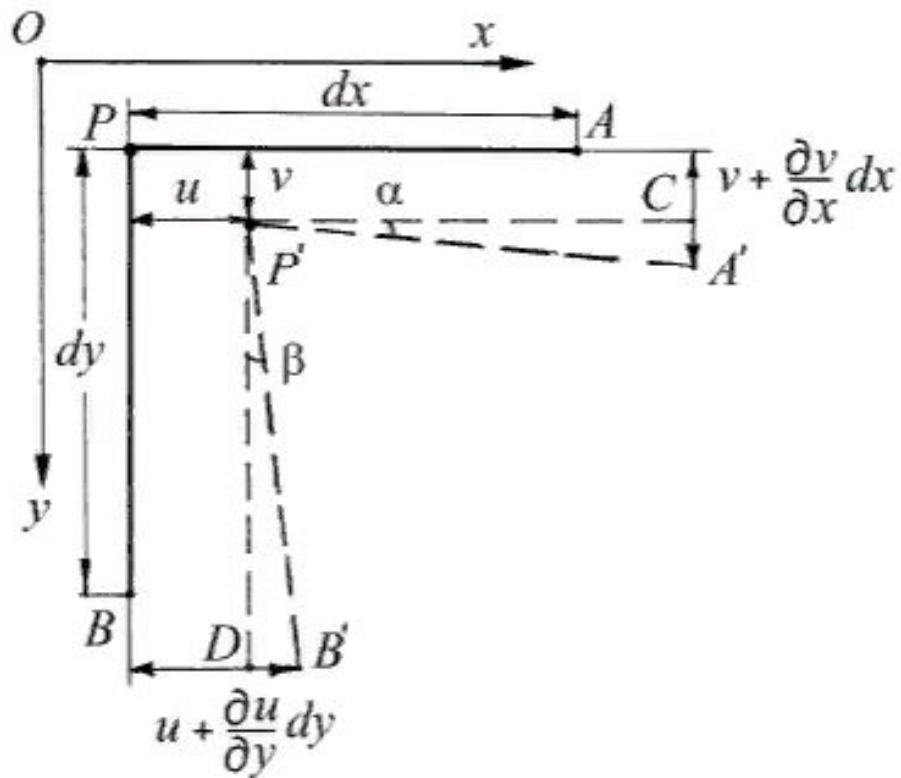
$$w = z' - z$$

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z). \end{aligned} \right\}$$

# Тензор деформаций



$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$



# Тензор деформаций

Таким же способом можно получить угловые деформации в плоскостях  $y, z$  и  $x, z$ . В пределе, когда рёбра параллелепипеда стремятся к нулю, получаем формулы для шести функций деформаций в следующих точках:

– трёх линейных деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (1.16)$$

– трёх угловых деформаций:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1.17)$$

Полученные уравнения (1.16) и (1.17) устанавливают связь между функциями перемещений и деформаций. Они называются *формулами Коши*.

# Тензор деформаций

Сформулируем определение понятия «деформированное состояние в точке» как совокупность линейных и угловых деформаций для всевозможных направлений осей, проведённых через данную точку. Тогда *тензор деформаций* – это совокупность компонент деформации бесконечно малого объёма (в форме параллелепипеда) в окрестности заданной точки:

$$T_D = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.18)$$



Спасибо за внимание!