



Элементы теории
упругости, тензоры
деформаций и
напряжений



Теория упругости

Теория упругости – раздел механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ), рассматривающий деформацию упругих тел под действием внешних сил, изменения температуры и других причин. *Главная задача теории упругости* — выяснить, каковы будут деформации тела и как они будут меняться со временем при заданных внешних воздействиях. Теория упругости базируется на физической и математической постановке задач, основанной на дифференциальных уравнениях в частных производных, описывающих деформацию упругого тела под нагрузкой.

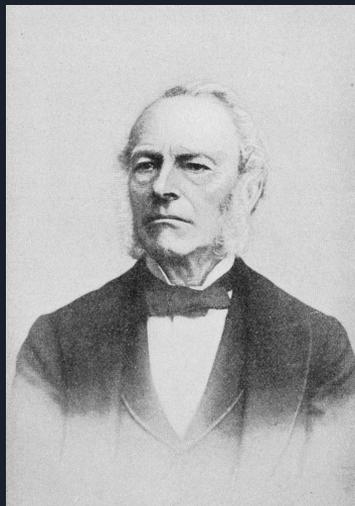
Теория упругости



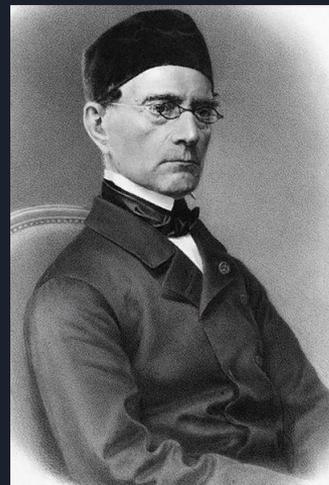
Симеон Дени Пуассон



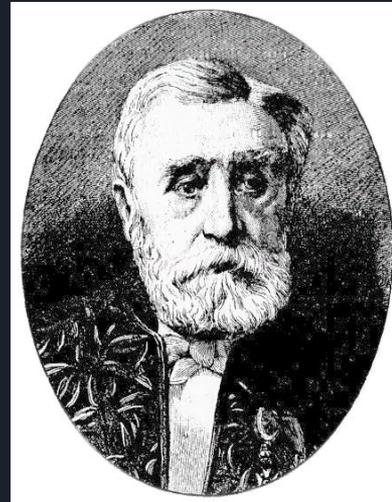
Огюстен Луи Коши



Клод Луи Мари Анри Навье



Габриель Ламе



Сан Сен-Венан

Теория упругости

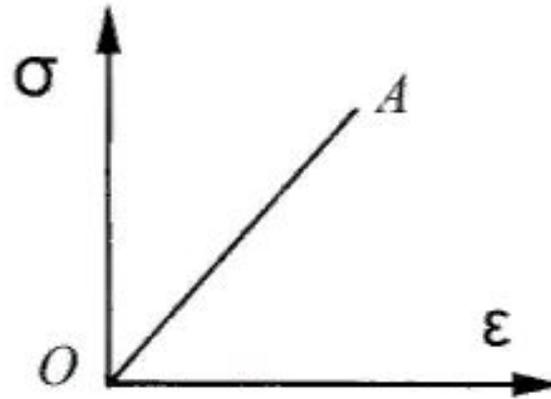


Рис. 1.1. Диаграмма растяжения упругого материала:
 ϵ – деформация; σ – напряжение

Тензор напряжений



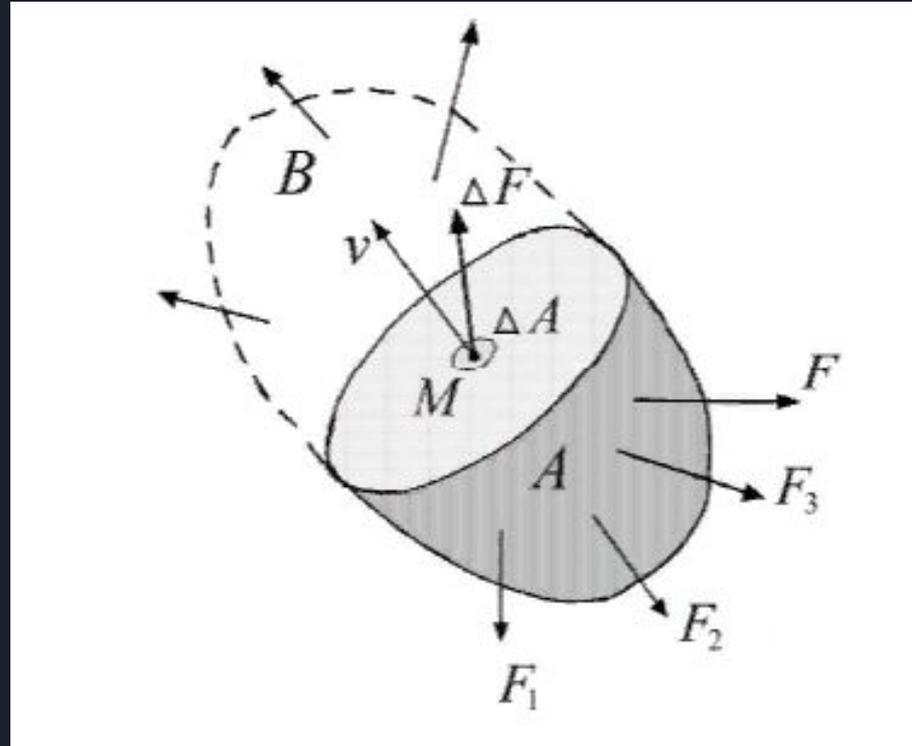
Давление жидкости
на дно и стенки сосуда

$$p = \rho g h$$

ρ — плотность жидкости
 g — ускорение свободного падения (9,81 м/с²)
 h — высота столба жидкости

A diagram illustrating the concept of hydrostatic pressure. It shows a vertical glass test tube partially filled with blue liquid. The test tube is placed on a black wooden block. Three horizontal side ports are cut into the side of the test tube at different heights. Blue liquid is shown flowing out of these ports into a blue bowl positioned to the right. The height of the liquid jets increases as the side ports are positioned lower on the test tube, demonstrating that pressure increases with depth.

Тензор напряжений



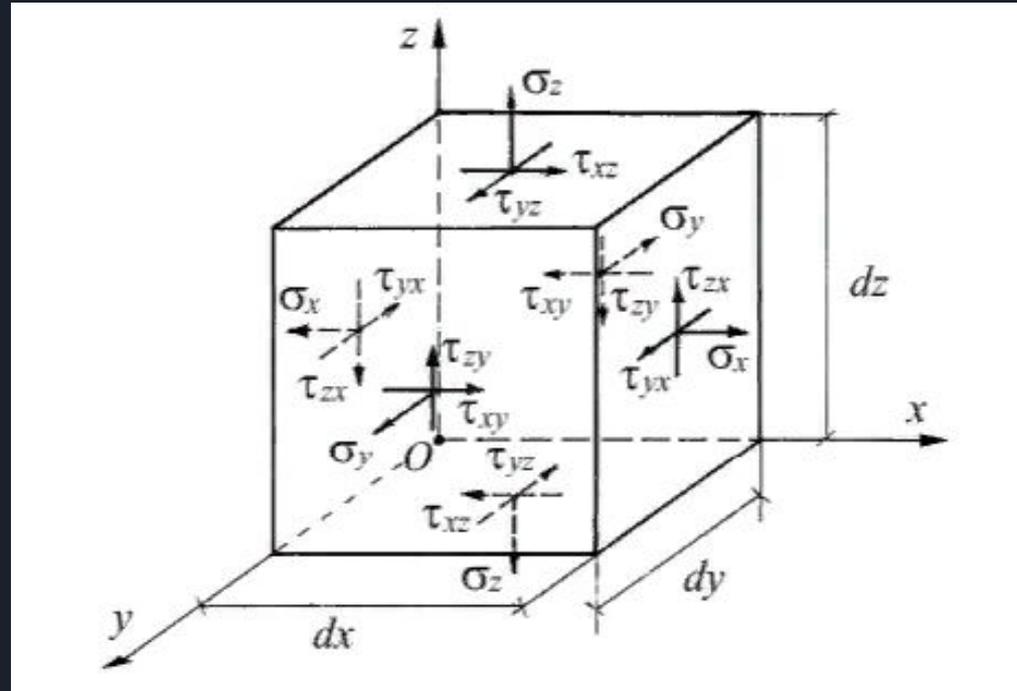
К определению понятия «метод сечений»

Тензор напряжений

Обозначим через ΔF главный вектор внутренних сил, пересекающих площадку ΔA . Тогда *напряжением внутренних сил*, или *полным напряжением*, p_v в точке M тела на лежащей в плоскости сечения площадке ΔA с нормалью v называется предел отношения

$$p_v = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Тензор напряжений



Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда

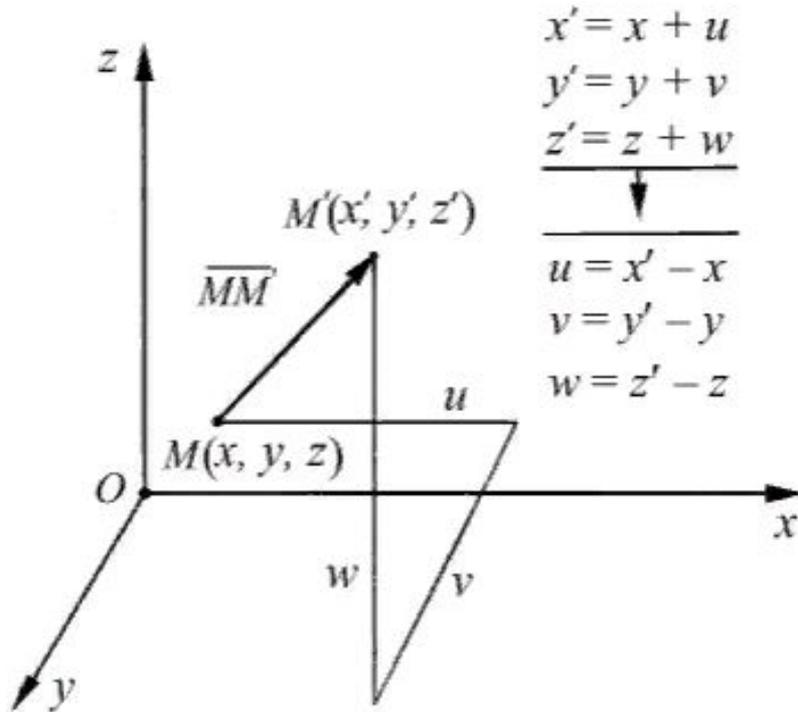
Тензор напряжений

Совокупность напряжений, действующих на трёх взаимно перпендикулярных гранях параллелепипеда, – три нормальных напряжения $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ и шесть касательных напряжений $(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy})$ – образует так называемый *тензор напряжений*

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

который характеризует напряжённое состояние в рассматриваемой точке O твёрдого тела.

Тензор деформаций



$$x' = x + u$$

$$y' = y + v$$

$$z' = z + w$$

$$\downarrow$$

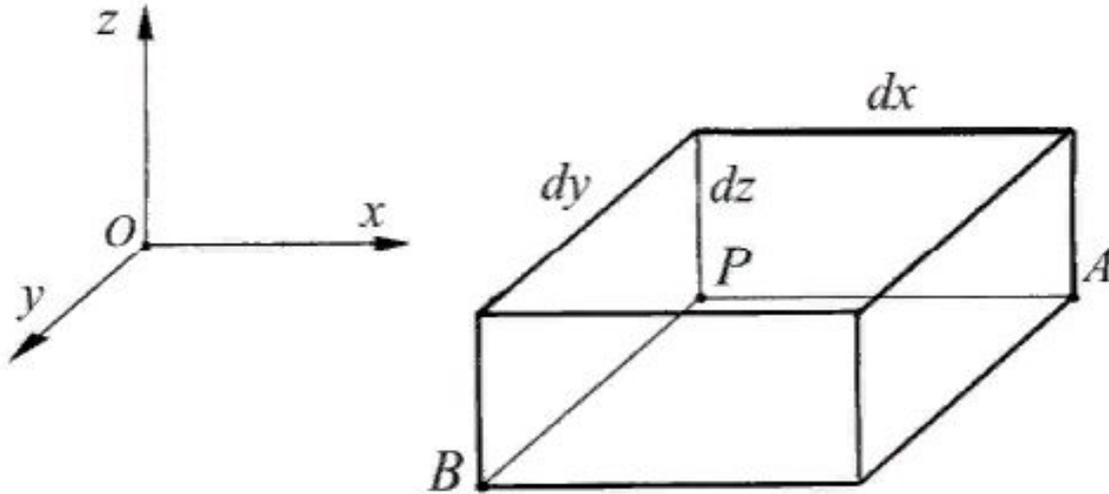
$$u = x' - x$$

$$v = y' - y$$

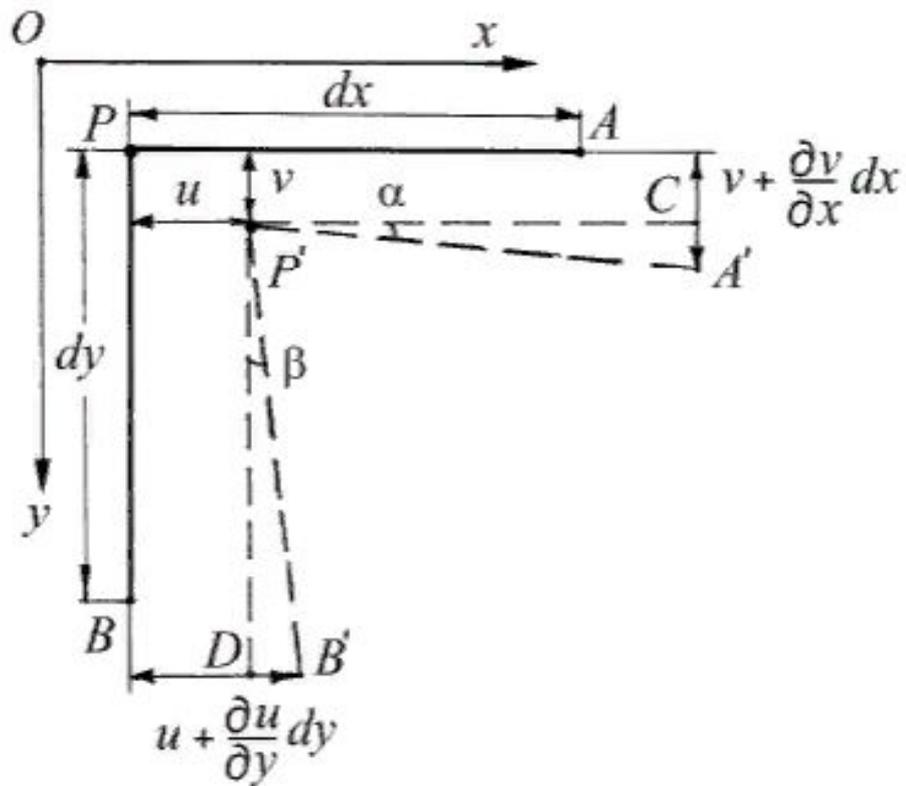
$$w = z' - z$$

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z). \end{aligned} \right\}$$

Тензор деформаций



$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$



Тензор деформаций

Таким же способом можно получить угловые деформации в плоскостях y, z и x, z . В пределе, когда рёбра параллелепипеда стремятся к нулю, получаем формулы для шести функций деформаций в следующих точках:

– трёх линейных деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (1.16)$$

– трёх угловых деформаций:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1.17)$$

Полученные уравнения (1.16) и (1.17) устанавливают связь между функциями перемещений и деформаций. Они называются *формулами Коши*.

Тензор деформаций

Сформулируем определение понятия «деформированное состояние в точке» как совокупность линейных и угловых деформаций для всевозможных направлений осей, проведённых через данную точку. Тогда *тензор деформаций* – это совокупность компонент деформации бесконечно малого объёма (в форме параллелепипеда) в окрестности заданной точки:

$$T_D = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.18)$$



Спасибо за внимание!