Комплексные числа и действия над ними

$$\sqrt{144}$$

$$\sqrt{-900}$$

$$\sqrt{6,25}$$

$$\sqrt{\frac{64}{256}}$$

МНИМАЯ ЕДИНИЦА

$$i = \sqrt{-1}$$

i **– начальная буква французского слова**

imaginaire – «мнимый»

$$i^1 = i \qquad i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$$

Мнимые числа

i = -1, i – мнимая единица

i, 2i, -0,3i — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a + b)i; \qquad ai - bi = (a - b)i;$$

$$a(bi) = (ab)i; \qquad (ai)(bi) = abi^2 = -a$$

где *a* и *b* — действительные числа.

$$=\sqrt{36\cdot(-1)}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}=6i$$

$$\sqrt{-900}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{-12{,}25}$$

Компле́ксные числа

Числа вида *a + bi*,

где *a* и *b* – действительные числа,

***i* – мнимая единица,**

форма записи:
алгебраическая,
тригонометрическая
экспоненциальная
(показательная)

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, Z	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, Q	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, C	Все операции	

Комплексные числа

***Определение 1*.** **Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.**

$$z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R,$$

$$i - \textit{мнимая единица}.$$

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

Определение 2. **Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:**

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$$

Найти x и y из равенства:

$$2y + 4xi = 13 - 6i;$$

Решение.

Используя условие равенства комплексных чисел имеем

$2y = 13$, $4x = -6$, тогда

$$x = -1{,}5; \quad y = 6{,}5.$$

Классификация комплексных чисел

- **Комплексные числа**
  a + bi
  - **Действительные числа**
    $b = o$
    - **Рациональные числа**
    - **Иррациональные числа**
  - **Мнимые числа**
    $b \neq o$
    - **Мнимые числа с ненулевой действительной частью**
      $a \neq 0,\ b \neq 0.$
    - **Чисто мнимые числа**
      $a = 0,\ b \neq 0.$

Арифметические операции над комплексными числами

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i

(a + bi)·(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Сопряженные комплексные числа

Определение: Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному.**

Числа *a + bi* и *a - bi* называются взаимно *сопряженными комплексными числами.*

$z_1 = 12 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$.

Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$;

а) $z_1 + z_2 = (12 + 3i) + (5 - 7i) =$
$= (12 + 5) + (3i - 7i) = 1\underline{7 - 4i;}$

б) $z_1 - z_2 = (12 + 3i) - (5 - 7i) =$
$= (12 - 5) + (3i + 7i) = \underline{-7 + 10i;}$

$$(2+3i)(5-7i) =$$

$$= (10+21) + (-14+15)i = 31+i$$

$$(5+3i)(5-3i) = 25-9i^2 = 34$$

$$(2-7i)^2 = 4 - 28i + 49i^2 = -45-28i$$

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{2+3i}{5-7i} \cdot \frac{5+7i}{5+7i}$$

$$= \frac{-11+29i}{74} = \boxed{-\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i}$$

$$\frac{(2+3i)+(4-i)}{1-i}+4i^{27}$$

$$\frac{6+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}-4i=\frac{4+8i}{2}-4i=$$

$$=\mathbf{2}$$

Модуль комплексного числа

Определение:

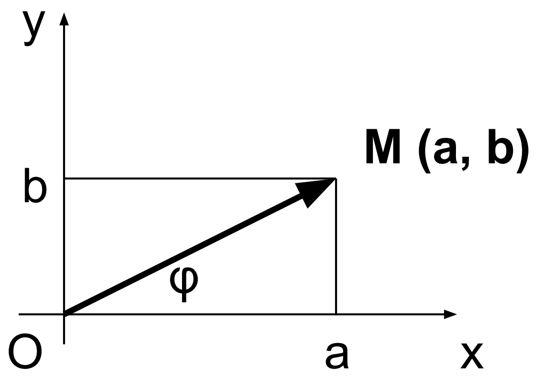
Модулем комплексного числа *z = a + bi* называют неотрицательное число $\sqrt{a^2 + b^2}$

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка M(a, b).

Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы $\overrightarrow{OM}$

равное расстоянию от точки M до начала координат $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

φ – *аргумент комплексного числа*

$\varphi \in (-\pi; \pi]$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ модуль комплексного числа,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Комплексные числа и действия над ними

<u>Практикум</u>

№ 32.5,32.6,32.10,32.11,

32.19-32.21, 34.1, 34.2, 34.21-34.25

<u>Контроль 15.03</u>

Самостоятельная работа, тетради