

# Комплексные числа и действия над ними

$$\sqrt{144}$$

$$\sqrt{-900}$$

$$\sqrt{6,25}$$

$$\sqrt{\frac{64}{256}}$$

# МНИМАЯ ЕДИНИЦА

$$i = \sqrt{-1}$$

*i* – начальная буква французского слова  
*imaginaire* – «МНИМЫЙ»

$$i^1 = i \quad i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$$

# Мнимые числа $i = -1$ , $i$ – мнимая единица

$i, 2i, -0,3i$  — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a + b)i; \quad ai - bi = (a - b)i;$$
$$a(bi) = (ab)i; \quad (ai)(bi) = abi^2 = -a$$

где  $a$  и  $b$  — действительные числа.

$$= \sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$$

$$\sqrt{-900}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{-12,25}$$

# Комплéксные числа

Числа вида  $a + bi$ ,

где  $a$  и  $b$  – действительные  
числа,

$i$  – мнимая единица,

*форма записи:*  
*алгебраическая,*  
*тригонометрическая*  
*экспоненциальная*  
*(показательная)*

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, $\mathbb{N}$	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, $\mathbb{Z}$	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, $\mathbb{Q}$	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, $\mathbb{R}$	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, $\mathbb{C}$	<b>Все операции</b>	



# Комплексные числа

**Определение 1.** Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$z = a + bi \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},$$

*$i$  – мнимая единица.*

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

**Определение 2.** Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

*Найти  $x$  и  $y$  из равенства:*

$$2y + 4xi = 13 - 6i;$$

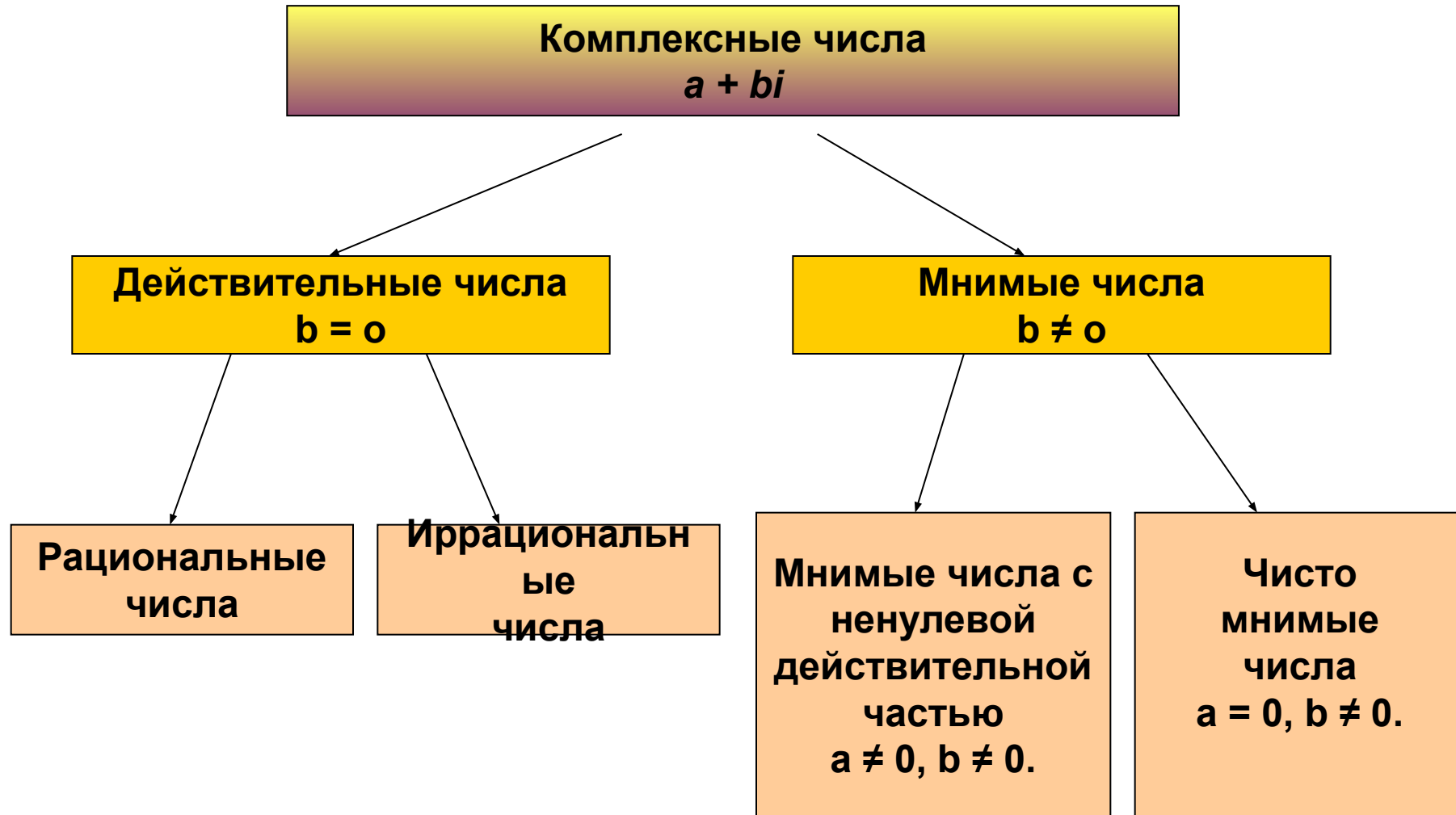
***Решение.***

**Используя условие равенства комплексных чисел имеем**

$$2y = 13, 4x = -6, \text{ тогда}$$

$$x = -1,5; \quad y = 6,5.$$

# Классификация комплексных чисел



# Арифметические операции над комплексными числами

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

# Сопряженные комплексные числа

**Определение:** Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное** данному.

**Числа  $a + bi$  и  $a - bi$  называются взаимно сопряженными комплексными числами.**

$$z_1 = 12 + 3i, z_2 = 5 - 7i.$$

**Найти: а)  $z_1 + z_2$ ; б)  $z_1 - z_2$ ;**

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (12 + 3i) + (5 - 7i) = \\ &= (12 + 5) + (3i - 7i) = \underline{17 - 4i}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } z_1 - z_2 &= (12 + 3i) - (5 - 7i) = \\ &= (12 - 5) + (3i + 7i) = \underline{-7 + 10i}; \end{aligned}$$

$$(2 + 3i)(5 - 7i) =$$
$$= (10 + 21) + (-14 + 15)i = 31 + i$$

$$(5 + 3i)(5 - 3i) = 25 - 9i^2 = 34$$

$$(2 - 7i)^2 = 4 - 28i + 49i^2 = -45 - 28i$$

$$\frac{2 + 3i}{5 - 7i} = \frac{2 + 3i}{5 - 7i} \cdot \frac{5 + 7i}{5 + 7i}$$

$$= \frac{-11 + 29i}{74} = \boxed{-\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i}$$



$$\frac{(2 + 3i) + (4 - i)}{1 - i} + 4i^{27}$$

$$\frac{6 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} - 4i = \frac{4 + 8i}{2} - 4i = 2$$

# Модуль комплексного числа

**Определение:**

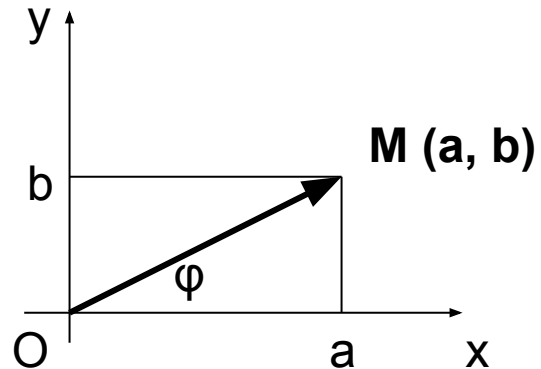
Модулем комплексного числа  $z = a + bi$   
называют неотрицательное число  $\sqrt{a^2 + b^2}$

# Геометрическое изображение КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

*Комплексному числу  $z$  на координатной плоскости соответствует точка  $M(a, b)$ .*

*Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы  $\overrightarrow{OM}$*

равное расстоянию от точки  $M$  до начала  
координат  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\varphi$  – аргумент комплексного числа

$$\varphi \in (-\pi; \pi]$$

# Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

где  $\varphi$  – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$  модуль комплексного числа,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

# Комплексные числа и действия над ними

## Практикум

№ 32.5, 32.6, 32.10, 32.11,  
32.19-32.21, 34.1, 34.2, 34.21-34.25

## Контроль 15.03

Самостоятельная работа, тетради