

Многогранники

К этому разделу отнесем два основных типа задач:

- 1) задачи на вычисление;
- 2) задачи на сечения.

К задачам на вычисление относятся те, где требуется найти линейные элементы правильных призм и пирамид, а именно: сторону основания, боковое ребро, апофему и т. д., далее угловые элементы: двугранные углы при основании, линейные углы при вершине; площади: боковой поверхности, полной поверхности, основания.

В основе второго типа задач — задач на построение лежит умение построить сечение данного многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. В задачах этого типа сечение задается точкой и прямой, тремя точками, двумя точками и прямой, параллельной плоскости сечения и т. д.

6 **Геометрия. Задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ: 10–11 классы**

Многогранником называется тело, граница которого состоит из многоугольников.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами многоугольника**.

Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями многогранника**.

Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые**.

Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он называется **выпуклым**.

Например, тетраэдр, октаэдр, параллелепипед — выпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360° .

1. Призма

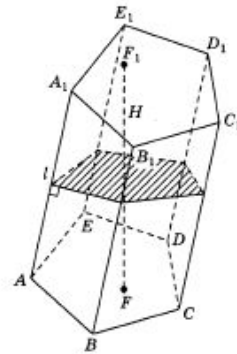


Рис. 1

Призмой (рис. 1) называется многогранник, у которого две грани $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (**основания призмы**) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани (AA_1B_1B ; BB_1C_1C и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой (AA_1 , BB_1 и т. д.).

Параллелограммы AA_1B_1B , BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями**, а ребра AA_1 , BB_1 и т. д. называются **боковыми**.

Перпендикуляр FF_1 , опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой призмы**.

Если в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник и т. д., то призма называется соответственно **треугольной**, **четырёхугольной** и т. д.

Призма называется **прямой**, если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется **наклонной**.

Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма называется **правильной**.

У правильной призмы все боковые грани — **равные прямоугольники**. Сечение, которое образовано плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы, называется **перпендикулярным сечением** (см. рис. 1).

Произвольная призма

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot l; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H; \quad V = S_{\text{сеч.}} \cdot l;$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Прямая призма

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

2. Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 2).

У параллелепипеда **6 граней** и все они параллелограммы.

Противоположные грани попарно равны и параллельны.

Параллелепипед имеет **4 диагонали**, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Любая грань параллелепипеда может быть принята за **основание**.

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется **прямым**.

Прямой параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 3).

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани квадраты, называется **кубом**.

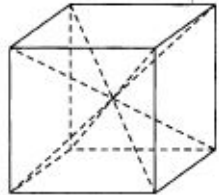


Рис. 2

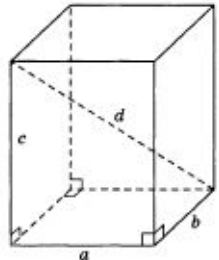


Рис. 3

Прямоугольный параллелепипед (рис. 3):

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 2(a + b)c;$$

$$V = abc;$$

$$S_{\text{полн.}} = 2(ab + bc + ac);$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Куб

Если a — ребро куба, то

$$V = a^3; \quad d = a\sqrt{3}; \quad S_{\text{полн.}} = 6a^2.$$

3. Пирамида

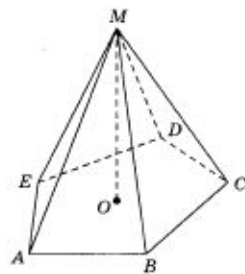


Рис. 4

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — основание пирамиды — произвольный многоугольник $ABCDE$ (рис. 4), а остальные боковые грани — треугольники с общей вершиной M .

Перпендикуляр MO , опущенный из вершины на основание, называется **высотой пирамиды**.

Если в основании пирамиды треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д.

Треугольная пирамида называется **тетраэдром** (четырёхгранником).

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания, то пирамида называется **правильной** (рис. 5).

В правильной пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани — равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани MD называется **апофемой** правильной пирамиды.

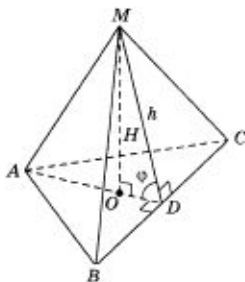


Рис. 5

Произвольная пирамида

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Правильная пирамида (рис. 5)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h; \quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \varphi};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то часть пирамиды, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой** (рис. 6).

Параллельные грани усеченной пирамиды (ABC и $A_1B_1C_1$) называются ее **основаниями**; расстояние между ними (OO_1) — **высотой**.

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она получена, была правильной.

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции.

Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

Произвольная усеченная пирамида

$$V = \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Правильная усеченная пирамида (рис. 6)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \cdot h, \quad \text{где } P_1, P_2 \text{ — периметры}$$

оснований.

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2, \quad \text{где } S_1, S_2 \text{ — площади оснований.}$$

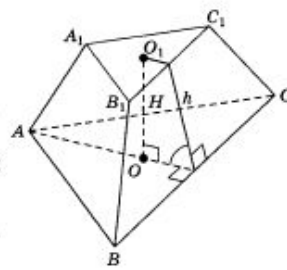


Рис. 6

4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

1. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы (рис. 7), длины всех боковых ребер равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка O является также точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

2. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды (рис. 8).

3. Если высота треугольной пирамиды $MABC$ проходит через точку пересечения высот $\triangle ABC$, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е. $AM \perp BC$, $MC \perp AB$ и $MB \perp AC$. Справедливо и обратное утверждение (рис. 9).

4. Если MO — высота пирамиды $MABC$ и $MA \perp BC$, то $(MAO) \perp BC$ (рис. 9).

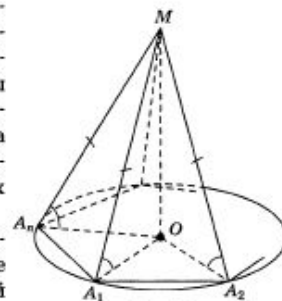


Рис. 7

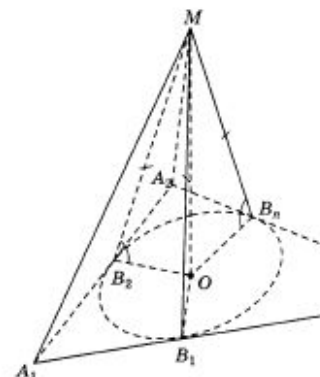


Рис. 8

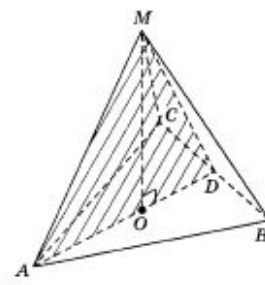


Рис. 9

5. Если в наклонной призме $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1 , то точка O основания высоты B_1O лежит на биссектрисе $\angle A_1$ (рис. 10).

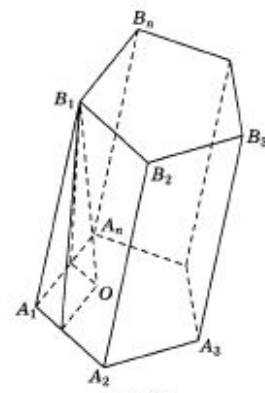


Рис. 10

Круглые тела

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно трудно поддаются изображению. Это замечание прежде всего относится к шару. По этой причине при решении стереометрических задач, как правило, сам шар (а тем более шары) стараются не изображать, так как многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхность (боковая и полная) и соответственно параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или просто конуса), то здесь добавляются угол при вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

1. Цилиндр

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1 , называется **цилиндром** (рис. 11).

Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги — **основаниями цилиндра**.

Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, а длина образующей — **высотой цилиндра**.

Прямая OO_1 называется **осью цилиндра**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, представляет собой **прямоугольник**, у которого две стороны — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра, а само сечение называется **осевым**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, является **кругом**.

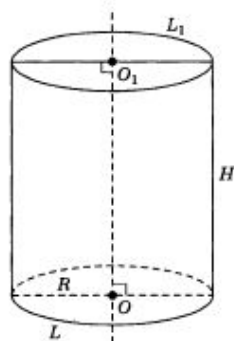


Рис. 11

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H); \quad V = \pi R^2 H.$$

2. Конус

Конусом называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L (рис. 12).

Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг — **основанием конуса**.

Точка C — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса**.

Прямая OC называется **осью конуса**, а отрезок OC называется **высотой конуса**.

Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым**.

$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

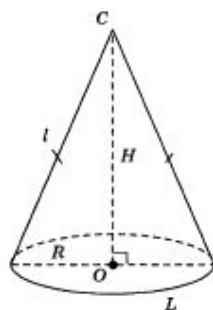


Рис. 12

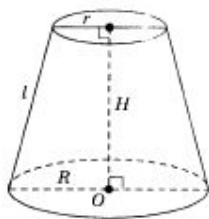


Рис. 13

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r); \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2; \quad S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2; \quad V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

3. Шар

Шаровой, или **сферической**, **поверхностью** (или просто **сферой**) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — **центра шара** (точка O , рис. 14).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Шар можно получить вращением полуокруга (или круга) около его диаметра.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр O , представляет собой наибольший круг.

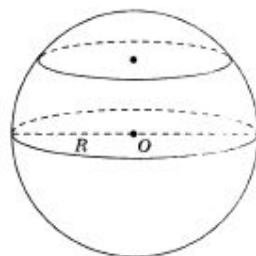


Рис. 14

Если плоскость имеет со сферой только одну общую точку, то она называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка — **точкой касания** плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Верно и обратное.

Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**.

Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника**.

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \pi D^2; \quad V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3.$$

1. Шаровой сегмент (рис. 15).

Если S — площадь сферической поверхности сегмента, h — высота, V — объем, r — радиус основания, то

$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h).$$

2. Шаровой сектор (рис. 15).

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{6} \pi d^2 h.$$

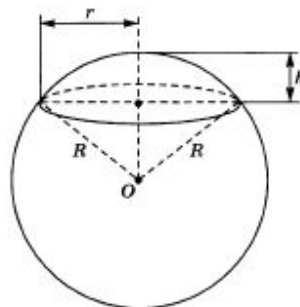


Рис. 15

3. Шаровой пояс (рис. 16).

Если h — высота шарового пояса, r_1 и r_2 — радиусы оснований, то

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6} \pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

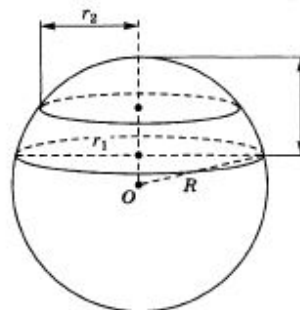


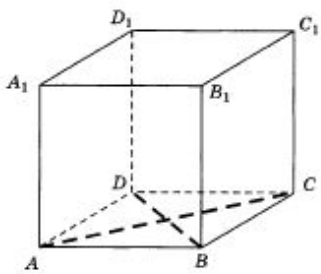
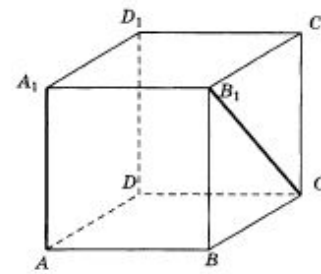
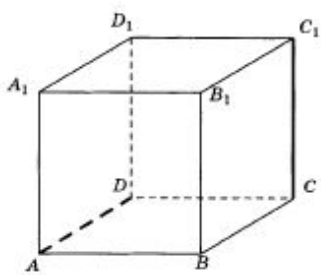
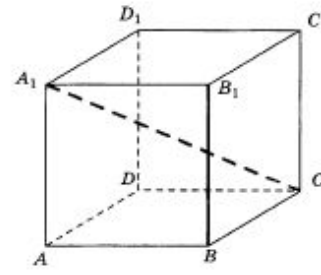
Рис. 16

ЗАДАЧИ В ТАБЛИЦАХ

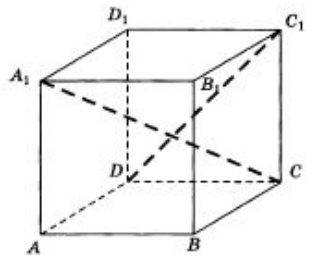
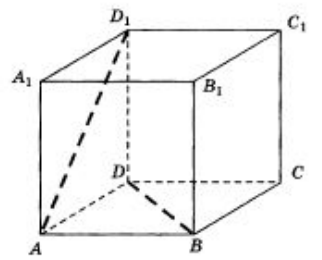
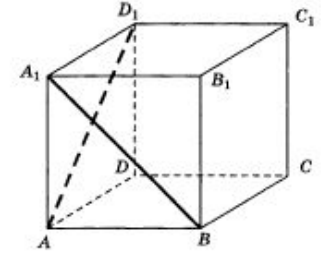
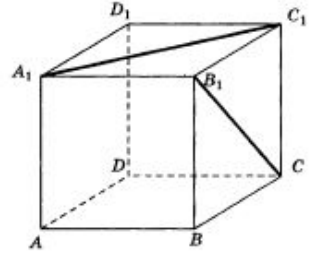
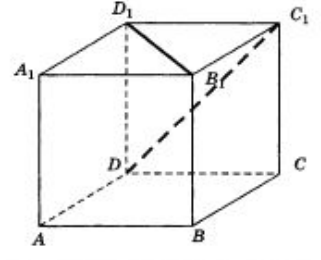
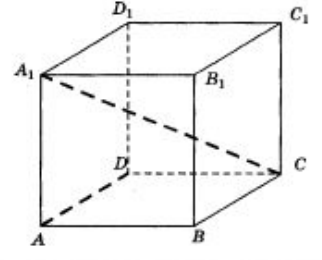
§ 1. Угол между двумя прямыми

КУБ

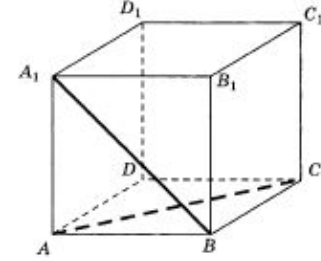
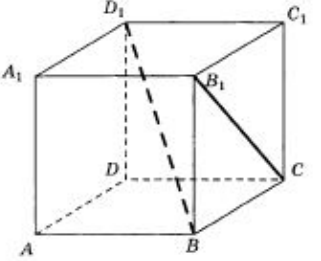
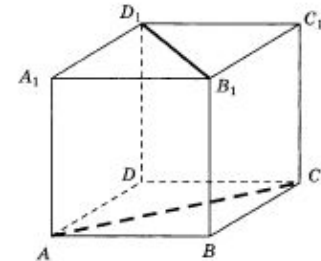
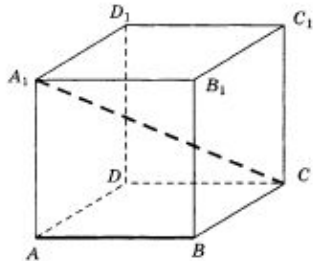
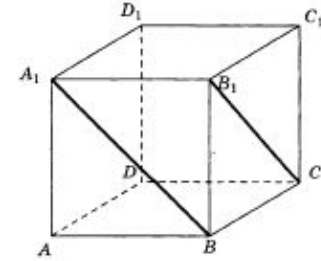
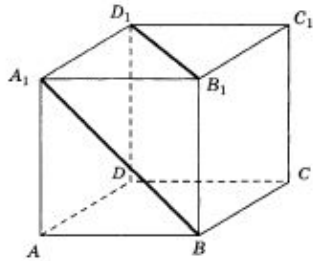
Таблица 1

<p>1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD.</p> 	<p>3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C.</p> 
<p>2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми CC_1 и AD.</p> 	<p>4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BB_1 и A_1C.</p> 

Продолжение табл. 1

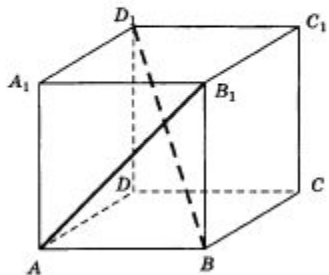
<p>5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и DC_1.</p> 	<p>8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и BD.</p> 
<p>6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и A_1B.</p> 	<p>9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C.</p> 
<p>7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и D_1B_1.</p> 	<p>10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и AD.</p> 

Продолжение табл. 1

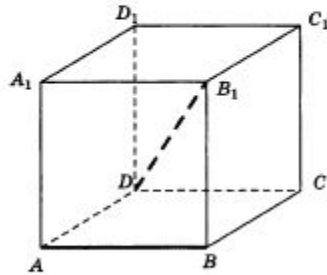
<p>11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и AC.</p> 	<p>14 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми B_1C и BD_1.</p> 
<p>12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и B_1D_1.</p> 	<p>15 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и CA_1.</p> 
<p>13 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и CB_1.</p> 	<p>16 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и B_1D_1.</p> 

Окончание табл. 1

17 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1 .



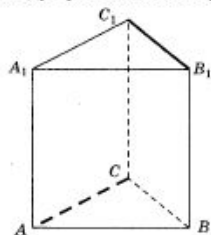
18 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и DB_1 .



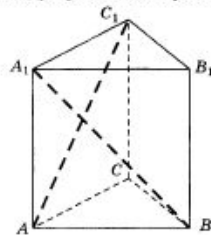
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 2

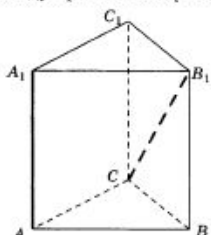
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1C_1 .



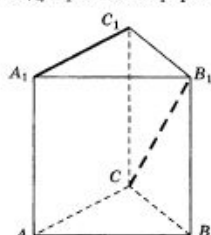
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B .



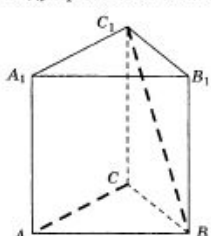
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C .



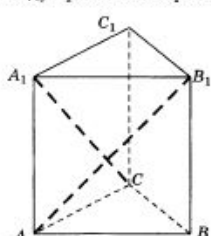
5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C .



3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и BC_1 .

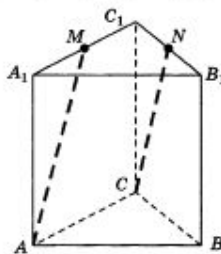


6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и A_1C .

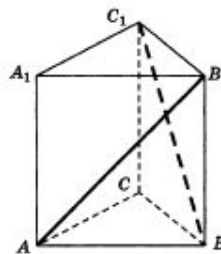


Окончание табл. 2

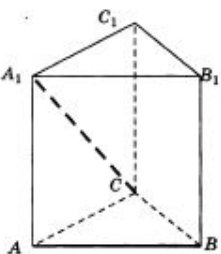
7 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AM и CN , где M и N — соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 .



9 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .

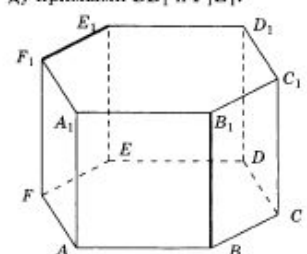
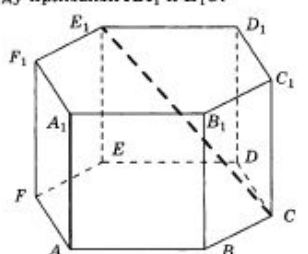
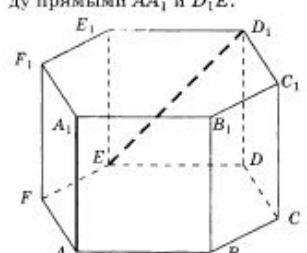
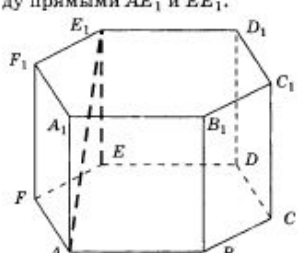
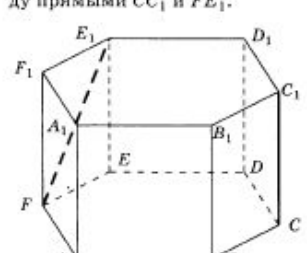
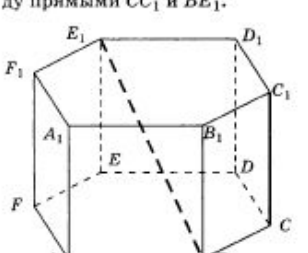


8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и CA_1 .

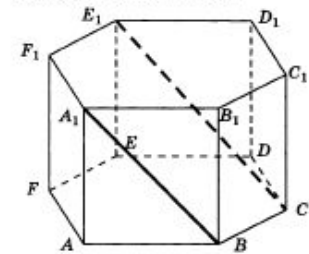
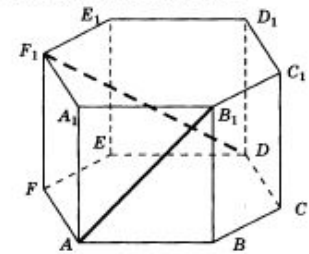
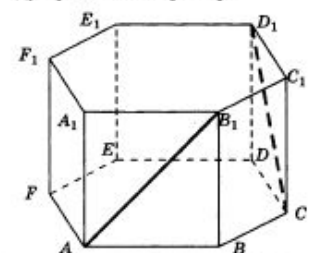
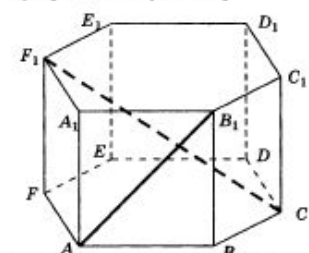
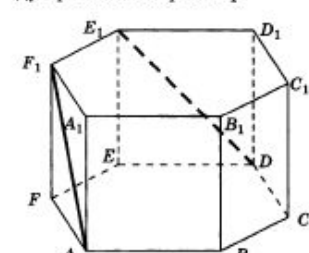
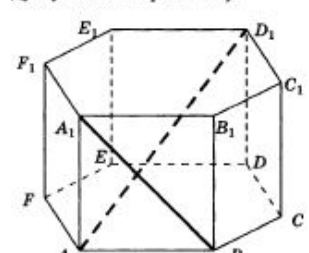


ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

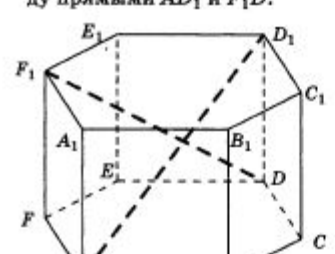
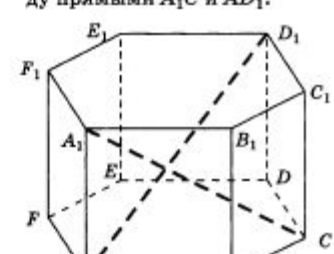


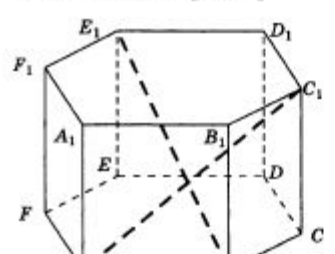
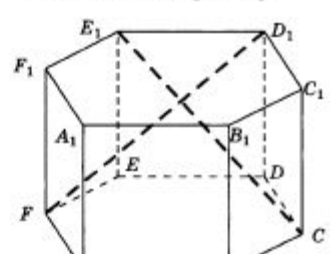
Таблица 3

<p>1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BB_1 и F_1E_1.</p> 	<p>4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и E_1C.</p> 
<p>2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и D_1E.</p> 	<p>5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AE_1 и EE_1.</p> 
<p>3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми CC_1 и FE_1.</p> 	<p>6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми CC_1 и BE_1.</p> 

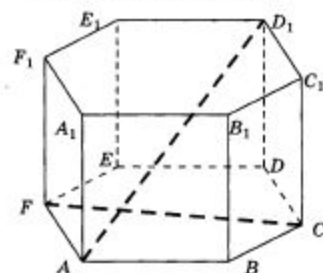
Продолжение табл. 3

<p>7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1B и E_1C.</p> 	<p>10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и F_1D.</p> 
<p>8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и D_1C.</p> 	<p>11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми F_1C и AB_1.</p> 
<p>9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AF_1 и DE_1.</p> 	<p>12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1B и AD_1.</p> 

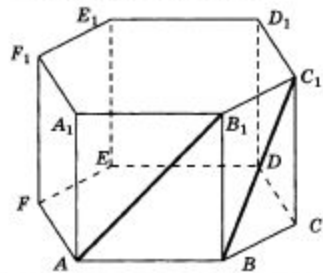
Продолжение табл. 3

<p>13 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD_1 и F_1D.</p> 	<p>16 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1C и AD_1.</p> 
<p>14 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BE_1 и AB_1.</p> 	<p>17 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD_1 и CF_1.</p> 
<p>15 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BE_1.</p> 	<p>18 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми FD_1 и CE_1.</p> 

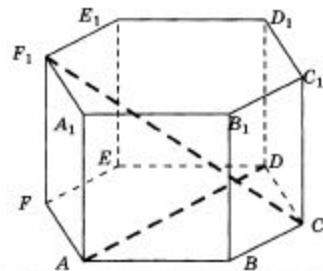
19 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми FC и AD_1 .



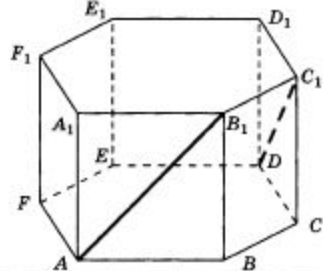
22 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .



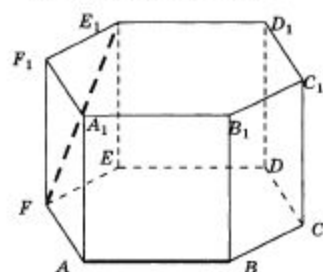
20 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD и CF_1 .



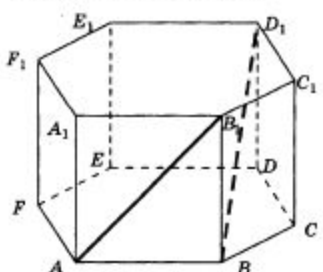
23 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DC_1 .



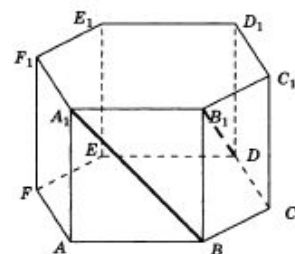
21 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и FE_1 .



24 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1 .



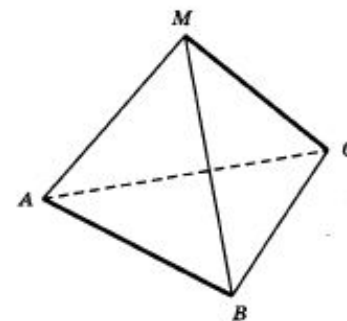
25 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BA_1 и DB_1 .



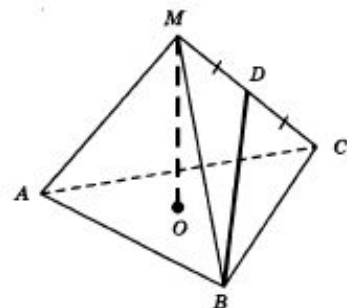
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 4

1 В правильном тетраэдре $MABC$ найдите угол между прямыми AB и CM .



2 В правильном тетраэдре $MABC$ найдите угол между высотой MO и медианой BD боковой грани MBC .



3 В правильном тетраэдре $MABC$ точка D — середина ребра CM . Найдите угол между прямыми BC и AD .

