Степени с рациональными показателями, их свойства.

Посмотреть презентацию.

Составить подробный конспект.

Выполнить предложенные задания.

Повторение

Степень с целым показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

Степенью числа а с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен а

$1)\ 3^3 = 27$

$2)\ 5^3 = 125$

$3)\ 2^4 = 16$

$4)\ 3^1 = 3$

а) $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000}$;

б) $9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$;

в) $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$;

г) $x^{-20} = \frac{1}{x^{20}}$;

д) $(ав)^{-3} = \frac{1}{(ав)^3}$;

е) $(а + в)^{-4} = \frac{1}{(а + в)^4}$.

1) $3^0 = 1$

2) $5^0 = 1$

3) $22222222^0 = 1$

4) $100000^0 = 1$

Повторение: действия с обыкновенными дробями

$$\frac{1}{12}+\frac{2}{12}=\frac{1+2}{12}=\frac{3}{12}=\frac{3:3}{12:3}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{47}{10}-\frac{3}{5}=\frac{47}{10}-\frac{3^{(2}}{5}=\frac{47-3\cdot 2}{10}=\frac{41}{10}$$

$$\frac{49}{16}\cdot\frac{4}{7}=\frac{49\cdot 4}{16\cdot 7}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{54}{100}:\frac{27}{10}=\frac{54}{100}\cdot\frac{10}{27}=\frac{54\cdot 10}{100\cdot 27}=\frac{2}{10}$$

Действия с дробями

Сложение и вычитание дробей

$$2\frac{7}{8}+3\frac{5}{6}=5\frac{^{3)}7}{8}+\frac{^{4)}5}{6}=5\frac{3*7}{3*8}+\frac{4*5}{4*6}=5\frac{21+20}{24}=5\frac{41}{24}=5+1\frac{17}{24}=6\frac{17}{24}$$

$$6\frac{1}{3}-4\frac{5}{7}=2\frac{^{7)}1}{3}-\frac{^{3)}5}{7}=2\frac{7}{21}-\frac{15}{21}=1\frac{21+7}{21}-\frac{15}{21}=1\frac{28-15}{21}=1\frac{13}{21}$$

Умножение дробей

$$1\frac{1}{9}*2\frac{2}{5}=\frac{9*1+1}{9}*\frac{2*5+2}{5}=\frac{10}{9}*\frac{12}{5}=\frac{10*12}{9*5}=\frac{2*4}{3*1}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

Деление дробей

$$1\frac{5}{7}:1\frac{1}{7}=\frac{1*7+5}{7}:\frac{1*7+1}{7}=\frac{12}{7}:\frac{8}{7}=\frac{12*7}{7*8}=\frac{3*1}{1*2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$

Изучаем теорию:

Степень с рациональным показателем

Опр.: $1. a^{\frac{p}{q}} =$ $\qquad a \geq 0$

$2. a^{-n} =$ $\qquad 3. a^{-\frac{p}{q}} =$ $\qquad a > 0$

Свойства степеней:

$1. a^p a^q =$ $\qquad 4. (ab)^q =$

$2. a^p : a^q =$

$3. (a^p)^q =$ $\qquad 5. \left(\frac{a}{b}\right)^p =$

Вычислить (57—60).

57 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

58 1) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

59 1) $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}}\cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}$.

60 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

61 Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ при $a=0,09$; 2) $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}$ при $b=27$;

Определение

Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

По определению: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

Пример: $7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7^1}$

$a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}$

Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad \text{где } a \geq 0,\ q \in N,\ p \in Z$$

Примеры

1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

2) $12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$

Свойства степени с рациональным показателем (для $n \in R$, $k \in R$)

1° $a^0 = 1$, где $a \neq 0$

2° $a^1 = a$

3° $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, где $a \neq 0$

4° $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$

5° $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

6° $\dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$, где $a \neq 0$

7° $(a^n)^k = a^{nk}$

8° $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

9° $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, где $b \neq 0$

10° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$

Примеры применения

1. *Найдем значение выражения*:

$$\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} =$$

$$= 2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)} = 2^1\cdot 5^1 = 10$$

2. *Преобразуем выражение*:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}$$

3. *Сравним числа*: $\sqrt[5]{8}$ *и* $2^{\frac{2}{3}}$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$$

$2^{\frac{3}{5}} < 2^{\frac{2}{3}}$ *по свойству* 7, *так как* $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$

Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad где\ a \geq 0,\ n \in N,\ m \in Z$$

a^p

Примеры

1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

2) $12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$

Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

1. $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

2. $3^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

3. $-8^{1,5} =$ **не имеет смысла**

4. $5a^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{a}$

5. $(x-y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x-y)^2}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Представьте в виде степени с дробным показателем:

1. $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt[9]{a^4} = a^{\frac{4}{9}}$

3. $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = 3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

4. $b\sqrt{b} = b \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{1,5}$

5. $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{\frac{3}{2}} = (x+y)^{1,5}$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

$$\text{где } a \geq 0,\ n, k \in N,\ m \in Z$$

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{10}{15}}$$

I вариант

1. Вычислите:

а) $3\cdot 16^{\frac{1}{2}}$; б) $27^{-\frac{1}{3}}$; в) $\dfrac{(3^{-2})^{3}\cdot 27^{2}}{9^{\frac{1}{2}}}$;

г) $5\cdot 16^{\frac{1}{4}} - 0{,}2\cdot(-0{,}027)^{\frac{1}{3}} + \sqrt[5]{1}$.

2. Упростите выражение:

а) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$; в) $\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^{3}\cdot c^{-\frac{3}{2}}$;

г) $\left(81m^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; д) $\dfrac{d^{5,2}\cdot d^{-4,8}}{d^{2,3}\cdot d^{-2,7}}$.

Домашнее задание:

Степень с действительным показателем. Решение задач.

58 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$

Примените свойства степени

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

VN