

Степени с рациональными показателями, их свойства.

Посмотреть презентацию.

Составить подробный конспект.

Выполнить предложенные задания.

Повторение

Степень с целым показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

$$1) 3^3 = 27$$

$$2) 5^3 = 125$$

$$3) 2^4 = 16$$

$$4) 3^1 = 3$$

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a

$$\text{a) } 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000};$$

$$\text{б) } 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81};$$

$$\text{в) } a^{-1} = \frac{1}{a^1};$$

$$\text{г) } x^{-20} = \frac{1}{x^{20}};$$

$$\text{д) } (ae)^{-3} = \frac{1}{(ae)^3};$$

$$\text{е) } (a + e)^{-4} = \frac{1}{(a + e)^4}.$$

$$1) 3^0 = 1$$

$$2) 5^0 = 1$$

$$3) 22222222^0 = 1$$

$$4) 100000^0 = 1$$

Повторение: действия с обыкновенными дробями

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{3:3}{12:3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{47}{10} - \frac{3}{5} = \frac{47}{10} - \frac{3^2}{5} = \frac{47-3 \cdot 2}{10} = \frac{41}{10}$$

$$\frac{49}{16} \cdot \frac{4}{7} = \frac{49 \cdot 4}{16 \cdot 7} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{54}{100} : \frac{27}{10} = \frac{54}{100} \cdot \frac{10}{27} = \frac{54 \cdot 10}{100 \cdot 27} = \frac{2}{10}$$



Действия с дробями

Сложение и вычитание дробей

$$2\frac{7}{8} + 3\frac{5}{6} = 5\frac{3)^7}{8} + \frac{4)^5}{6} = 5\frac{3*7}{3*8} + \frac{4*5}{4*6} = 5\frac{21+20}{24} = 5\frac{41}{24} = 5 + 1\frac{17}{24} = 6\frac{17}{24}$$

$$6\frac{1}{3} - 4\frac{5}{7} = 2\frac{7)^1}{3} - \frac{3)^5}{7} = 2\frac{7}{21} - \frac{15}{21} = 1\frac{21+7}{21} - \frac{15}{21} = 1\frac{28-15}{21} = 1\frac{13}{21}$$

Умножение дробей

$$1\frac{1}{9} * 2\frac{2}{5} = \frac{9*1+1}{9} * \frac{2*5+2}{5} = \frac{10}{9} * \frac{12}{5} = \frac{10*12}{9*5} = \frac{2*4}{3*1} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Деление дробей

$$1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{7} = \frac{1*7+5}{7} : \frac{1*7+1}{7} = \frac{12}{7} : \frac{8}{7} = \frac{12*7}{7*8} = \frac{3*1}{1*2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Изучаем теорию:

Степень с рациональным показателем

Опр.: 1. $a^{\frac{p}{q}} =$ $a \geq 0$

2. $a^{-n} =$ 3. $a^{-\frac{p}{q}} =$ $a > 0$

Свойства степеней:

1. $a^p a^q =$

4. $(ab)^q =$

2. $a^p : a^q =$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p =$



3. $(a^p)^q =$

1) x , 2) y , 3) u , 4) v , 5) $(2x)$, 6) $(3y)$.

Вычислить (57—60).

57 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

58 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

59 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

60 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

61 Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ при $a = 0,09$; 2) $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ при $b = 27$;

Определение

Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

По определению: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример: $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7^1}$

$$a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}$$

Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad \text{где } a \geq 0, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$$

Примеры

$$1) \quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$2) \quad 12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$$

$$3) \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$$

Свойства степени с рациональным показателем (для $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$)

$$1^\circ \quad a^0 = 1, \quad \text{где } a \neq 0$$

$$2^\circ \quad a^1 = a$$

$$3^\circ \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad \text{где } a \neq 0$$

$$4^\circ \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{где } a \neq 0$$

$$5^\circ \quad a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$6^\circ \quad \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}, \quad \text{где } a \neq 0$$

$$7^\circ \quad (a^n)^k = a^{nk}$$

$$8^\circ \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$9^\circ \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad \text{где } b \neq 0$$

$$10^\circ \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad \text{где } a \neq 0, b \neq 0$$

Примеры применения

1. Найдем значение выражения:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} &= \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4} - (-\frac{3}{4})} = 2^1 \cdot 5^1 = 10\end{aligned}$$

2. Преобразуем выражение:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}$$

3. Сравним числа: $\sqrt[5]{8}$ и $2^{\frac{2}{3}}$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$$

$$2^{\frac{3}{5}} < 2^{\frac{2}{3}} \text{ по свойству 7, так как } \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где } a \geq 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$$

Примеры

a^p

$$1) \quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$2) \quad 12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$$

$$3) \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$$

*Представьте степень с дробным показателем
в виде корня:*

1. $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

2. $3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

3. $-8^{1,5} =$ *не имеет смысла*

4. $5a^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{a}$

5. $(x-y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x-y)^2}$



$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$1. \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$$

$$2. \sqrt[9]{a^4} = a^{\frac{4}{9}}$$

$$3. \frac{3}{\sqrt{2}} = 3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$4. b\sqrt{b} = b \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{1,5}$$

$$5. \sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{\frac{3}{2}} = (x+y)^{1,5}$$

*Представъте в
виде степени с
дробным
показателем:*

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

где $a \geq 0$, $n, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{10}{15}}$$

1. Вычислите:

а) $3 \cdot 16^{\frac{1}{2}}$; б) $27^{-\frac{1}{3}}$; в) $\frac{(3^{-2})^3 \cdot 27^2}{9^{\frac{1}{2}}}$;

г) $5 \cdot 16^{\frac{1}{4}} - 0,2 \cdot (-0,027)^{\frac{1}{3}} + \sqrt[5]{1}$.

2. Упростите выражение:

а) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}$; б) $\frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$; в) $(c^{\frac{2}{3}})^3 \cdot c^{-\frac{3}{2}}$;

г) $(81m^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; д) $\frac{d^{5,2} \cdot d^{-4,8}}{d^{2,3} \cdot d^{-2,7}}$.

Домашнее задание:

Степень с действительным показателем. Решение задач.



58

1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$

Примените свойства степени

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$