



ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Что же такое логика?

Логика является одной из дисциплин, образующих математический фундамент информатики. В вычислительной технике и автоматике используются логические схемы – устройства, которые преобразуют логические сигналы. Любой язык программирования содержит логические переменные и средства для описания вычисления логических выражений (например, в условных операторах). Логические методы применяются и при работе с базами данных.

- ***Логика – это наука о законах и формах мышления.***
- ***Логика изучает внутреннюю структуру процесса мышления, который реализуется в таких естественно сложившихся формах как понятие, суждение, умозаключение и доказательство.***

Этапы развития логики

- Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные в 4 веке до нашей эры древнегреческими мыслителями.
- Основы формальной логики заложил **Аристотель**, который впервые отделил логические формы речи от ее содержания.

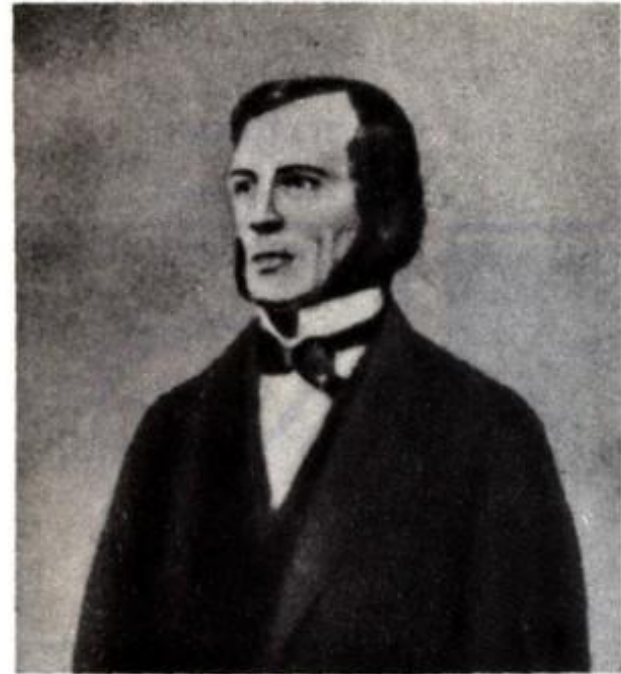
- В XVII веке немецкий ученый и философ **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646 – 1716) попытался построить первые логические исчисления, усовершенствовал и уточнил логическую символику.



- Другой великий математик – англичанин

Джордж Буль

(1815 – 1864) открыл новую область науки – *математическую логику*. В его работах логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику. Этот раздел называют алгеброй логики или *булевой алгеброй*.



ОСНОВЫ ЛОГИКИ

В логике основным объектом является высказывание.

- ***Высказывание (суждение) - это форма мышления, с помощью которой что-либо утверждают или отрицают о предметах, их свойствах и отношениях между ними.***

О предметах можно судить верно или неверно, т.е. ***высказывание может быть истинным или ложным.*** Истинным будет суждение, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей. Ложным суждение будет в том случае, когда связь понятий искажает объективные отношения, не соответствует реальной действительности. ***В естественном языке высказывания выражаются повествовательными предложениями.***

Высказывание не может быть выражено повелительным или вопросительным предложением, оценка истинности или ложности которых невозможна. Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков. Из двух числовых выражений можно составить высказывания, соединив их знаками равенства или неравенства.

Определить что является высказыванием?

1. Сканер - это устройство ввода.
2. Прослушайте сообщение!
3. $4+5=10$
4. Кто отсутствует?
5. Париж — столица Англии.
6. Число 11 является простым.
7. Делайте утреннюю зарядку!
8. Летом бывает дождь.

Определите истинность высказываний:

- Все медведи — бурые.
- Аристотель – основоположник логики.
- В прямоугольнике все углы прямые.
- Монитор – устройство обработки информации.
- Гигабайт – самая большая единица измерения информации

Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Высказывание, состоящее из простых высказываний, называется *составным* (сложным).

Примеры:

- В каждом ромбе диагонали взаимно перпендикулярны. (*простое, истинное*)
- Процессор является устройством вывода информации. (*простое, ложное*)
- Процессор является устройством вывода информации, и клавиатура является устройством вывода информации. (*составное, ложное*)

Если истинность или ложность простых высказываний устанавливается в результате соглашения здравого смысла или с опорой на известные факты наук, то истинность или ложность составных высказываний вычисляется с помощью алгебры логики, которую интересует не содержание высказывания, а только его истинность или ложность.

Алгебра логики определяет правила записи, упрощения, преобразования высказываний и вычисления их значений.

- **Простые высказывания** в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами:
 $A = \{\text{Аристотель - основоположник логики}\}$
 $B = \{\text{На яблонях растут бананы}\}.$
- Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0. Таким образом, $A = 1, B = 0.$
- **Составные высказывания** на естественном языке образуются с помощью союзов, которые в алгебре высказываний заменяются на логические операции. Логические операции задаются таблицами истинности.

Алгебра высказываний

1. Логическая операция КОНЪЮНКЦИЯ (логическое умножение):

- в естественном языке соответствует союзу **и**;
- обозначение **&**, **\wedge** , **\times** ;
- в языках программирования обозначение **And**.
- **Составное высказывание, образованное в результате логического умножения, истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.**
- **Примеры:** $2*2=4$ и $3*3=9$ (**И** и **И** = **И**)
 $2*2=5$ и $3*3=9$ (**Л** и **И** = **Л**)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> \wedge <i>B</i>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Логическая операция ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое сложение)

- В ЕСТЕСТВЕННОМ ЯЗЫКЕ соответствует союзу **или**;
- обозначение \vee , $|$, $+$;
- в языках программирования обозначение **Or**.
- **Составное высказывание, образованное в результате логического сложения, истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.**
- **Примеры:** $2*2=4$ или $3*3=10$
(И или Л = И)
 $2*2=5$ или $3*3=10$
(Л или Л = Л)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Логическая операция ИНВЕРСИЯ (отрицание)

- в естественном языке соответствует словам **неверно, что...** и частице **не**;
- обозначение \bar{A} ; $\neg A$
- в языках программирования обозначение **Not**;
- **Логическое отрицание делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное – истинным.**
- **Примеры:** $A = \{2 * 2 = 4\}$ $\bar{A} = \{2 * 2 \neq 4\}$

A	\bar{A}
0	1
1	0

4. Логическая операция ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование):

- в естественном языке соответствует обороту **если ..., то ...**;
- обозначение \square .
- ***Составное высказывание, образованное в результате логического следования, ложно тогда и только тогда, когда из истинного первого высказывания следует ложное второе высказывание.***

A	B	A □ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Примеры:

Если число делится на 10, то оно делится на 5 – истинно, т.к. истинны и первое высказывание, и второе.

Если число делится на 10, то оно делится на 3 – ложно, т.к. из истинного первого высказывания делается ложный вывод.

Если **первое высказывание ложно**, то вне зависимости от истинности или ложности второго высказывания **все составное высказывание истинно** (из неверного высказывания может следовать что угодно).

5. Логическая операция ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность):

- в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда; в том и только в том случае;**
- обозначения \sim , \leftrightarrow
- ***Составное высказывание, образованное в результате эквивалентности, истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.***

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Примеры:

$A = \{\text{Компьютер может вычислять}\}$

$B = \{\text{Компьютер включен}\}$

$\{\text{Компьютер не может вычислять}\} \Leftrightarrow \{\text{Компьютер не включен}\}$ - истинно

$\{\text{Компьютер не может вычислять}\} \Leftrightarrow \{\text{Компьютер включен}\}$ - ложно

$\{\text{Компьютер может вычислять}\} \Leftrightarrow \{\text{Компьютер не включен}\}$ - ложно

$\{\text{Компьютер может вычислять}\} \Leftrightarrow \{\text{Компьютер включен}\}$ - истинно

Логические операции имеют следующий приоритет:

- 1) действия в скобках,
- 2) ИНВЕРСИЯ (отрицание)
- 3) КОНЪЮНКЦИЯ (логическое умножение)
- 4) ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое сложение)
- 5) ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)
- 6) ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность)

Упражнения

I. Выделите в составных высказываниях простые. Обозначьте каждое из них буквой; запишите с помощью логических операций каждое составное высказывание и определите его истинность.

**1) Число 376 четное *и* трехзначное.
(составное высказывание)**

Выделим простые высказывания

$A = \{\text{Число 376 четное}\}$ $A=1$ (истина)

$B = \{\text{376 трехзначное}\}$. $B=1$ (истина)

A и B составное высказывание, образовано логической операцией **КОНЪЮНКЦИЯ** (союз **и**), **истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания**

В алгебре логики записывается **$A \wedge B = 1 \wedge 1 = 1$**
(Истина)

2) **Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.** (простое высказывание)

Выделим простое высказывание

$A = \{\text{Солнце движется вокруг Земли}\}$ $A=0$ (ложь)

Высказывание, образовано логической операцией
ИНВЕРСИЯ (оборот речи **Неверно, что**), *делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное – истинным*

В алгебре логики записывается $\bar{A} = 1$ (Истина)

3) **Сентябрь – осенний месяц *или* октябрь – зимний месяц.** (составное высказывание)

Выделим простые высказывания

$A = \{\text{Сентябрь – осенний месяц}\}$ $A=1$ (истина)

$B = \{\text{октябрь – зимний месяц}\}$. $B=0$ (ложь)

A или B составное высказывание, образовано логической операцией **ДИЗЪЮНКЦИЯ** (союз **или**), **истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний**

В алгебре логики записывается **$A \vee B = 1 \vee 0 = 1$**
(Истина)

Упражнения

3) *Если сумма цифр числа 12 делится на 3, то число делится на 3*

A \Rightarrow B (Истина)

4) *Число 15 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа 15 делится на 3.*

A \Leftrightarrow B (Истина)

II. Найдите значение выражения

Истинное высказывание обозначаем - 1, ложное высказывание обозначаем - 0

$$(5 > 6) \ \& \ (3 = 4)$$

$$0 \quad 0$$

$$0 \ \& \ 0 = 0$$

$$(5 < 6) \ \vee \ (3 > 4)$$

$$1 \quad 0$$

$$1 \ \vee \ 0 = 1$$

III. Найдите значения логических выражений:

Истинное высказывание обозначаем - 1, ложное высказывание обозначаем - 0

$$\text{а) } (1 \overset{1}{\vee} 0) \vee (1 \overset{1}{\vee} 0); \quad \mathbf{1}$$

$$\text{б) } ((1 \overset{1}{\vee} 0) \overset{1}{\vee} 1) \vee 0; \quad \mathbf{1}$$

$$\text{в) } (0 \overset{1}{\vee} 1) \vee (1 \overset{1}{\vee} 0); \quad \mathbf{1}$$

$$\text{г) } (0 \overset{0}{\&} 1) \& 1; \quad \mathbf{0}$$

$$\text{д) } 1 \overset{1}{\&} (1 \overset{1}{\&} 1) \overset{1}{\&} 1; \quad \mathbf{1}$$

$$\text{е) } ((1 \overset{1}{\vee} 0) \overset{1}{\&} (1 \overset{1}{\&} 1)) \overset{1}{\&} (0 \overset{1}{\vee} 1); \quad \mathbf{1}$$

IV. Даны простые высказывания:

$$A = \{5 > 3\}, \quad B = \{2 = 3\} \quad \text{и} \quad C = \{4 < 2\}.$$

$$A=1$$

$$B=0$$

$$C=0$$

Определите истинность составных высказываний:

$$\begin{aligned} \text{а) } (A \vee B) \& C \Rightarrow (A \& C) \vee (B \& C); \\ (1 \vee 0) \& 0 &\Rightarrow (1 \& 0) \vee (0 \& 0) \\) \quad 0 &\Rightarrow 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{б) } (A \& B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \& (A \& B).$$

$$(1 \& 0) \vee 0 \Leftrightarrow (1 \vee 0) \& (1 \& 0) \Leftrightarrow 0 = 1$$

Самостоятельно

Даны простые высказывания:

$A = \{\text{Принтер} - \text{устройство ввода информации}\},$

$B = \{\text{Процессор} - \text{устройство обработки информации}\},$

$C = \{\text{Монитор} - \text{устройство хранения информации}\},$

$D = \{\text{Клавиатура} - \text{устройство ввода информации}\}.$

Определите истинность составных высказываний:

а) $(A \& B) \& (C \vee D);$

б) $(A \vee B) \Rightarrow (C \vee D);$

в) $(A \vee B) \Rightarrow (C \& D);$

г) $A \Rightarrow B$

Решение:

Даны простые высказывания:

$A = \{\text{Принтер – устройство ввода информации}\}, A=0$

$B = \{\text{Процессор – устройство обработки информации}\}, B=1$

$C = \{\text{Монитор – устройство хранения информации}\}, C=0$

$D = \{\text{Клавиатура – устройство ввода информации}\}. D=1$

Определите истинность составных высказываний:

0 а) $(A \& B) \& (C \vee D)$;

1 б) $(A \vee B) \Rightarrow (C \vee D)$;

0 в) $(A \vee B) \Rightarrow (C \& D)$;

0 г) $A \Rightarrow B$

Самостоятельно

Даны простые высказывания: $A = \{4=1\}$ $B = \{2<5\}$ $C = \{7>2\}$.
Определите истинность составных высказываний:

$$(A \vee \neg B) \& (\overline{C \& A})$$

Решение:

$$\begin{aligned} & (0 \vee \neg 1) \& (\overline{1 \& 0}) \\ & 0 \& \overline{1 \& 0} \\ & 0 \& 1 = 0 \end{aligned}$$