

# ТЕОРИЯ ГРАФОВ

# Основные понятия и определения теории графов

**Определение.** Пусть задано множество  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и бинарная операция  $T$ , сопоставляющая каждому элементу  $x_i \in X$  множество  $\{(x_i, x_j) \mid x_i \in X, x_j \in X\}$ . Операцию  $T$  можно представить как  $T = T(x_1) \cup T(x_2) \cup \dots \cup T(x_n)$ , где  $T(x_i)$  – множество пар, у которых на первом месте стоит элемент  $x_i$ . При этом элементы  $x_i \in X$  будем называть *вершинами*, а пары  $(x_i, x_j)$  – *дугами*, если они упорядочены, и *ребрами*, если нет.

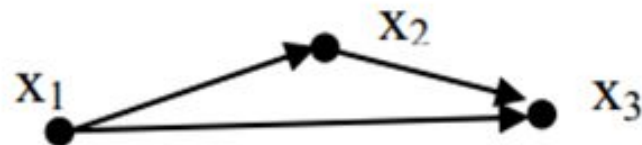
Говорят, что множество  $X$  и бинарная операция  $T$  задает *граф*  $G(X, T)$  или  $G$  и при этом:

- две вершины, определяющие ребро или дугу, называют *смежными*;
- два ребра, имеющие общую вершину, называют *смежными*;
- вершины, определяющие ребро (дугу), называют *инцидентными* этому ребру (дуге).

Граф, в котором операция  $T$  задаёт упорядоченные пары, называется *ориентированным* или *орграфом*. Отношения порядка в графе задаются *стрелками*.

# Основные понятия и определения теории графов

**Пример 1.**



Описать математически данный орграф.

*Решение*

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, T = T(x_1) \cup T(x_2) \cup T(x_3), T(x_1) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3)\}, \\ T(x_2) = \{(x_2, x_3)\}, T(x_3) = \emptyset, T = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3)\}.$$

Ребро называется *петлей*, если оно заканчивается в одной и той же вершине.

# Основные понятия и определения теории графов

Если хотя бы одну пару вершин графа  $G$  соединяют несколько ребер, то такой граф называют мультиграфом.

Вершину графа  $G$  называют *изолированной*, если она не инцидентна ни одной вершине этого графа.

Граф  $G$  называется *полным*, если каждая пара его вершин соединена ребром. Если граф  $G$  не имеет ребер, то такой граф называется нуль-графом.

# Основные понятия и определения теории графов

## Операции над графами

Пусть заданы два неориентированных графа  $\Gamma_1(X_1, E_1)$  и  $\Gamma_2(X_2, E_2)$ .

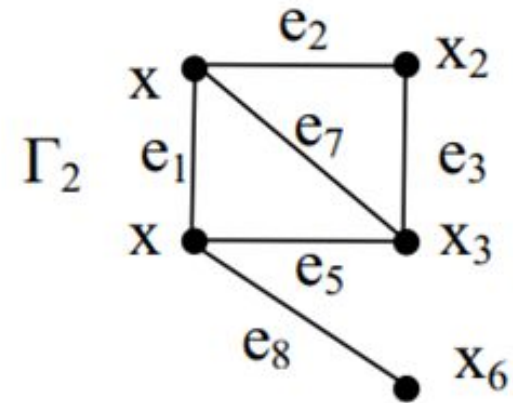
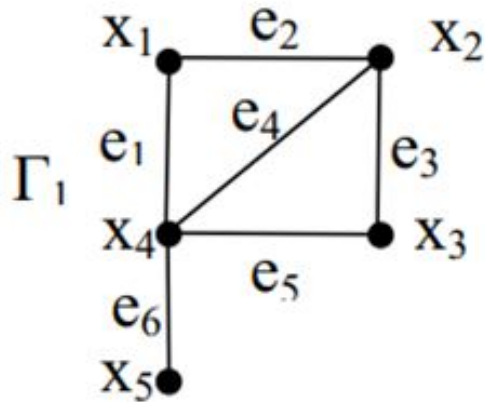
**Определение.** Объединением графов  $\Gamma_1(X_1, E_1)$  и  $\Gamma_2(X_2, E_2)$  называется граф  $\Gamma_3(X_3, E_3)$  ( $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ), такой что  $X_3 = X_1 \cup X_2$ ,  
 $E_3 = E_1 \cup E_2$ .

**Определение.** Пересечением графов  $\Gamma_1(X_1, E_1)$  и  $\Gamma_2(X_2, E_2)$  называется граф  $\Gamma_4(X_4, E_4)$  ( $\Gamma_4 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ), такой что  $X_4 = X_1 \cap X_2$ ,  
 $E_4 = E_1 \cap E_2$ .

**Определение.** Граф  $\Gamma_5(X_5, E_5)$  называется *кольцевой суммой* графов  $\Gamma_1(X_1, E_1)$  и  $\Gamma_2(X_2, E_2)$  ( $\Gamma_5 = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ ), если он представляет собой граф, не имеющий изолированных вершин и порожденный на множестве ребер  $E_5 = E_1 \otimes E_2$ , то есть состоит только из ребер присутствующих в  $\Gamma_1$  или в  $\Gamma_2$ , но не в обоих графах одновременно.

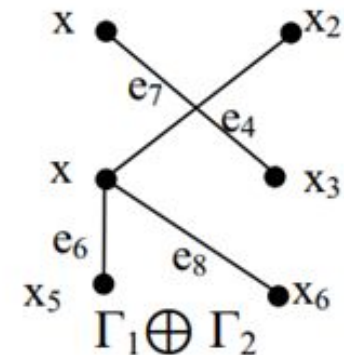
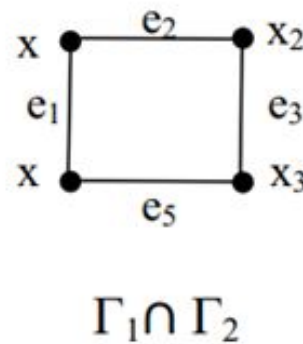
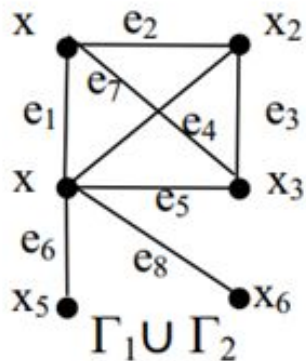
# Основные понятия и определения теории графов

Пример 2. Заданы графы  $\Gamma_1(X_1, E_1)$  и  $\Gamma_2(X_2, E_2)$ .



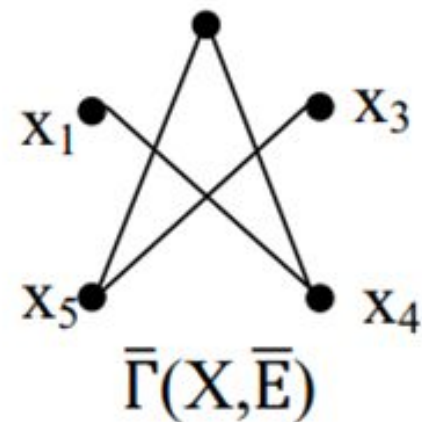
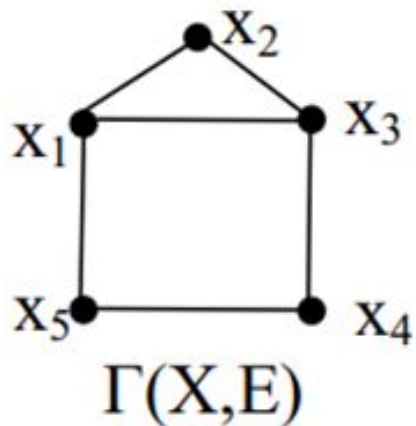
Построить:  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2, \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ .

Решение



# Основные понятия и определения теории графов

**Определение.** Граф  $\bar{\Gamma}(X, \bar{E})$  называется дополнением исходного графа  $\Gamma(X, E)$ , если ребро  $(e_i, e_j) \in \bar{E} \Leftrightarrow (e_i, e_j) \notin E$ .



# Матрицы графов

Для представления графов в памяти ЭВМ используют матрицы.

**Матрица инцидентности.** Рассмотрим граф  $\Gamma$  без петель, определенный на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах. Матрица инцидентности  $A = [a_{ij}]$  графа  $\Gamma$  имеет  $n$  строк (по одной на каждую вершину) и  $m$  столбцов (по одному на каждую дугу). |

Элемент матрицы  $A$  определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j - \text{я дуга инцидентна } i - \text{й вершине и исходит из неё;} \\ -1, & \text{если } j - \text{я дуга инцидентна } i - \text{й вершине и заходит в неё;} \\ 0, & \text{если } j - \text{я дуга не инцидентна } i - \text{й вершине.} \end{cases}$$

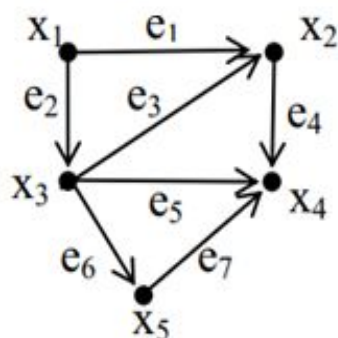
Для неориентированного графа  $\Gamma$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j - \text{е ребро инцидентно } i - \text{й вершине;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



# Матрицы графов

**Пример 3.** Для заданного графа построить матрицу инцидентности.



*Решение*

$$A = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

# Матрицы графов

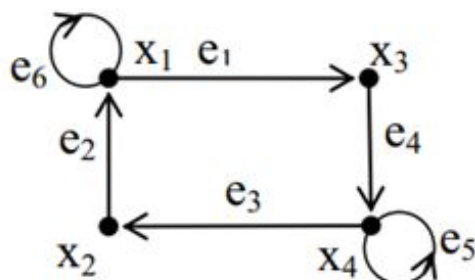
**Определение.** Число ребер, инцидентных вершине  $x \in X$  графа  $\Gamma(X, E)$ , называется *локальной степенью* вершины  $x$  и обозначается  $d(x)$ .

**Матрица смежности.** Пусть  $\Gamma(X, E)$  – ориентированный граф, не имеющий параллельных дуг, определенный на  $n$  вершинах. Матрицей смежности  $M = [m_{ij}]$  графа  $\Gamma$  называется матрица порядка  $n \times n$ , элементы которой определяются следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in E; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

# Матрицы графов

**Пример 4.** Для заданного графа построить матрицу смежности:



*Решение:*

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Если граф  $\Gamma(X, E)$  содержит параллельные ориентированные ребра, то элемент  $m_{ij}$  матрицы смежности  $M$  такого графа равен сумме чисел ориентированных ребер, идущих из  $v_i$  (или чисел неориентированных ребер, соединяющих эти вершины).

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

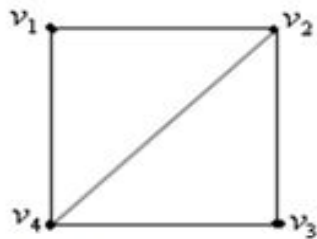
**Граф**  $G(V, E)$  состоит из непустого множества **вершин**  $V$  и множества **ребер**  $E$ . Каждое ребро соединяет пару вершин. Если ребро соединяет вершины  $V_1$  и  $V_2$ , то говорят, что ребро  $E$  и вершины  $V_1$  и  $V_2$  **инцидентны**. Степенью  $d(v)$  вершины  $v$  называется количество ребер, инцидентных этой вершине.

Обозначение:  $p$  – число вершин графа,  $q$  – число ребер.

**Матрица смежности** – это квадратная матрица размера  $p \times p$ , где

$M(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если имеется ребро, соединяющее вершины } v_i \text{ и } v_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

## Пример 10.1.



Граф

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$	0	1	0	1
$v_2$	1	0	1	1
$v_3$	0	1	0	1
$v_4$	1	1	1	0

Матрица смежности

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

**Маршрутом** в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны.

Маршрут называется **замкнутым**, если он начинается и заканчивается в одной вершине, в противном случае – **открытым**.

**Цепь** – это маршрут, в котором нет повторяющихся ребер.

**Простой цепью** называется маршрут, в котором все вершины и ребра различны, кроме, может быть, первой и последней.

**Цикл** – замкнутая цепь.

**Простым циклом** называется замкнутая простая цепь.

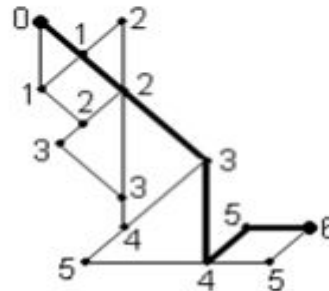
**Расстоянием** между вершинами  $U$  и  $V$  называется длина кратчайшей цепи, соединяющей вершины  $U$  и  $V$ .

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

## Нахождение расстояния между вершинами $U$ и $V$

1. Разметим вершины:
  - а) вершину  $U$  пометим нулем;
  - б) если на некотором шаге разметки имеются вершины  $U_j$ , помеченные числом  $j$ , то все еще не помеченные вершины, смежные с  $U_j$ , помечаем числом  $j+1$ ;
  - в) как только вершина  $V$  окажется помечена, разметка прекращается.
2. Строим кратчайшую цепь, соединяющую вершины  $U$  и  $V$ .

**Пример 10.2.** Найдем расстояние между вершинами



Расстояние равно 6.

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

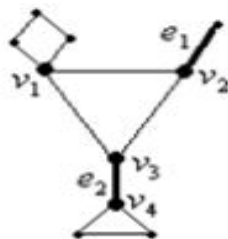
Под **операцией удаления вершины** из графа  $G$  понимается операция, заключающаяся в удалении некоторой вершины вместе с инцидентными ей ребрами.

**Операция удаления ребра** из графа  $G$  заключается в удалении соответствующей пары из  $E$ , при этом вершины сохраняются.

Вершина графа называется **разделяющей вершиной (точкой сочленения)**, если ее удаление увеличивает число компонент связности.

**Мост** – ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности.

**Пример 10.3.**



$e_1, e_2$  – МОСТЫ,

$v_1, v_2, v_3, v_4$  – ТОЧКИ СОЧЛЕНЕНИЯ.

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

## Методика выделения компонент связности

### Пример 10.4.

Пусть граф задан матрицей смежности:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>a</i>	0	1	0	0	0	0	0	0
<i>b</i>	1	0	1	0	0	1	0	0
<i>c</i>	0	1	0	0	0	1	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0	1	0	1	0
<i>e</i>	0	0	0	1	0	0	1	0
<i>f</i>	0	1	1	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	1	1	0	0	0
<i>h</i>	0	0	0	0	0	1	0	0

Составим вспомогательную таблицу:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
1	2	3	0	0	3	0	4

Вершину *a* пометим единицей.

Вершины, смежные с *a*, пометим числом 2 (*b*).

Вершины, смежные с *b* и еще не помеченные, пометим числом 3 (*c, f*).



# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Вершины, смежные с  $c$  и  $f$  и еще не помеченные, пометим числом 4 ( $h$ ).

На этом процесс обрывается, так как с вершиной  $h$  смежна только вершина  $f$ , но она уже помечена, получаем первую компоненту связности:  $a, b, c, f, h$ .

Рассмотрим оставшиеся вершины.

$d$	$e$	$g$
1	2	2

Вершину  $d$  пометим единицей.

С вершиной  $d$  смежны вершины  $e$  и  $g$ , пометим их числом 2.

Получаем вторую компоненту связности:  $d, e, g$ .

## Полные графы

**Полным** называется граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром.

Обозначение:  $K_p$ .

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

## Двудольные графы

**Двудольный граф** – это граф  $G(V, E)$ , такой, что множество  $V$  разбито на два непересекающихся множества  $V_1$  и  $V_2$ , причем всякое ребро из  $E$  инцидентно вершине из  $V_1$  и вершине из  $V_2$ .

Множества  $V_1$  и  $V_2$  называются **долями** двудольного графа.

Если двудольный граф содержит все рёбра, соединяющие множества  $V_1$  и  $V_2$ , то он называется **полным двудольным графом**.

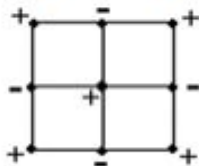
Обозначение:  $K_{m,n}$ , где  $m$  – количество вершин в доле  $V_1$ ,  $n$  – количество вершин в доле  $V_2$ .

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

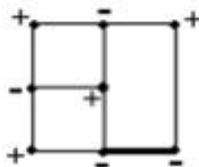
## Методика проверки графа на двудольность

1. Выберем одну из вершин и пометим ее знаком «+».
2. Берём уже помеченную вершину  $X_i$  и помечаем все смежные с ней и ещё непомеченные вершины знаком, противоположным тому, которым помечена вершина  $X_i$ . Продолжаем эту операцию до тех пор, пока не будут помечены все вершины.
3. Если каждое ребро соединяет две вершины, помеченные противоположными знаками, то граф двудольен. Если найдется ребро, соединяющее вершины, помеченные одинаковыми знаками, то граф не двудольен.

### Пример 10.5.



граф двудольен.



граф не двудольен.

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

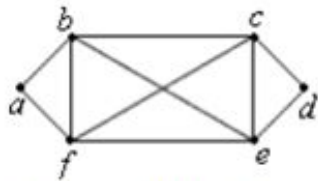
## Эйлеровы графы

Если граф имеет цикл, содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется **эйлеровым циклом**, а граф – **эйлеровым графом**.

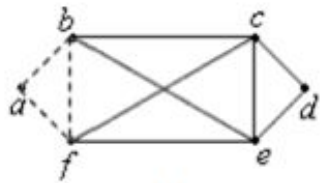
## Методика нахождения эйлерова цикла в эйлеровом графе

1. Убедимся в том, что граф является эйлеровым (степени всех вершин четны).
2. Начиная с произвольной вершины, строим цепь, удаляя рёбра и запоминая вершины, пока не придём в ту же вершину, с которой начали.
3. Берём следующую вершину и продолжаем процесс, пока не будут удалены все рёбра.
4. Объединяем полученные последовательности в одну.

# НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ



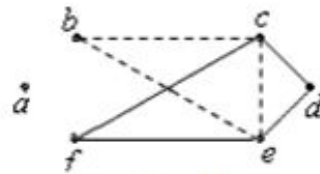
$d(a)=d(d)=2$   
 $d(b)=d(c)=d(e)=d(f)=4$  – граф эйлеров



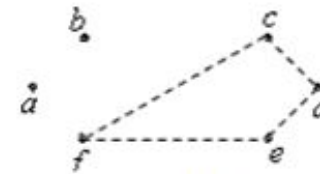
*abfa*

*abcebfa*

*abcdefcebfa*



*bceb*



*cdefc*

## Гамильтоновы циклы

Если граф имеет простой цикл, содержащий все вершины графа (по одному разу), то такой цикл называется **гамильтоновым**, а граф – **гамильтоновым**.

# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

**Ориентированным графом** (или **орграфом**) называется граф, в котором элементами множества рёбер являются упорядоченные пары.

В орграфе элементы множества  $V$  – **узлы**, а элементы множества  $E$  – **дуги**.

**Полустепень исхода**  $d^-(v)$  – число дуг, исходящих из вершины  $v$ .

**Полустепень захода**  $d^+(v)$  – число дуг, входящих в вершину  $v$ .

**Источник** – вершина, полустепень захода которой равна нулю.

**Сток** – вершина, полустепень исхода которой равна нулю.

## Способы задания орграфа

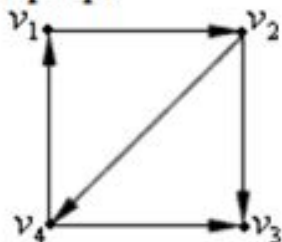
1. Графический способ. Узлы орграфа изображают точками, а дуги – стрелками.

2. Матрица смежности – квадратная матрица размера  $p \times p$ , где

$$M[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если имеется дуга с началом в узле } v_i \text{ и концом в узле } v_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Граф:



Полустепени исхода и захода:

$$d^-(v_1) = 1, d^+(v_1) = 1$$

$$d^-(v_2) = 2, d^+(v_2) = 1$$

$$d^-(v_3) = 0, d^+(v_3) = 2$$

$$d^-(v_4) = 2, d^+(v_4) = 1$$

Матрица смежности:

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$	0	1	0	0
$v_2$	0	0	1	1
$v_3$	0	0	0	0
$v_4$	1	0	1	0

## Маршруты, пути, контуры

**Маршрут** – чередующаяся последовательность узлов и дуг  $v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n$ , в которой каждая дуга  $e_i$  есть дуга с началом в узле  $v_{i-1}$  и концом в узле  $v_i$ .

**Путь** – маршрут, в котором все дуги различны

**Замкнутым** называются маршрут, в котором первые и последние узлы совпадают.

**Контур** – замкнутый путь.

# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

## Достижимость

Вершина  $v_j$  в орграфе  $G$  **достижима** из вершины  $v_i$ , если существует путь из  $v_i$  в  $v_j$ .

Отношение достижимости можно представить квадратной **матрицей** размера  $p \times p$ , где

$$T[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_j \text{ достижима из вершины } v_i \\ 0, & \text{если вершина } v_j \text{ не достижима из вершины } v_i \end{cases}$$

Вершины  $v_i$  и  $v_j$  **сильно связаны** в орграфе  $G$ , если существует путь из  $v_i$  в  $v_j$  и из  $v_j$  в  $v_i$ .

Если все вершины в орграфе сильно связаны, то орграф называется **сильно связным**.

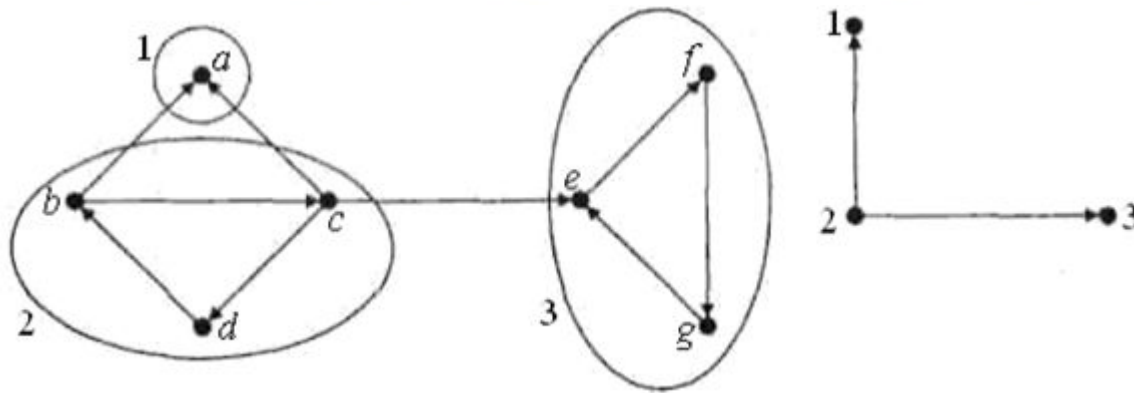
**Компоненты сильной связности (КСС)** орграфа  $G$  – это его максимальные сильно связанные подграфы.

Каждая вершина орграфа принадлежит только одной КСС. Если вершина не связана с другими, то считаем, что она сама образует КСС.



# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

**Графом Герца** называется орграф, который получается стягиванием в одну вершину каждой КСС орграфа  $G$ .



Матрица достижимости:

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$a$	0	0	0	0	0	0	0
$b$	1	1	1	1	1	1	1
$c$	1	1	1	1	1	1	1
$d$	1	1	1	1	1	1	1
$e$	0	0	0	0	1	1	1
$f$	0	0	0	0	1	1	1
$g$	0	0	0	0	1	1	1

# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

## Эйлеровы орграфы

**Эйлеровый контур** в орграфе  $G$  – это, контур, в котором каждая дуга орграфа встречается ровно по одному разу.

Орграф называется **эйлеровым**, если в нём есть эйлеровый контур.

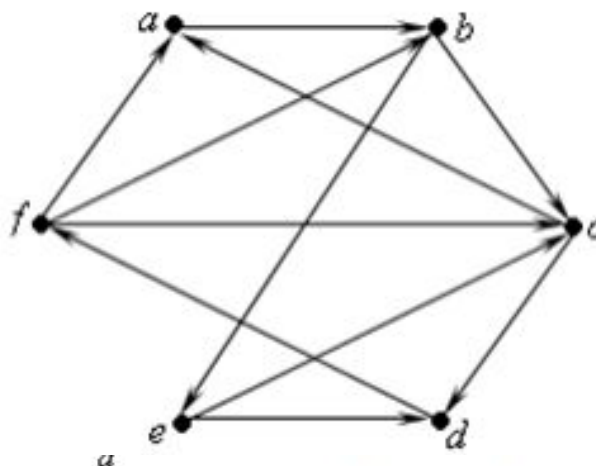
**Теорема.** Связный орграф эйлеров тогда и только тогда, когда у каждой его вершины полустепень исхода равна полустепени захода.

## Гамильтоновы орграфы

Орграф называется **гамильтоновым**, если в нём существует контур, включающий каждую его вершину по одному разу (контур называется гамильтоновым).

# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Методика нахождения гамильтонова контура (поиск с возвратами)



Составим вспомогательную таблицу. В каждом столбце таблицы перечислим вершины, смежные из данной.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	<i>e</i>	<i>d</i>		<i>d</i>	<i>b</i>
					<i>c</i>

# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Построим гамильтонов контур.

1.  $a$ .
2.  $ab$  (возьмём вершину из столбца  $a$ ).
3.  $abc$  (возьмём вершину из столбца  $b$ ).
4.  $abcd$  (возьмём вершину из столбца  $c$ :  $a$  взять не можем, поэтому берём  $d$ ).
5.  $abcdf$  (из столбца  $d$  берём  $f$ ).
6.  $abcd$  (из столбца  $f$  не можем ничего взять, возвращение).
7.  $abc$  (в столбце  $d$  нет вершины после  $f$ , возвращение).
8.  $ab$  (в столбце  $c$  нет вершины после  $d$ , возвращение).
9.  $abe$  (из столбца  $b$  берём вершину  $e$ ).
10.  $abec$  (из столбца  $e$  берём вершину  $c$ ).
11.  $abecd$  (из столбца  $c$  не можем взять  $a$ , поэтому берём  $d$ ).
12.  $abecdf$  (из столбца  $d$  берём  $f$ ).
13.  $abecdffa$  (в столбце  $f$  есть вершина  $a$ ).
14.  $abecdffa$  – гамильтонов контур.

# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

## Ориентированное дерево

**Ориентированным деревом** (или **ордеревом**) называется оргграф со следующими свойствами:

- 1) существует единственный узел (**корень**), полустепень захода которого равна нулю;
- 2) полустепень захода всех остальных узлов равна 1;
- 3) каждый узел достижим из корня

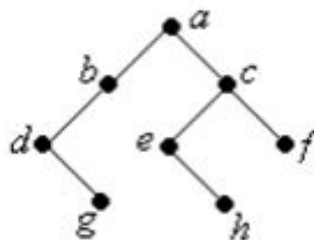
**Бинарное дерево** – это дерево, полустепень исхода каждой вершины которого не более двух.

# ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

## Кодирование бинарных деревьев

В коде бинарного дерева фиксируется “размеченная степень” каждого узла (0 означает, что это лист, 1 – есть левая связь, но нет правой, 2 – есть правая связь, но нет левой, 3 – есть обе связи). Все узлы поддерева данного узла располагаются вслед за этим узлом. Если у данного узла есть обе связи, то сначала рассматриваем левую связь.

### Пример 10.15.

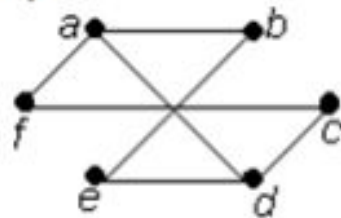


[a3 b1 d2 g0 c3 e2 h0 f0].

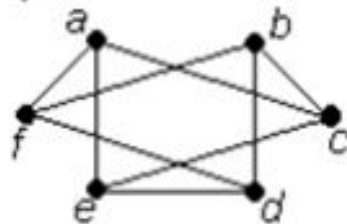
# ПРИМЕРЫ

1. Построить матрицу смежности для данного графа:

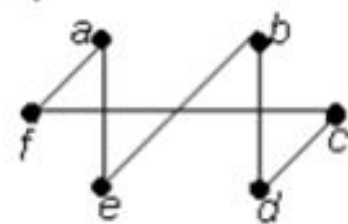
а)



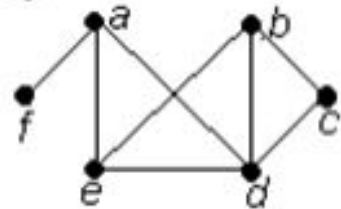
б)



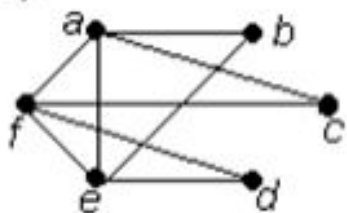
в)



г)



д)



е)

