Некоторые элементы теории множеств

Понятие множества

- **-** используют для описания совокупности некоторых предметов или объектов, обладающих определенным набором свойств.
- Предметы одной совокупности могут отличаться др. от др. и от предметов другой совокупности.
- ***Элементы*** множеств - объекты этих множеств.

- A, B, C, ... – множества
- a, b, c, ... - элементы множеств
- $a \in A$ - a - элемент множества A
- $a \notin A$ - a не является элементом множества A

- $5 \in \boldsymbol{R}$;
- $-10 \in \boldsymbol{Z}$;
- $0{,}5 \notin \boldsymbol{N}$

Виды множеств

- ***Конечные -*** содержат определенное число элементов.
- ***Бесконечные -*** содержат бесконечное число элементов.
- ***Пустое*** - не содержит ни одного элемента $\varnothing$.

Способы задания множеств

- 1. ***Перечисление элементов множества***

$$M = \{2, 3, 5, 7\} \text{ или } M = \{7, 3, 2, 5\}$$

- 2. ***Характеристическое свойство***

$$A = \{x: x \in p(x)\}$$

- Множество четных натуральных чисел, которые больше 2, но меньше 20.

$$A = \{x: x=2k, k \in N, 2 \leq k \leq 9\}$$

- A и B - ***равны***, если они состоят из одних и тех же элементов.

$$\forall x \in A \Leftrightarrow \forall x \in B$$

- $A = B$

$$A = \{5, 6, 7\};\ B = \{6, 7, 5\} \Rightarrow A = B$$

- B - ***подмножество*** A, если каждый элемент B является элементом A.

$$\forall b \in B \Rightarrow \forall b \in A$$

- $B \subset A$ (B включено в A)
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};\ B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow B \subset A$

- Если в B найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий A, то B не будет являться подмножеством A.

$$B \not\subset A$$

- $[a, b] \not\subset [a, b)$

Свойства:

1. $A \subset A$
2. $\varnothing \subset A$

Числовые множества

- \- множества, элементами которых являются числа.
- 1, 2, 3, ..., n, ... образуют множество натуральных чисел

$$N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

- ***Множество целых чисел -*** натуральные числа, им противоположные и 0.

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$$

- ***Множество рациональных чисел*** **-** числа, представимые в виде несократимой дроби m/n, где $m \in Z,\ n \in N$

$$Q = \{m/n,\ m \in Z,\ n \in N\}$$

- ***Иррациональные числа*** – числа, представимые в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.
- $\pi = 3{,}14\ldots$
- $\sqrt{2} = 1{,}41\ \ldots$
- Рациональные и иррациональные числа образуют ***множество действительных чисел (R).***
- $N \subset Z \subset Q \subset R$

Числовые промежутки

- $a, b \in R, a < b$
- 1. $[a, b]=\{x \in R: a \le x \le b\}$ - числовой отрезок

  $x \in [a, b]$
- 2. $(a, b)=\{x \in R: a<x<b\}$ - числовой интервал

  $x \in (a, b)$
- 3. Бесконечные числовые интервалы:

  $(a; +\infty)=\{x \in R: x>a\}$, $x \in (a, +\infty)$

  $(-\infty; a)=\{x \in R: x<a\}$, $x \in (-\infty, a)$

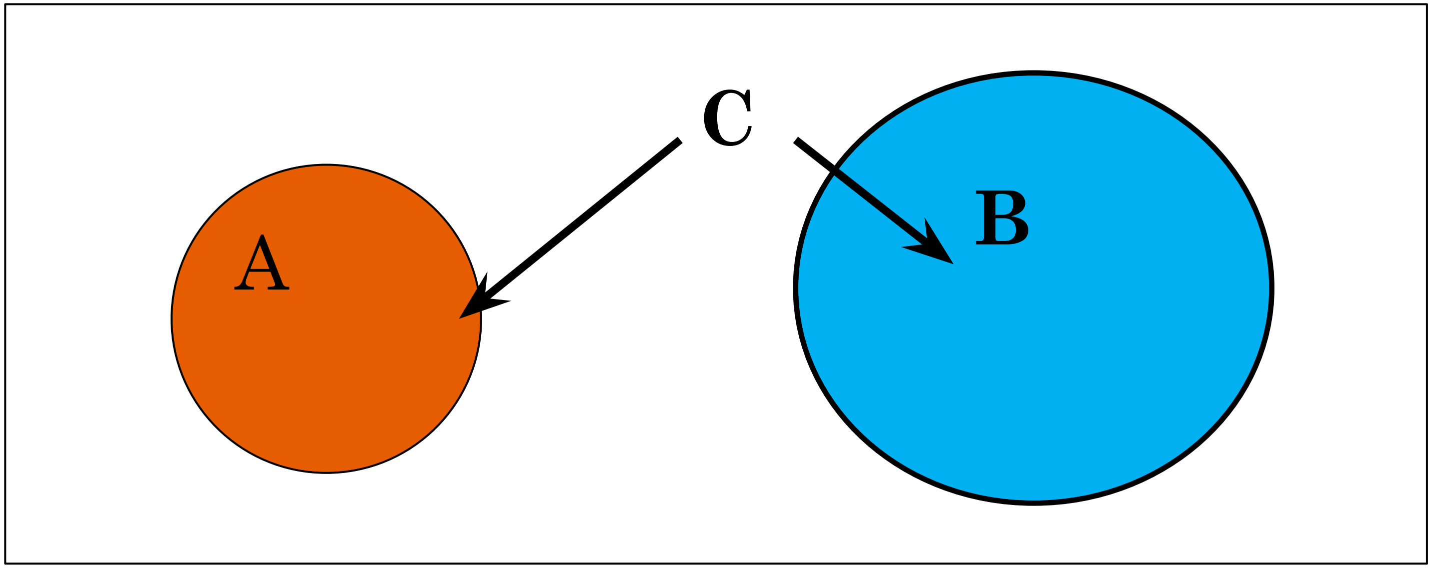
  $(-\infty;+\infty)=\{x \in R\}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

Операции над множествами

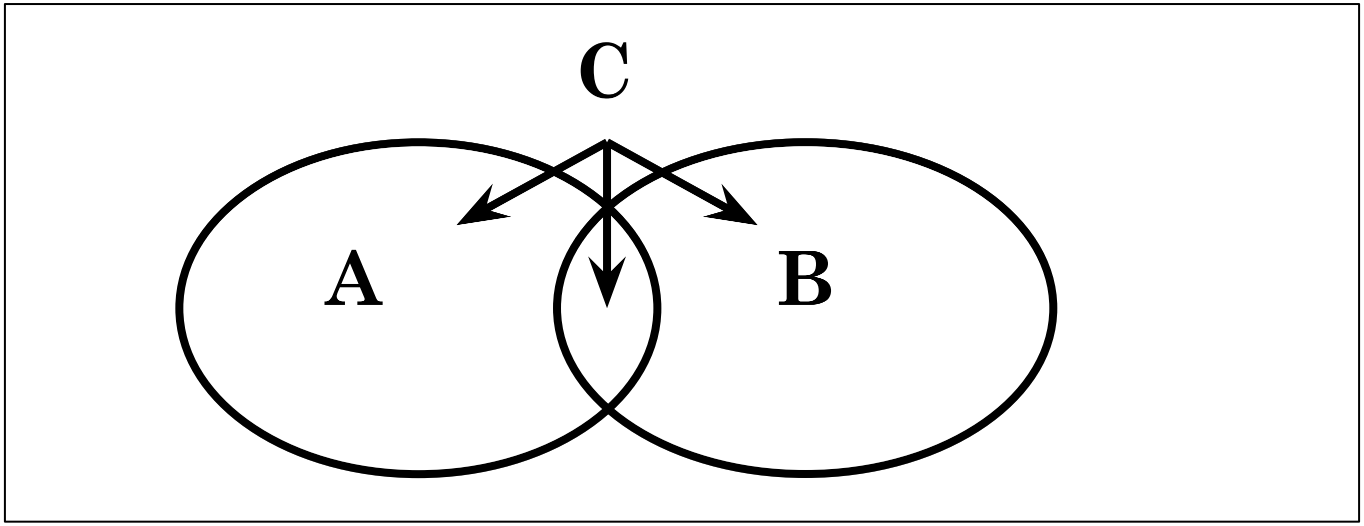
- **Объединением (суммой)** нескольких множеств называется множество, содержащее те и только те элементы, которые входят хотя бы в одно из данных множеств.

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{A} \ \underline{\text{или}} \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$$

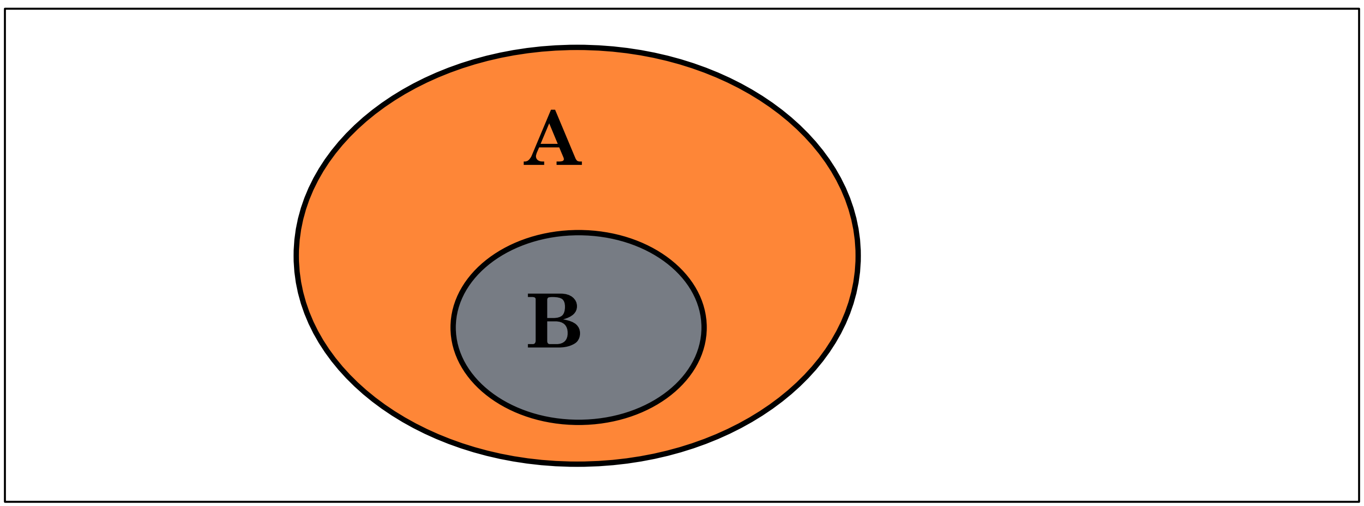
- Пусть A и B – непустые множества. Найти A ∪ B



A∪B=C



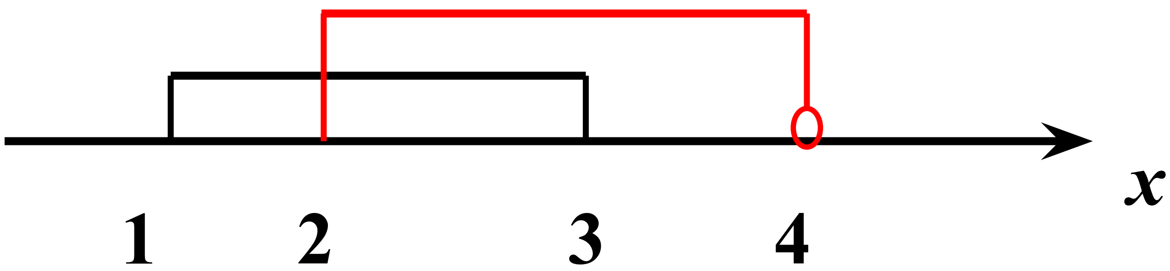
$A \cup B = C$



$A \cup B =$
A

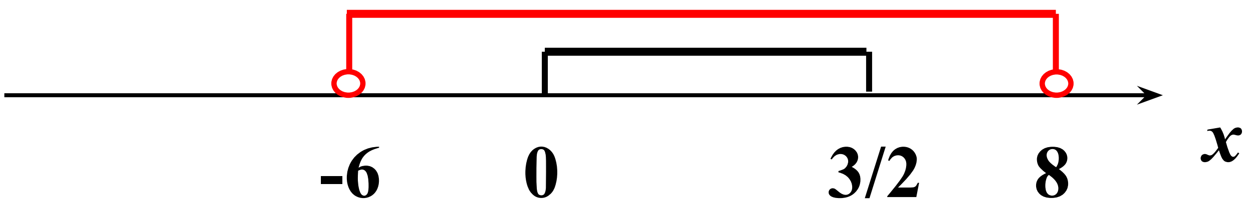
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \cup \varnothing = \boldsymbol{A}$ для
$\forall A$

а). Пусть $A = [1; 3]$, $B = [2; 4)$, найти $A \cup B$.



$A \cup B = [1; 4)$

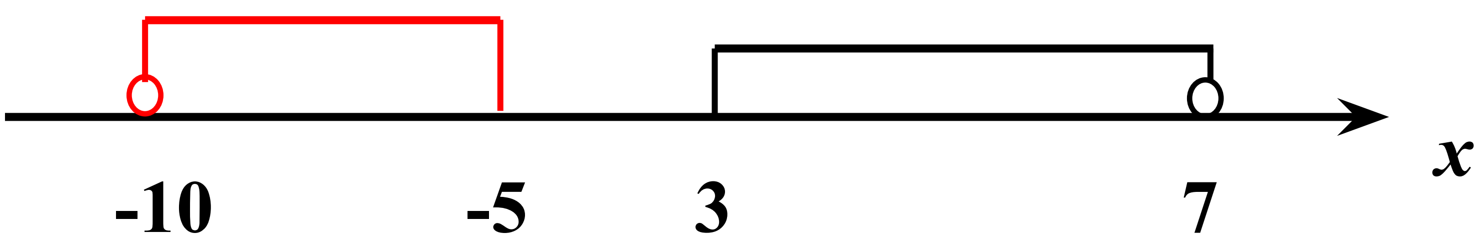
b). Пусть $A = (-6; 8)$, $B = [0; 3/2]$, найти $A \cup B$.



$\boldsymbol{A \cup B = (-6; 8)}$

c). Пусть $A = (-10; -5]$; $B = [3; 7)$. Найти $A \cup B$

.



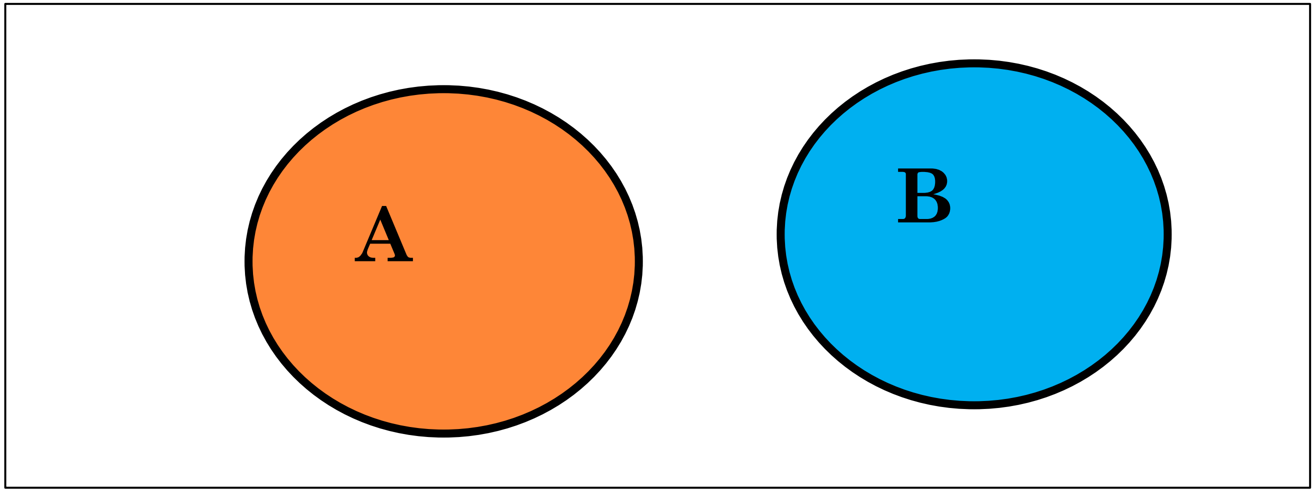
$\boldsymbol{A \cup B = (-10; -5] \cup [3; 7)}$

Пересечение множеств

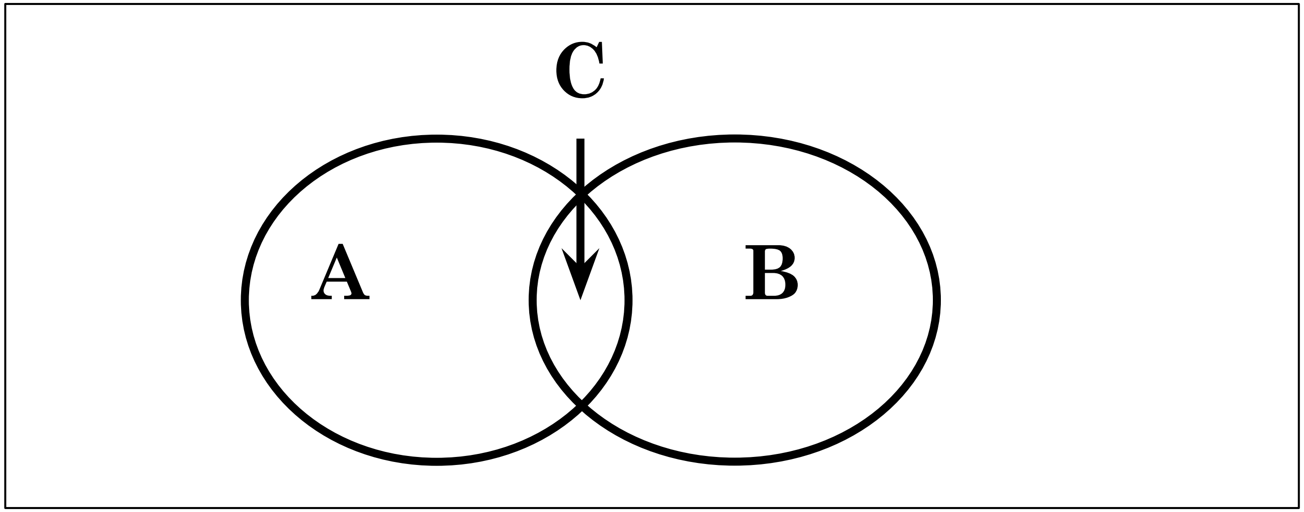
- ***Пересечением (произведением)*** нескольких множеств называется множество, содержащее те и только те элементы, которые входят в каждое из данных множеств.

$$C = A \cap B$$

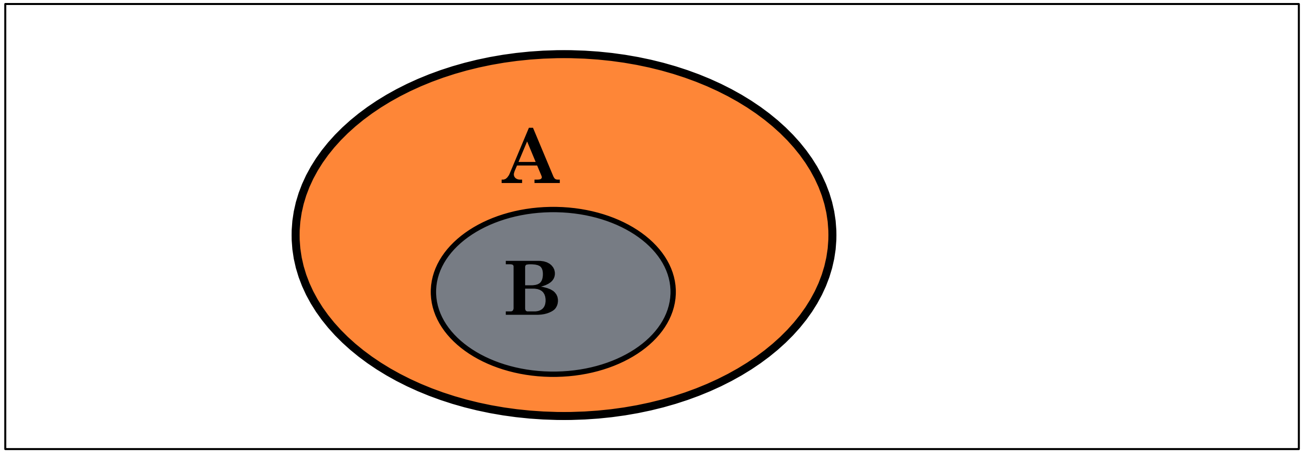
- $\boldsymbol{A \cap B = \{x \mid x \in \mathrm{A}}$ <u>**и**</u> $\boldsymbol{x \in B\}}$
- Пусть A и B – непустые множества. Найти $A \cap B$



A∩B=∅

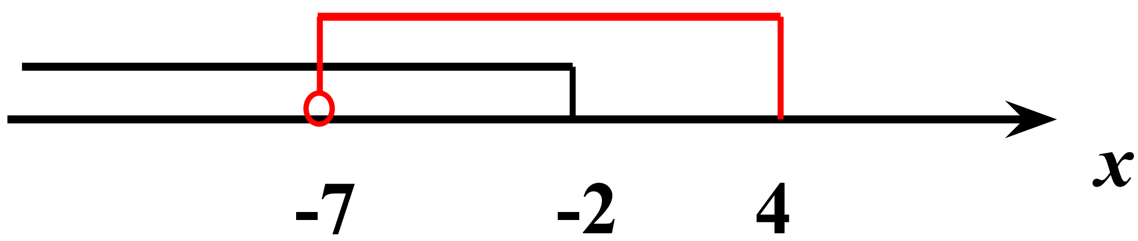


$A \cap B = C$



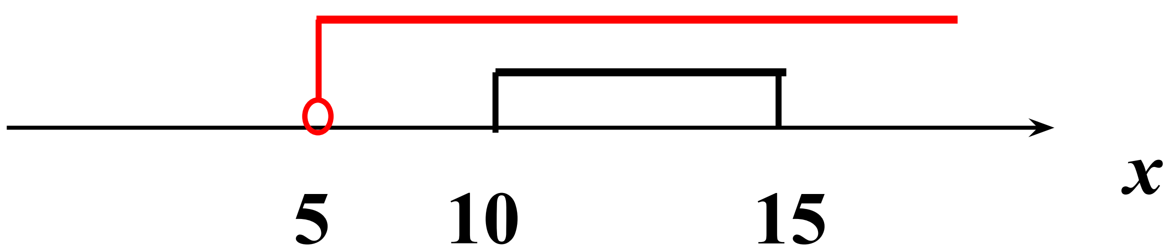
$A \cap B = B$

$\boldsymbol{A \cap A = A,\ \ A \cap \varnothing = \varnothing}$ для $\forall$ A a). Пусть $A = (-\infty; -2]$, $B = (-7; 4]$. Найти $A \cap B$.



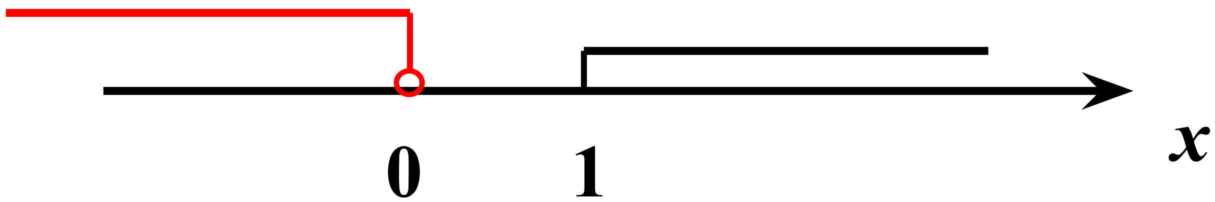
$\boldsymbol{A \cap B = (-7; -2]}$

b). Пусть $A = (5; +\infty)$, $B = [10; 15]$. Найти $A \cap B$.



$\boldsymbol{A \cap B = [10; 15]}$

c). Пусть $A = (-\infty; 0)$, $B = [1; +\infty)$. Найти $A \cap B$.



$$A \cap B = \varnothing$$

Алгебраические свойства

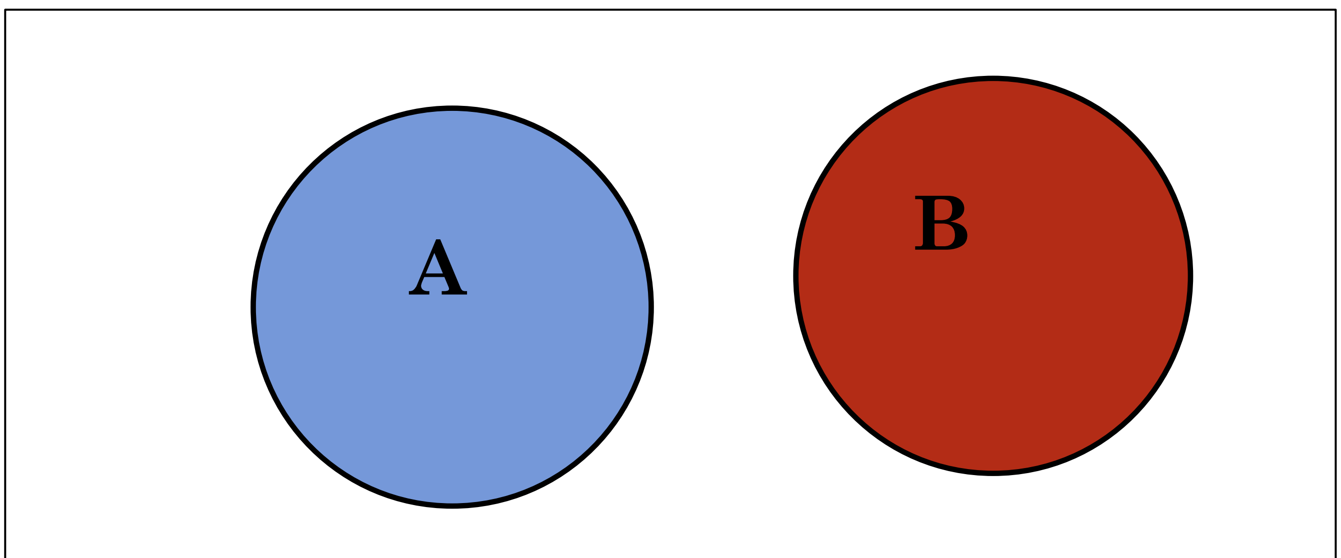
- U - универсальное множество, т.е. все рассматриваемые объекты, являются его элементами.

Разность множеств

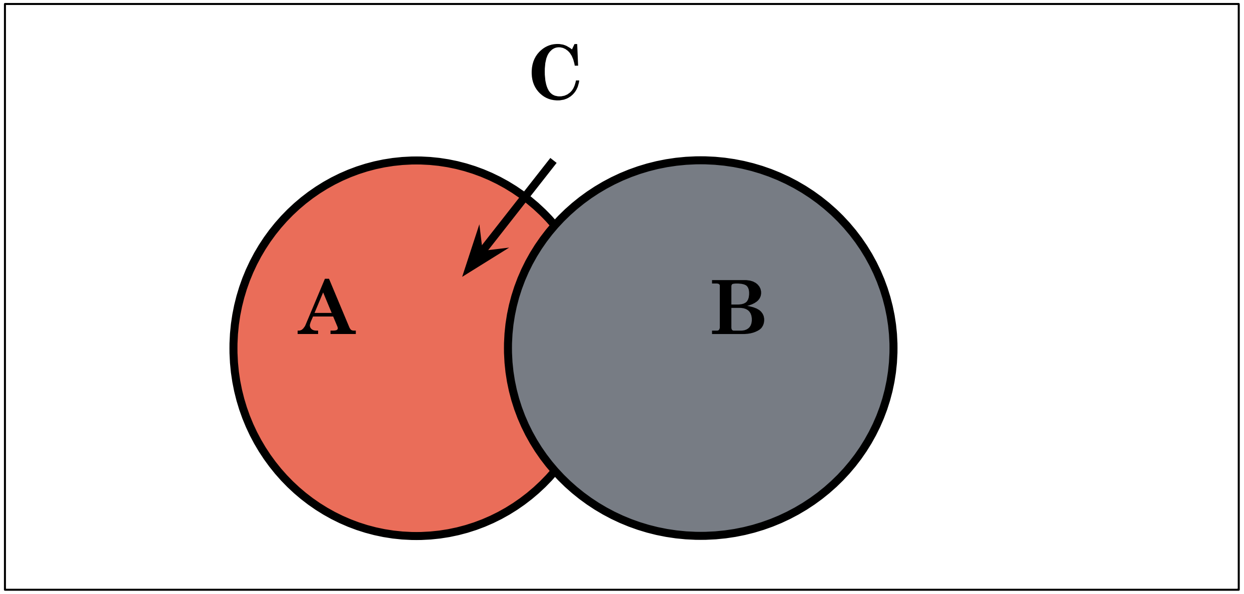
- ***Разностью множеств*** A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

$$C = A \setminus B$$

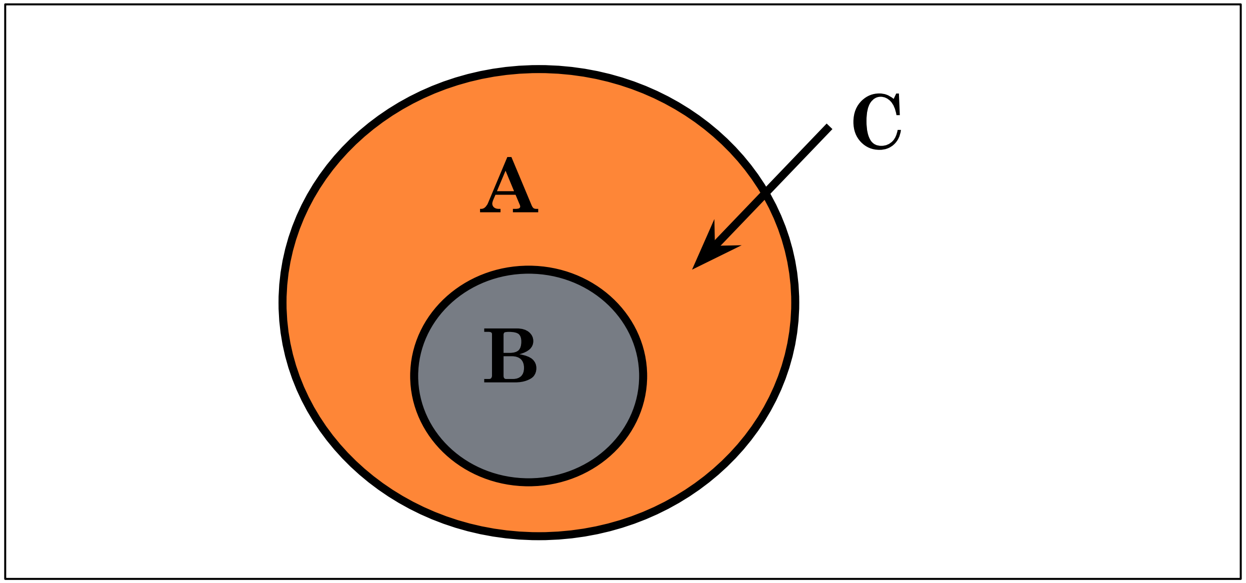
- $\boldsymbol{A \setminus B = \{x \mid x \in \mathrm{A},\ x \notin B\}}$
- Пусть A и B − непустые множества. Найти $A \setminus B$



A \ B=A

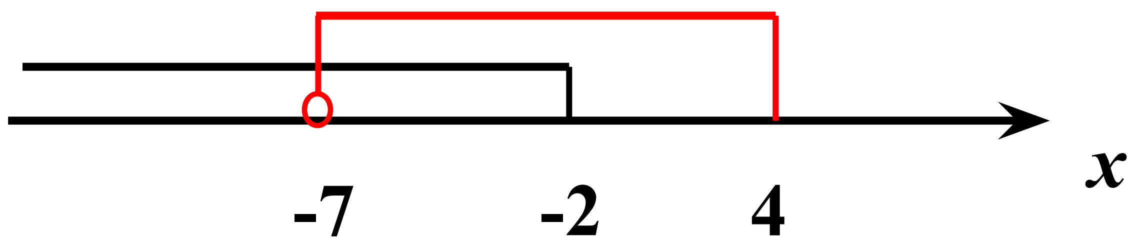


A \ B=C



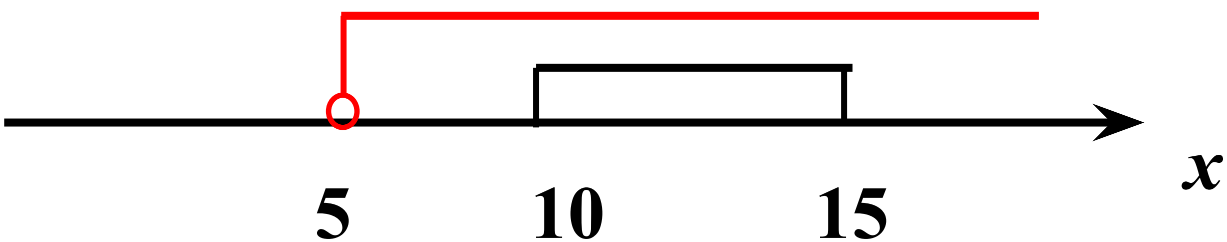
A \ B=C

a). Пусть $A = (-\infty; -2]$, $B = (-7; 4]$. Найти $A \setminus B$.



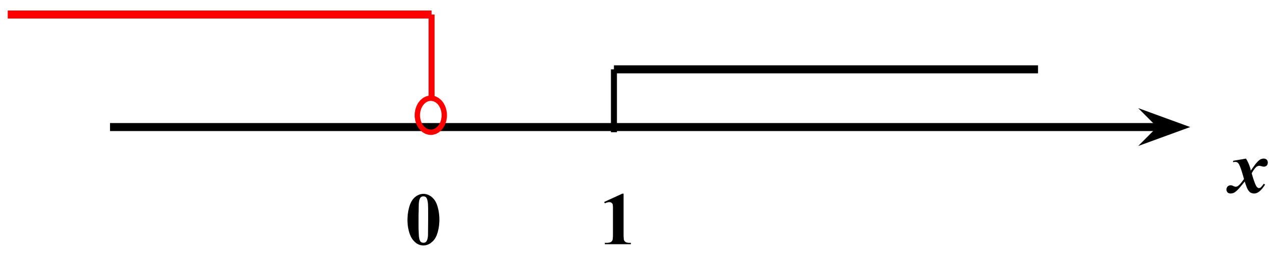
$\boldsymbol{A \setminus B = (-\infty; -7]}$

b). Пусть $A = (5; +\infty)$, $B = [10; 15]$. Найти $A \setminus B$.



$\boldsymbol{A \setminus B = (5; 10) \cup (15; +\infty)}$

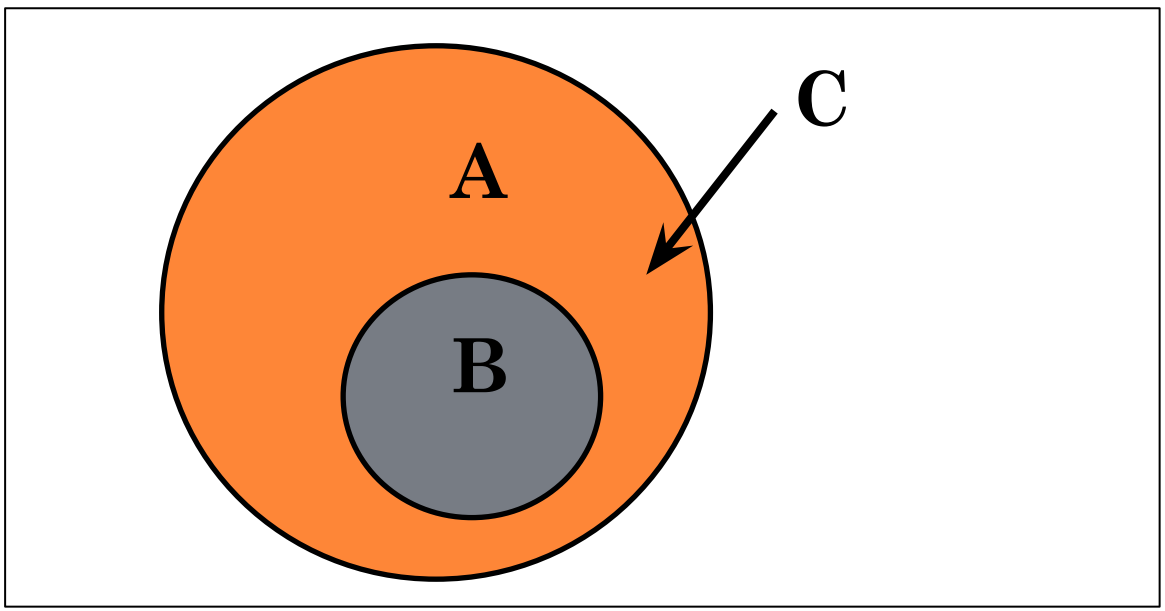
c). Пусть $A = (-\infty; 0)$, $B = [1; +\infty)$. Найти $A \setminus B$.



$$\boldsymbol{A \setminus B = (-\infty; 0)}$$

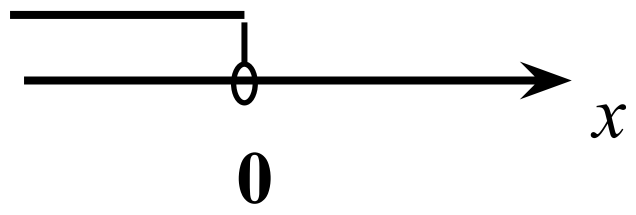
- Если множество $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B до множества A.

- $\overline{B}$ или B_A'



$C = \overline{B}$

1. Пусть $B = (-\infty; 0)$. Найти $\bar{B}$



$\bar{B} = [0;+\infty)$

2. Пусть $B = [10; 15)$. Найти $\bar{B}$

$\bar{B} = (-\infty; 10) \cup [15; +\infty)$