Хэш-функции (Hash functions)

- **Хэш-функция (Hash function)** – это функция, преобразующая значения ключа (например: строки, числа, файла) в целое число
- Значение, возвращаемое хэш-функцией, называется **хэш-кодом** (hash code), контрольной суммой (hash sum) или хэшем (hash)

$$T_{hash} = O(|s|)$$

```
#define HASH_MUL 31
#define HASH_SIZE 128

// Хэш-функция для строк
unsigned int hash(char *s)
{
    unsigned int h = 0;
    char *p;

    for (p = s; *p != '\0'; p++)
        h = h * HASH_MUL + (unsigned int)*p;
    return h % HASH_SIZE;
}
```

Хэш-функции (Hash functions)

- **Хэш-функция (Hash function)** – это функция, преобразующая значения ключа (например: строки, числа, файла) в целое число
- Значение, возвращаемое хэш-функцией, называется **хэш-кодом** (hash code), контрольной суммой (hash sum) или хэшем (hash)

```
#define HASH_MUL 31
#define HASH_SIZE 128

int main()
{
    unsigned int h = hash("ivanov");
}
```

i	v	a	n	o	v
105	118	97	110	111	118

Хэш-функции (Hash functions)

```c
#define HASH_MUL 31
#define HASH_SIZE 128

unsigned int hash(char *s) {
    unsigned int h = 0;
    char *p;

    for (p = s; *p != '\0'; p++)
        h = h * HASH_MUL + (unsigned int)*p;
    return h % HASH_SIZE;
}
```

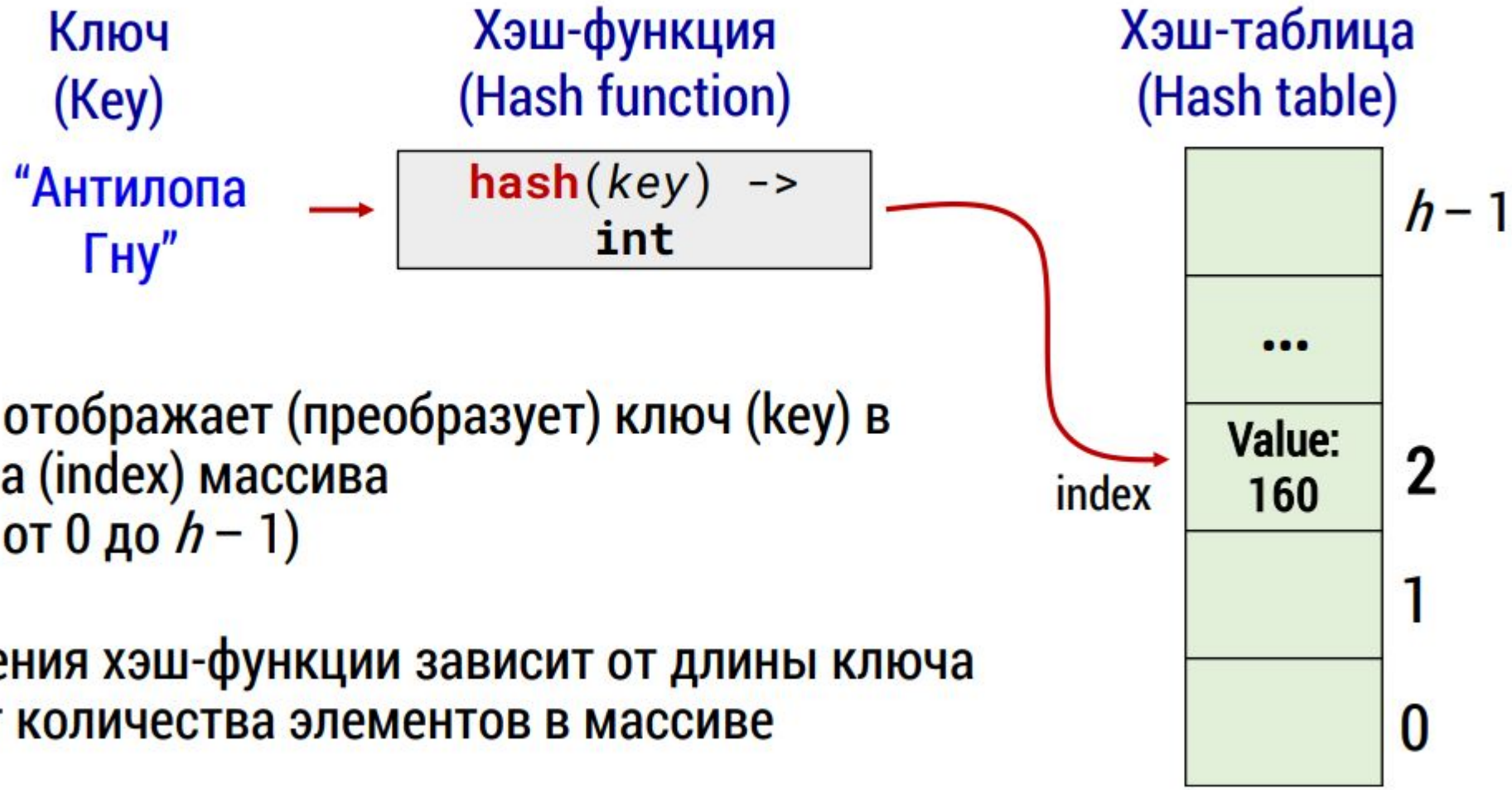
i	v	a	n	o	v
105	118	97	110	111	118

```
h = 0 * HASH_MUL + 105
h = 105 * HASH_MUL + 118
h = 3373 * HASH_MUL + 97
h = 104660 * HASH_MUL + 110
h = 3244570 * HASH_MUL + 111
h = 100581781 * HASH_MUL + 118
return 3118035329 % HASH_SIZE     // hash(“ivanov”) = 1
```

Хэш-таблицы (Hash tables)

- **Хэш-таблица (hash table)** – структура данных для хранения пар «ключ – значение»
- Доступ к элементам осуществляется по ключу (key)
- Ключи могут быть строками, числами, указателями, …
- Хэш-таблицы позволяют в среднем за время $O(1)$ выполнять добавление, поиск и удаление элементов

Хэш-таблицы (Hash tables)



- **Хэш-функция** отображает (преобразует) ключ (key) в номер элемента (index) массива (в целое число от 0 до $h - 1$)
- Время вычисления хэш-функции зависит от длины ключа и не зависит от количества элементов в массиве
- Ячейки массива называются buckets, slots

ХЕШ-ТАБЛИЦА

Единственная сложность при работе с хеш-таблицами – коллизии, возникающие, когда для двух разных объектов хеш-функция возвращает один и тот же ключ.

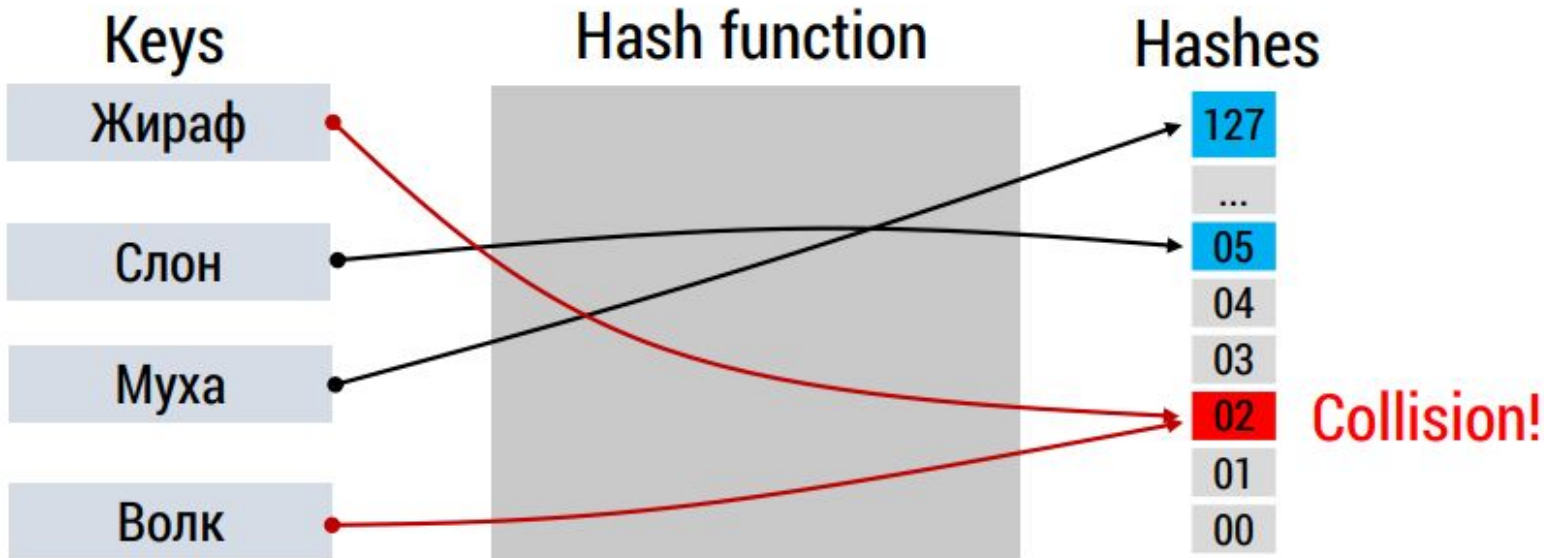
Можно решить одним из двух способов:

- разрешение коллизий на основе списков, **(закрытая адресация)**
- разрешение коллизий на основе табличного спуска. **(открытая адресация)**

Понятие коллизии (Collision)

- **Коллизия (Collision)** – это совпадение значений хэш-функции для двух разных ключей

hash(“Волк”) = 2 hash(“Жираф”) = 2



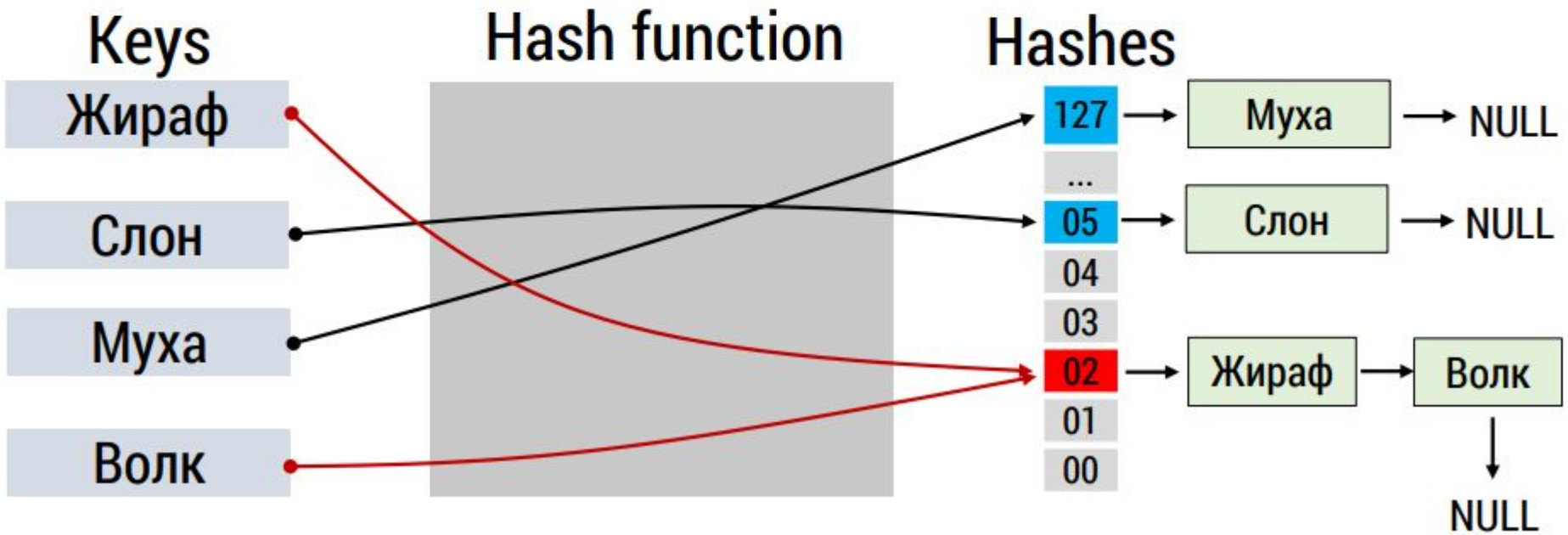
Существуют хэш-функции без коллизий –
совершенные хэш-функции (perfect hash function)

Разрешение коллизий (Collision resolution)

Метод цепочек (Chaining) – закрытая адресация

Элементы с одинаковым значением хэш-функции объединяются в связный список. Указатель на список хранится в соответствующей ячейке хэш-таблицы

- При коллизии элемент добавляется в начало списка
- Поиск и удаление элемента требуют просмотра всего списка



Разрешение коллизий (Collision resolution)

Открытая адресация (Open addressing)

В каждой ячейке хэш-таблицы хранится не указатель на связный список, а один элемент (ключ, значение
Если ячейка с индексом `hash(key)` занята, то осуществляется поиск свободной ячейки в следу
позициях таблицы

Линейное хэширование (linear probing) –
проверяются позиции:

`hash(key) + 1, hash(key) + 2, …, (hash(key) + i) mod h, …`

Если свободных ячеек нет, то таблица заполнена

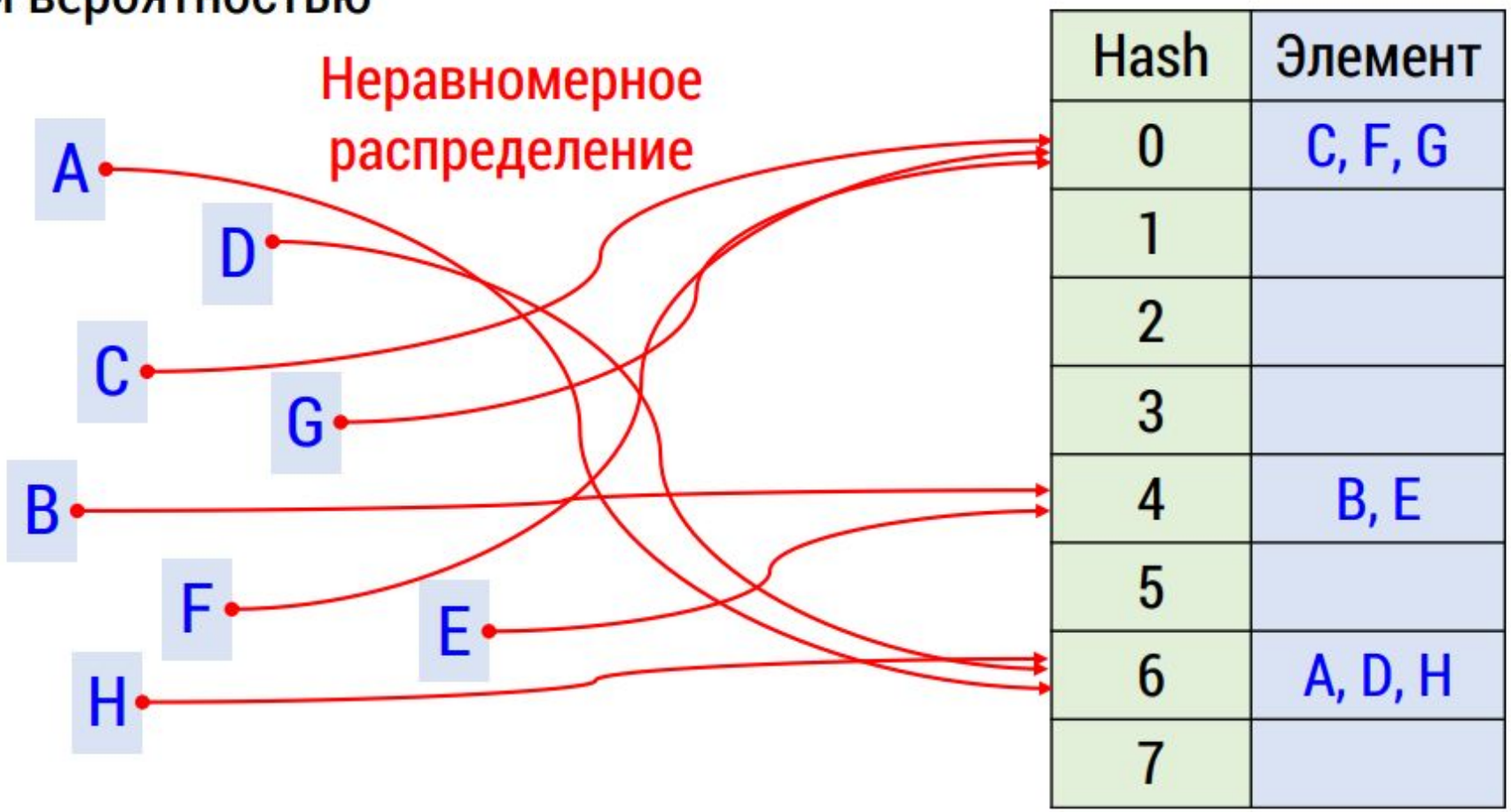
Пример:

- `hash(D) = 3`, но ячейка с индексом 3 занята
- Просматриваем ячейки: 4 – занята, 5 – свободна

Hash	Элемент
0	B
1	
2	
3	A
4	C
5	D
6	
7	

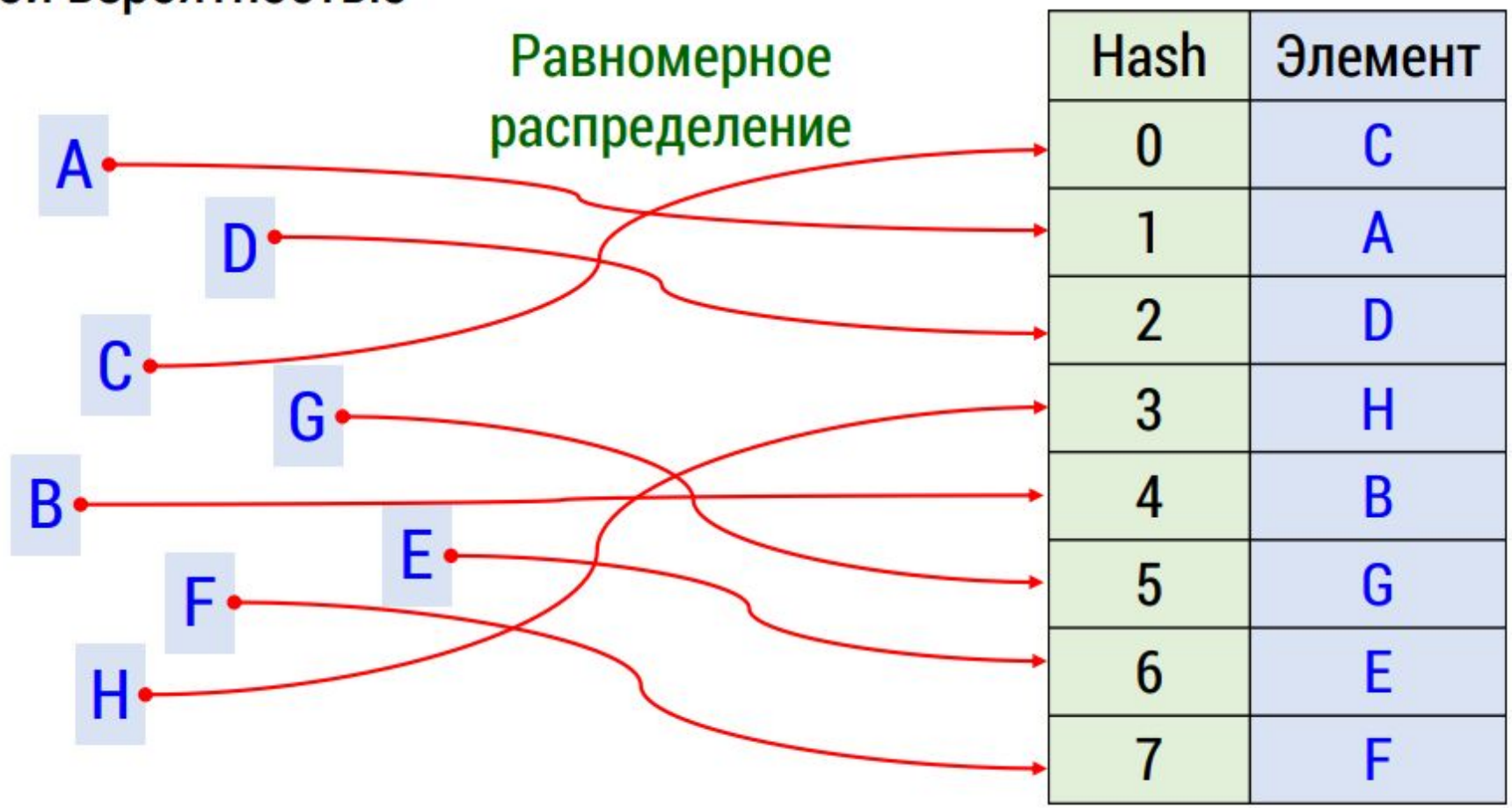
Требования к хэш-функциям

- **Равномерность (uniform distribution)** – хэш-функция должна равномерно заполнять индексы массива возвращаемыми номерами
- Желательно, чтобы все хэш-коды формировались с одинаковой равномерной распределенной вероятностью



Требования к хэш-функциям

- **Равномерность (uniform distribution)** – хэш-функция должна равномерно заполнять индексы массива возвращаемыми номерами
- Желательно, чтобы все хэш-коды формировались с одинаковой равномерной распределенной вероятностью



Криптографические хэш-функции

Хэш-функцией называется всякая функция $h: X \to Y$,
легко вычислимая и такая, что для любого сообщения M
значение $h(M) = H$ *(свертка)* имеет фиксированную битовую длину.

- **Ключевые**
- **Бесключевые**

1. Устойчивость к коллизиям

2. Необратимость

3. Открытость к вычислению

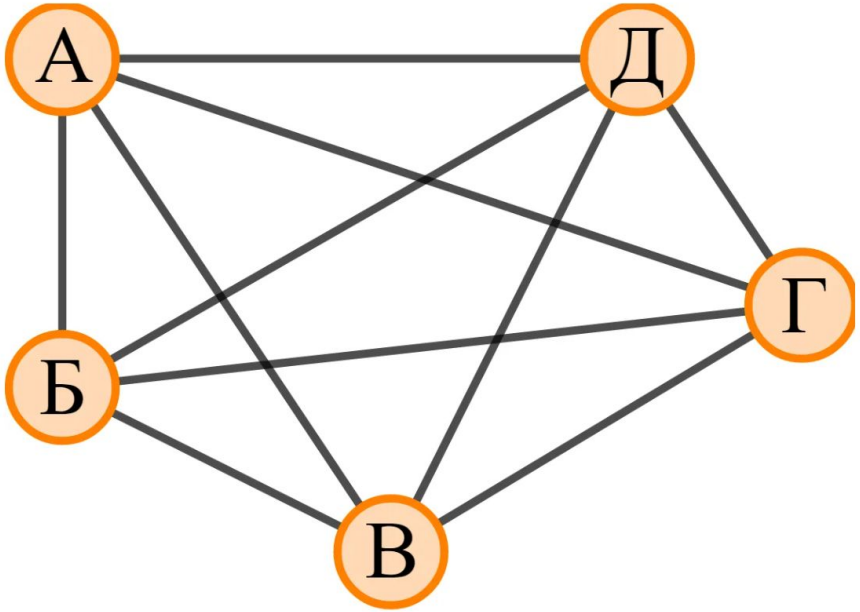
Ключевые Называются *кодами аутентификации сообщений (КАС) (message authentication code (MAC)).*
Дают возможность без дополнительных средств гарантировать как правильность источника данных, так и целостность данных в системах с доверенной средой.

Бесключевые. Называются *кодами обнаружения ошибок (modification detection code (MDC) или manipulation detection code, message integrity code (MIC)).*
Дают возможность с помощью дополнительных средств (например, шифрования, использования защищенного канала или цифровой подписи) гарантировать целостность данных.

Основные криптографические хеш-функции

Название	Дата создания	Размер	Число раундов	Примечания
MD4 (*Message Digest 4*)	1990 г., Р.Риверст	128 бит	3	Уязвимости найдены в 1991 г., коллизии в 1996 г.
MD5 (*Message Digest 5*)	1991 г., Р.Риверст	128 бит	4	Псевдоколлизии найдены в 1993 г., коллизии в 1996 г., уязвимости найдены в 2004 г.
MD6 (*Message Digest 6*)	2008 г., Р.Риверст	переменный, $0<d\leq 512$	переменное. По-умолчанию, Без ключа=40+[d/4], с ключом=max(80,40+(d/4)	
SHA-1 (*Secure Hash Algorithm Ver.1*)	1995, АНБ	160 бит	80	Уязвимости найдены в 2005 г.

Коллизия 2 рода



Коллизия 1 рода
Пусть есть 5 объектов принимающих 10 значений.
Значение конкретного элемента совпадает со значением другого элемента. (вероятность = 1/10)

Коллизия 2 рода
Пусть есть 5 объектов принимающих 10 значений.
Значения каких-то двух объектов совпадают.
(Вероятность =?)

Парадокс дней рождения гласит, что в группе всего из 23 человек есть 50% шанс, что, по крайней мере, у двух людей совпадут даты дня рождения.

Вероятность, того, что дни рождения не совпадут

$$\bar{p}(n) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

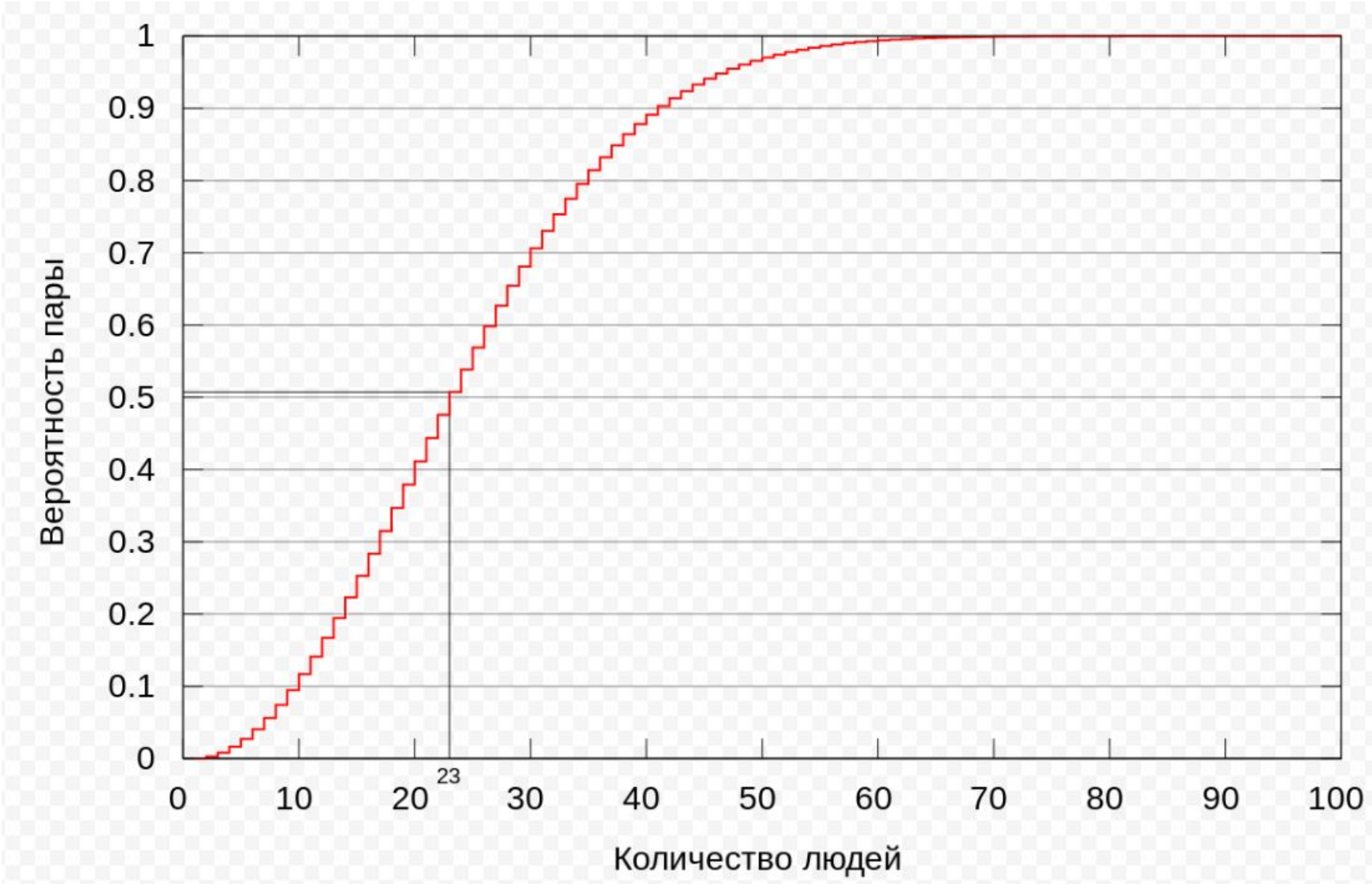
$$= \frac{365 \times 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$

$$= \frac{365!}{365^n (365 - n)!}$$

Вероятность, того, что дни рождения совпадут

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n)$$

Какова вероятность для 5-ти объектов с 10-ю вариантами значений?


Вероятность пары
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
23
30
40
50
60
70
80
90
100
Количество людей

Приближение

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n) \approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}}$$

При p(n)=1/2, N=365 количество человек составит

$$n \approx \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 2 \cdot 365 \cdot \ln 0{,}5} = 22{,}9999.$$

Другое приближение

$$\frac{1}{2} \geq e^{-\frac{n^2}{2N}}$$

$$n \geq \sqrt{2 \ln 2 \cdot N} \approx 1,177\sqrt{N} \approx 23$$

Следствие

Если хеш функция имеет N возможных значений, достаточно создать примерно $\sqrt{N}$ вариантов среди которых найдется 2 одинаковых (коллизия 2 рода) с вероятностью 1/2