

Моделирование процессов преобразования сигналов и помех линейными и нелинейными звеньями

ВЫПОЛНИЛ:
СТУДЕНТ ГРУППЫ РТСМД-11
КОШКИН Н.В.

УЛЬЯНОВСК 2018 Г.

Рассматриваемые вопросы:

- ▶ Моделирование линейных звеньев методом инвариативности импульсной характеристики;
- ▶ Моделирование линейных звеньев методом билинейного преобразования.

Моделирование линейных звеньев

Любое преобразующее радиосигнал устройство может быть представлено в виде совокупности линейных и нелинейных звеньев. Формально различие между этими двумя категориями заключается в типе дифференциальных уравнений, описывающих связь входных и выходных сигналов: для первой категории эти уравнения линейные, а для второй – нелинейные. Реакция системы на входное воздействие может быть представлено в виде суммы суперпозиции сигналов:

$$x(t) = \sum_k x_k(t).$$

Для линейных систем реакция $y(t)$ на воздействие $x(t)$ является суммой реакций на каждый из сигналов.

Таким образом, для линейной системы выполняется принцип суперпозиции. В связи со значительной разницей физических свойств линейных и нелинейных звеньев при их моделировании используются различные методы.

Рассмотрим некоторые известные методы синтеза цифровых моделей линейных звеньев.

1. МЕТОД ИНВАРИАНТНОСТИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При синтезе модели этим методом обеспечивается равенство импульсных характеристик аналогового фильтра и цифрового фильтра:

$$h[n] = h(nT), n = 0, 1, \dots$$

Передаточная функция ЦФ при этом равна z-преобразованию от импульсной характеристики.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}.$$

Допустим, что аналоговый фильтр имеет передаточную функцию вида:

$$H(s) = H_0 \frac{(s - S_1)(s - S_2) \cdots (s - S_M)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)},$$

где $S_m, m = \overline{1, M}$ и $s_n, n = \overline{1, N}$ – нули и полюсы передаточной характеристики. Импульсная характеристика аналогового фильтра однозначно определяется как преобразование Лапласа функции $H(s)$, и в случае, когда полюсы $s_n, n = \overline{1, N}$ простые, равна

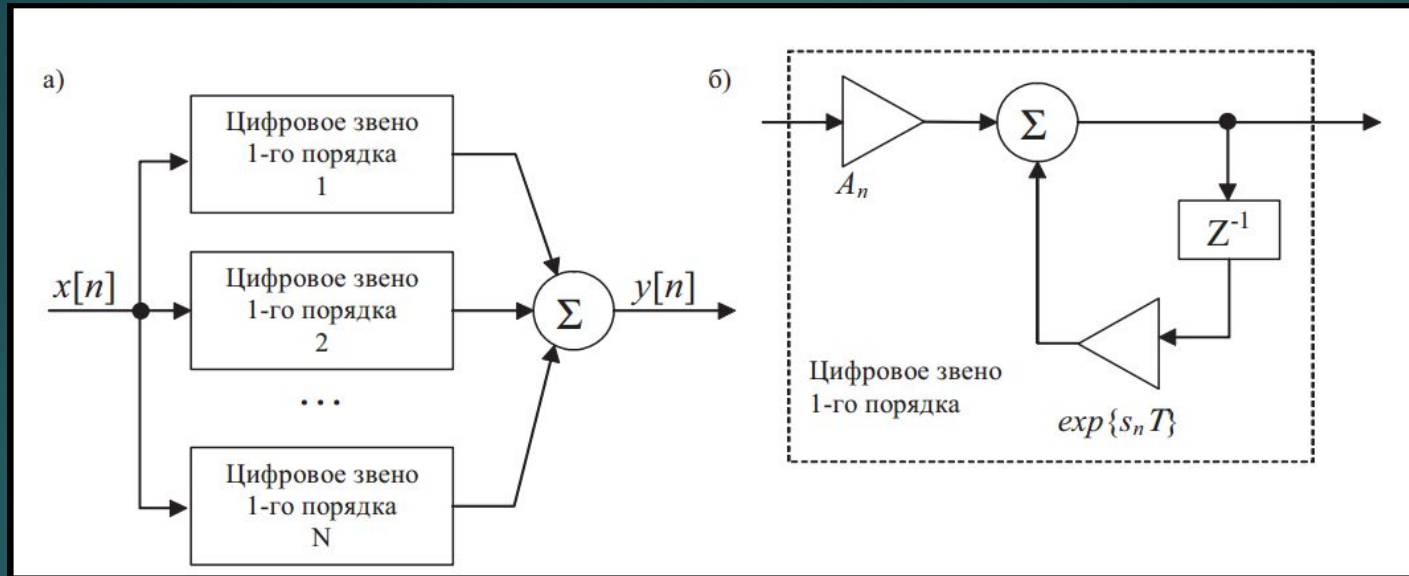
$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t}, \quad \text{Где } A_k = H(s)(S - S_k)$$

Тогда импульсная характеристика ЦФ равна:

$$h[n] = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k T n}.$$

Подставляя формулы $h(t)$ и $h[n]$ получим коэффициент передачи ЦФ:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}.$$



Учитывая, что умножение z-преобразование цифрового сигнала на z^{-1} эквивалентно задержке сигнала на период дискретизации T , получим схему реализации фильтра в виде N параллельно включенных цифровых звеньев первого порядка. Для доказательства устойчивости обратимся к формуле:

$$h[n] = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k T n}.$$

Поскольку $\text{Re}\{s_k\} < 0$, $k=1, N$, то экспоненциальные члены при увеличении n будут убывать. Следовательно, получающийся в результате использования метода инвариативности импульсной характеристики ЦФ будет устойчив.

Рассмотрим теперь вопрос о реализуемости данного метода.

Из теории цифровых фильтров известно, что для реализуемости необходимо, чтобы полюсы коэффициента передачи ЦФ лежали внутри круга единичного радиуса на плоскости переменной z . Из предыдущих расчетов следует, что коэффициент передачи $H(z)$ синтезируемого фильтра имеет N полюсов.

В силу того, что $\text{Re}\{s_k\} < 0, k = \overline{1, N}$ получаем $|z_k| = e^{\text{Re}[s_k]T} < 1, k = \overline{1, N}$

Следовательно, все полюсы фильтра лежат внутри круга единичного радиуса, и синтезируемый фильтр реализуем.

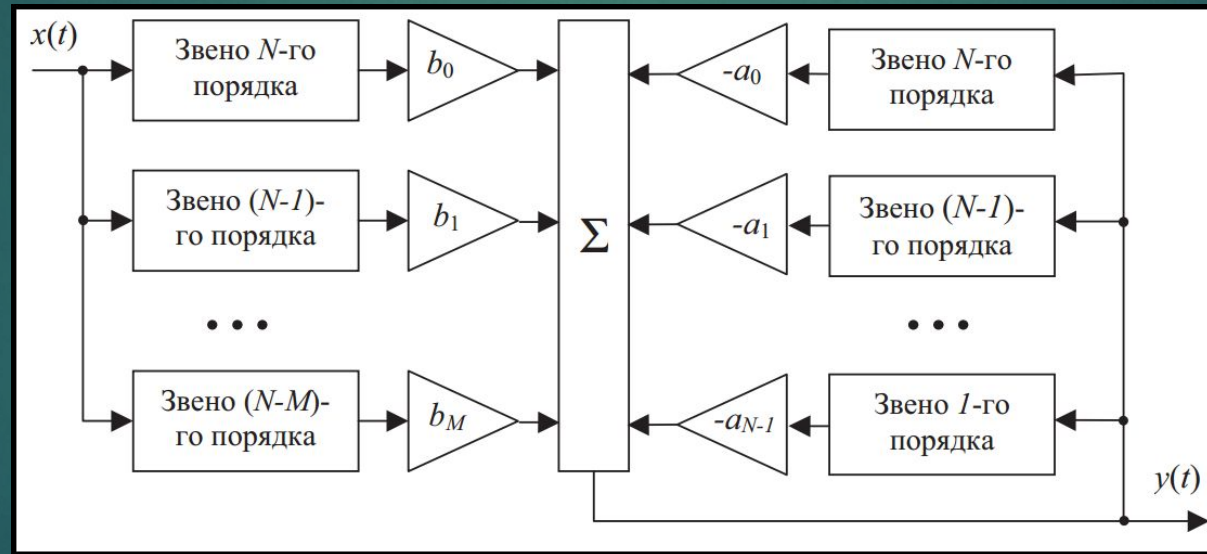
Рассмотренный метод не может быть использован, когда коэффициент передачи аналогового фильтра $H(s)$ не имеет полюсов ($N=0$) или число полюсов меньше, чем число нулей ($N < M$).

Метод билинейного преобразования

Пусть коэффициент передачи аналогового фильтра задан в виде:

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0},$$

Фильтр с коэффициентом передачи может быть реализован по схеме, представленной на данном рисунке:



Основным элементом структурной схемы является звено n -го порядка с коэффициентом передачи $H_n(s) = 1/s^n$. Которое представляет собой последовательное соединение n интеграторов.

Следовательно, базовым фильтром для реализации аналогового фильтра является интегратор – звено с коэффициентом передачи $H_1(S)=1/S$. Поэтому при цифровом моделировании фильтра за базовый элемент может быть взят цифровой аналог интегратора.

Пусть на вход интегрирующего звена подается процесс $f(t)$, тогда сигналы на выходе цифрового интегратора в моменты t_n и t_{n+1} связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$g[n+1] = g[n] + \frac{T}{2} \{ f[n] + f[n+1] \}.$$

Взяв Z-преобразование получим:

$$zG(z) = G(z) + \frac{T}{2} \{ F(z) + zF(z) \}.$$

Тогда коэффициент передачи цифрового интегратора равен:

$$H_1(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

Следовательно, переменной S в выражении для коэффициента передачи аналогового фильтра может быть поставлено в соответствие следующее выражение:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Преобразование в теории функций комплексной переменной называется билинейным. Отсюда следует и название метода. Особенность билинейного преобразования заключается в том, что левая полуплоскость переменной S отображается во внутренность окружности единичного радиуса в плоскости переменной z . Поэтому, если аналоговый фильтр с коэффициентом передачи $H(s)$ имел свои полюсы в левой полуплоскости переменной S , то эти полюсы преобразованием будут отображены во внутренность окружности единичного радиуса в плоскости переменной z . Следовательно, метод билинейного преобразования позволяет получить устойчивые и реализуемые цифровые фильтры, если этим свойством обладали их аналогичные прототипы.

Метод билинейного преобразования гарантирует хорошее совпадение частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров в диапазоне

$|\omega| \leq \pi/4T$. При $|\omega| > \pi/4T$, частотные характеристики фильтров, как правило, значительно различаются.