

Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей изучает закономерности появления повторяющихся в однородных условиях случайных событий, разрабатывает методы их математического моделирования с целью управления возникающими в результате ситуациями.

При решении задач теории вероятностей используются правила и формулы комбинаторики.

● Элементы комбинаторики.

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного конечного множества и расположения их в определённом порядке.

● Размещения. Перестановки.

Размещения — это выборки на множестве из n элементов по k ($k < n$) с учётом порядка. Число всех возможных размещений определяется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Например, на множестве из трёх букв $M = \{a, b, c\}$ возможны размещения по две буквы $\{a; b\}$, $\{b; a\}$, $\{a; c\}$, $\{c; a\}$, $\{b; c\}$, $\{c; b\}$,

а их количество равно $A_3^2 = 3 \cdot 2 = \frac{3!}{3-2!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad C_3^2 = 6$

Перестановками называются размещения из n

элементов по n

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \{0! = 1\} = \frac{n!}{1} = n! \quad \Rightarrow$$

Число перестановок на множестве из n элементов равно $P_n = n!$

Например, на множестве из трёх букв $M = \{a, b, c\}$ возможные перестановки $\{a; b; c\}$, $\{a; c; b\}$, $\{b; a; c\}$, $\{b; c; a\}$, $\{c; a; b\}$, $\{c; b; a\}$, а их количество равно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Сочетаниями из n элементов по k называются выборки на множестве

из n элементов по k ($k < n$) без учёта порядка. Число сочетаний на множестве из

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n элементов по k равно

Например, на множестве из трёх букв $M = \{a, b, c\}$ возможные сочетания по две буквы $\{a; b\} = \{b; a\}$, $\{a; c\} = \{c; a\}$, $\{b; c\} = \{c; b\}$,

а их количество равно

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{2! \cdot \cancel{3}}{2!} = 3 \quad \Rightarrow \quad \binom{3}{2} = 3$$

Случайные события и их классификация.

Методами теории вероятностей изучаются явления, которые могут происходить при воспроизведении одних и тех же условий (при *экспериментах, опытах, испытаниях*) и обладают свойством «статистической устойчивости».

Событием (случайным) называется всякий факт, который может либо произойти, либо нет в результате неоднократного проведения одного и того же опыта.

Примерами событий могут служить:

1. Попадание в цель при выстреле из орудия (опыт-стрельба, событие – попадание в цель).
2. Выпадение двух гербов при трёхкратном подбрасывании монеты (опыт - бросание монеты, событие - выпадение двух гербов).

События в теории вероятностей принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, \dots

Например, событие A –попадание в цель при выстреле, событие B – Принятие сигнала радиостанцией при наличии помех и т. д.

Достоверным называется событие, которое обязательно происходит в результате данного эксперимента.

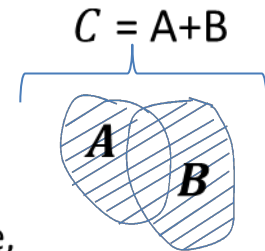
Например, замерзание воды при отрицательной температуре – достоверное событие

Невозможным называется событие которое не может произойти в результате данного эксперимента

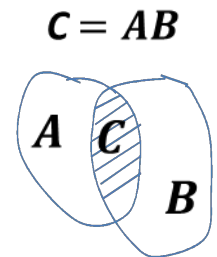
Например, загорание лампочки при отсутствии тока в электрической цепи – невозможное событие

Объединением $A \cup B$ (или суммой) событий **A** и **B** называется событие **C** , состоящее в том, что произошло либо **A** , либо **B** , либо оба события одновременно: **$C = A \cup B$ (или $C=A+B$)**

Например, если событие **A** есть попадание в цель при первом выстреле, событие **B** – попадание в цель при втором выстреле, то событие **$C=A+B$** есть попадание в цель вообще.



Пересечением $A \cap B$ (или произведением) событий **A** и **B** называется событие **C** , состоящее в том, что произошли оба события **A** и **B** одновременно: **$C = A \cap B$ (или $C = AB$)**.



Например, если событие **A** есть попадание в цель при первом выстреле, событие **B** – попадание в цель при втором выстреле, то событие **$C = A \cap B$** есть попадание в цель при обоих выстрелах.

Пространством элементарных событий называется множество Ω , содержащее все возможные исходы данного эксперимента, из которых в результате испытания может реализоваться только один исход.

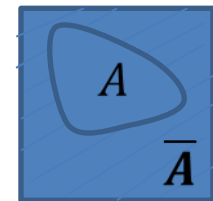
Например, при трех выстрелах по мишени количество возможных попаданий составляет пространство элементарных событий: $\Omega = \{A_0; A_1; A_2; A_3\}$, где события A_i , $i = \overline{0; 3}$ обозначают i попаданий в мишень.

Пространство элементарных событий образует так называемую **полную группу попарно несовместных событий**.

Для несовместных событий A и B выполняется $AB = \emptyset$ – пустое множество.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются **противоположными** и обозначаются A и \bar{A} .

Например, при одном выстреле по мишени попадание и промах – два противоположных события.



Справедливы соотношения $A\bar{A} = \emptyset$, $A + \bar{A} = \Omega$.

Последнее утверждение имеет место для любого числа событий: если $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, то события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу событий

Классическая вероятность

Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих появлению этого события исходов опыта m к числу всех возможных исходов n :

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 чёрных, 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны чёрный шар?

Решение. Здесь $m = 4$, $n = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. **Ответ:** $P(A) = \frac{1}{3}$.

Пример 2. В ящике 15 шаров, из которых 10 чёрных и 5 белых. Наугад вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых наугад шаров 2 окажутся белыми.

Решение. Общее число элементарных исходов данного опыта равно числу сочетаний

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, т. е. числу выборок из 15 по 6 без учёта порядка

$$n = C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6! \cdot 9!} = \frac{\cancel{9!} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cancel{9!}} = 5005.$$

Число благоприятных исходов определяется как количество выборок, каждая из которых содержит 6 шаров: 2 белых шара, взятых из 5 белых, и 4 чёрных шара, взятых из 10 чёрных без учёта порядка, т.е.

$$m = C_5^2 \cdot C_{10}^4 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{10!}{4!(10-4)!} = 2100. \text{ Искомая вероятность } P(A) = \frac{2100}{5005} = 0,42$$

Ответ: искомая вероятность составляет 42%

Статистическая и геометрическая вероятности

Статистической вероятностью события считают его относительную частоту $w(A) = \frac{m}{n}$: отношение числа опытов, в которых наблюдалось событие A , к общему количеству проведенных испытаний.

Геометрическое определение вероятности

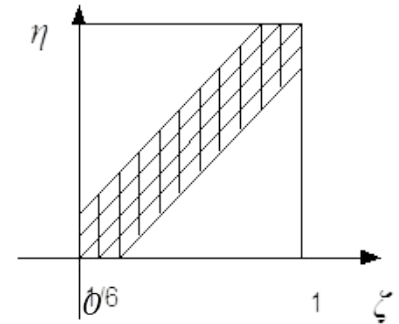
В качестве пространства элементарных событий рассмотрим произвольное множество Ω на прямой, на плоскости или в пространстве. Предположим, что «мера» Ω (длина, площадь, или объём соответственно) конечна. Пусть случайный эксперимент состоит в том, что мы наудачу бросаем в область Ω точку, а событие A - попадание точки в некоторую подобласть A области Ω . Термин «наудачу» означает, что вероятность попадания точки в любую часть A множества Ω не зависит от формы или расположения A внутри Ω , а зависит лишь от «меры» этих областей $|A|$ и $|\Omega|$. Вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Задача о

встрече
Два студента условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого?

Решение Пусть ξ и η — моменты прихода студентов. Изобразим ξ и η как декартовы координаты точек на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем 1 час. Все возможные результаты эксперимента изобразятся множеством точек квадрата со стороной 1, а благоприятствующие встрече, — точками заштрихованной области.



Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной области к площади квадрата:

$$P(A) = \frac{1 - (0,1)^2}{1} = \frac{11}{36} \approx 30,6\%.$$

Ответ: вероятность встречи составляет 30.6%

-
- ξ - «кси», η - «эта»

Основные аксиомы теории вероятностей

1. Если A – случайное событие, то $0 \leq P(A) \leq 1$.

2. Если Ω – достоверное событие, то $P(\Omega) = 1$.

3. Если \emptyset – невозможное событие, то $P(\emptyset) = 0$.

4. Если A и \bar{A} – противоположные события, то $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Замечание. При решении практических задач часто оказывается, что вероятность $P(A)$ легче вычислить через вероятность $P(\bar{A})$.

Пример. Из полного набора костей домино наудачу берут пять костей. Найти вероятность p того, что среди них будет хотя бы одна костяшка с шестёркой.

Решение. На костяшках домино 7 цифр:

$\{0; 0\}, \{0; 1\}, \dots, \{0; 6\}, \{1; 0\}, \{1; 1\}, \dots, \{1; 6\}, \dots, \{6; 0\}, \{6; 1\}, \dots, \{6; 6\}$. Всего костей в домино 28 ($C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$, и ещё 7 дублей). Среди них шестёрку содержат семь костей. Найдём вероятность q противоположного события.

Вероятность того, что все взятые пять костей не содержат шестёрки равна

$$q = \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = \frac{21!}{5! \cdot 16!} \cdot \frac{5! \cdot 23!}{28!} \approx 0.207. \quad \text{Тогда } p = 1 - q = 1 - 0.207 = 0.793$$

О т в е т: $p = 0.793 = 79.3\%$

- $C_n^k = \frac{n!}{k! (n - k)!}$

Условная вероятность. Правило умножения вероятностей

Вероятность наступления события A , вычисленная при условии, что событие B уже произошло, т. е. $P(B) \neq 0$, называется *условной вероятностью события A , при условии, что произошло событие B* , и обозначается $P(A/B)$.

- Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$, если соответствующие условные вероятности определены (то есть если $P(B) \neq 0, P(A) \neq 0$).

Пример. В ящике 15 шаров, из которых 5 белых и 10 чёрных. Из ящика последовательно вынимают два шара (первый шар в ящик не возвращается). Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется белым, а второй чёрным.

Решение. Обозначим через A событие «первым вынули белый шар», через B – «вторым вынули чёрный шар». Искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{5}{21}$$

Ответ: $P(AB) = \frac{5}{21}$

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Если события A_i попарно несовместны, то $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Пример. Дважды подбросим монету. Если учитывать порядок, то исходов получится 4, и все они - равно возможные события, то есть имеют вероятность по 1/4:

A_1 — (герб, герб), A_2 — (решка, решка), A_3 — (решка, герб), A_4 — (герб, решка).

Если порядок не учитывать, то следует объявить два последних исхода одним и тем же результатом эксперимента, и получить три исхода вместо четырех: выпало два герба, либо две решки, либо один герб и одна решка. При этом

первые два исхода имеют вероятность 1/4: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{4}$,

а последнее событие — $C = A_3 + A_4$ - имеет вероятность

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Практически часто удобно вычислять вероятность суммы событий через вероятности произведения противоположных событий по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_N) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_N}).$$

Пример. Из двух орудий производят (независимо) по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия составляет 0.8, для второго – 0.9. Требуется найти:

- а) вероятность только одного попадания в цель;
- б) вероятность хотя бы одного попадания в цель.

Р е ш е н и е.

а) Пусть событие А – попадание в цель из первого орудия, В – из второго. Тогда вероятность только одного попадания в цель равна $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0.8(1 - 0.9) + (1 - 0.8)0.9 = 0.08 + 0.18 = \boxed{0.26}$

б) Вероятность хотя бы одного попадания в цель равна $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.8 + 0.9 - 0.8 \cdot 0.9 = 1.7 - 0.72 = \boxed{0.98}$

* Последний результат рациональнее получить так:

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0.2 \cdot 0.1 = 1 - 0.02 = 0.98$$

Формула полной вероятности

Вероятность $P(A)$ появления события A , которое может произойти только совместно с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу несовместных событий (гипотез), определяется **формулой полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i), \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

Формула Бейеса

Условная вероятность того, что имело место событие H_i , если в результате эксперимента наблюдалось событие A , может быть вычислена по формуле:

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A/H_i)P(H_i)}, \quad i=1;2; \dots ;n.$$

Вероятности $P(H_i/A)$, вычисленные по формуле Бейеса, часто называют *вероятностями гипотез*.

Пример.

В ящике содержатся одинаковые изделия, изготовленные двумя автоматами: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные – вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго - 2%. Требуется найти:

- а) вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным;
- б) вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие – бракованное, а через H_i ($i = \overline{1,2}$) - событие, состоящее в том, что это изделие изготовлено соответственно i -тым автоматом. Тогда

- а) по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \\ &= 0,4 \cdot 0,03 + (1 - 0,4) \cdot 0,02 = \boxed{0,024} \end{aligned}$$

- б) по формуле Бейеса

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,03}{0,024} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Формула

Бернулли

Последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода — «успех» или «неудача», называется *схемой Бернулли*. Пусть при этом «успех» в одном испытании происходит с вероятностью $p \in [0,1]$, «неудача» — с вероятностью $q = 1 - p$.

Тогда вероятность $P_n(k)$ появления события k раз при n испытаниях определяется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

(*биномиальный закон распределения вероятностей*).

Вероятности $P_n(k)$ в последней формуле называются *биномиальными*.

Для них справедливо равенство $\sum_{k=0}^n P_n(k) = 1$.

Пример. Найти вероятность того, что при 10 бросаниях монеты «орёл» выпадет 5 раз.

Решение. Имеем $n=10, k=5, p=\frac{1}{2} \Rightarrow P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-5} =$

$$= \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{\cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 9}{4 \cdot 32 \cdot 8} = \boxed{\frac{63}{256}}$$

- $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Понятие случайной величины.

Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Случайная величина называется **непрерывной**, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Примеры дискретных случайных величин:

1. В партии из 3 изделий число дефектных деталей X может принимать значения $\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3\}$.
2. Число выстрелов X до первого попадания в цель может принимать бесконечное, но счётное множество значений $\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots\}$.

Примеры непрерывных случайных величин:

1. Случайное отклонение X по дальности точки падения снаряда от цели (так как снаряд может упасть в любую точку интервала, ограниченного пределами рассеяния снарядов, то все числа из этого интервала будут возможными значениями X)
2. Время безотказной работы радиолампы.

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Пусть X – дискретная случайная величина, принимающая значения x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n т.е. имеющая ряд - (закон) распределения, задаваемый таблицей

X				
P				

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им

вероятности: $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Задача. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$. Найти закон распределения величины X , если известно, что вероятность того, что X примет значение x_1 , равна $P_1 = 0.6$, а $M(X) = 1.4$; $D(X) = 0.24$.

Решение. Разобьём ход решения задачи на два этапа

1 этап.

Найдём вероятность p_2 того, что X примет значение x_2 .

Сумма вероятностей всех возможных значений X равна единице

$$\sum_{i=1}^2 p_i = 1,$$

Поэтому вероятность P_2 того, что X примет значение x_2 ,

равна $p_2 = 1 - 0.6 = 0.4$. Тогда закон распределения дискретной случайной

величины X можно представить в виде

X	x_1	x_2
P	0.6	0.4

2 этап. Найдём два возможных значения случайной величины X

1 шаг. Составим два уравнения.

а) Учитывая, что математическое ожидание дискретной случайной величины

подсчитывается по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$, получим

$$\sum_{i=1}^2 x_i P_i = 0.6x_1 + 0.4x_2 \quad \Rightarrow \quad 0.6x_1 + 0.4x_2 = 1.4,$$

б) Используя формулу $D(X) = \sum_{i=1}^2 (x_i - M(X))^2 \cdot P_i$, получим

$$(x_1 - 1.4)^2 \cdot 0.6 + (x_2 - 1.4)^2 \cdot 0.4 = 0.24$$

2 шаг. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 0.6x_1 + 0.4x_2 = 1.4, \\ (x_1 - 1.4)^2 \cdot 0.6 + (x_2 - 1.4)^2 \cdot 0.4 = 0.24. \end{cases}$$

найдем два решения: $x_1 = 1, x_2 = 2$ и $x_1 = 1.8, x_2 = 0.8$.

По условию $x_1 < x_2$, поэтому задаче удовлетворяет только первое решение.

О т в е т: искомый закон
распределения имеет вид:

X	1	2
P	0.6	0.4

Плотность распределения, математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x : $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения.

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$. 2) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.
- 3) $F(x)$ - неубывающая функция, то есть $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Функция $f(x)$, называемая **плотностью распределения** непрерывной случайной величины, определяется по формуле: $f(x) = F'(x)$.

Свойства функции плотности распределения.

- 1) $f(x) \geq 0$, так как функция распределения является неубывающей.
- 2) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$; 3) $P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt$; 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, так как $F(x) \rightarrow const$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)dx$$

Задача. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , заданной функцией распределения

Решение.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x/2 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдем плотность распределения вероятностей по формуле $f(x) = F'(x)$. \Rightarrow

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1/2 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидания величины по формуле $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

$$\Rightarrow M(X) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot x dx + \int_0^2 1/2 \cdot x dx + \int_2^{\infty} 0 \cdot x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 1 \quad \boxed{M(X) = 1.}$$

Дисперсию непрерывной случайной величины находим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x) dx$$

$$\Rightarrow D(X) = \int_0^2 (x-1)^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} (x-1)^3 \cdot \frac{1}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{6} [(2-1)^3 - (0-1)^3] = \frac{1}{3} \quad \boxed{D(X) = \frac{1}{3}}$$

Нормальный закон распределения

В природе существует фундаментальный закон, управляющий поведением абсолютного большинства случайных величин. Такой закон называется *нормальным распределением или законом Гаусса*.

Плотность вероятности нормально распределённой случайной величины определяется формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

где *среднее квадратическое отклонение* $\sigma = \sqrt{D(X)}$ является мерой рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания m . Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$ находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ обозначает *функцию Лапласа (интеграл вероятности или функция ошибок или erf x)*, для вычисления

значений которой пользуются специальной таблицей, приводимой в приложениях учебной и справочной литературы по теории вероятностей.

Задача. Известны математическое ожидание $m = 10$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma = 2$ нормально распределенной случайной величины X . Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал $(12, 14)$.

Решение. Подставим $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$ и $\sigma = 2$ в формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Получим $P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1)$ Значения $\Phi(2)$ и $\Phi(1)$ функции Лапласа находим по таблице, которая приводится в приложении учебников и справочников по теории вероятностей:

$$\Phi(2) = 0.4772; \quad \Phi(1) = 0.3413. \quad =>$$

$$P(12 < X < 14) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

О т в е т: $P(12 < X < 14) = 0.1359.$

