# Теория вероятностей и математическая статистика

Теоия вероятностей изучает закономерности появления повторяющихся в однородных условиях случайных событий, разрабатывает методы их математического моделирования с целью управления возникающими в результате ситуациями.

При решении задач теории вероятностей используются правила и формулы комбинаторики.

## • Элементы комбинаторики.

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного конечного множества и расположения их в определённом порядке.

## • Размещения. Перестановки. Сочетания

*Размещения* - это выборки на множестве из n элементов по *k* ( *k < n* ) с учётом порядка.

Число всех возможных размещений определяется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k-1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

*Например,* на множестве из трёх букв $M = \{a, b, c\}$ возможны размещения

по две буквы $\{a; b\}$, $\{b; a\}$, $\{a; c\}$, $\{c; a\}$, $\{b; c\}$, $\{c; b\}$,

а их количество равно $A_3^2 = 3 \cdot 2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6 \quad <=> \quad A_3^2 = 6$

**Перестановками** называются размещения из *n* элементов по *n*

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \{0! = 1\} = \frac{n!}{1} = n! \qquad =>$$

Число перестановок на множестве из n элементов равно $P_n = n!$

*Например,* на множестве из трёх букв $M = \{a, b, c\}$ возможные

перестановки $\{a; b; c\}$, $\{a; c; b\}$, $\{b; a; c\}$, $\{b; c; a\}$, $\{c; a; b\}$, $\{c; b; a\}$,

а их количество равно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

**Сочетаниями** из *n* элементов по *k* называются выборки на множестве
из n элементов по *k* ( *k* < *n* ) без учёта порядка.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Число сочетаний на множестве из *n* элементов по *k* равно

*Например,* на множестве из трёх букв $M = \{a, b, c\}$ возможные сочетания

по две буквы $\{a; b\} = \{b; a\}$,, $\{a; c\} = \{c; a\}$, $\{b; c\} = \{c; b\}$,

а их количество равно $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{\cancel{2!}\cdot 3}{\cancel{2!}} = 3 \quad => \quad C_3^2 = 3$

## Случайные события и их классификация.

Методами теории вероятностей изучаются явления, которые могут происходить при воспроизведении одних и тех же условий (при *экспериментах, опытах, испытаниях)* и обладают свойством «статистической устойчивости».

***Событием (случайным)*** называется всякий факт, который может либо произойти, либо нет в результате неоднократного проведения одного и того же опыта.

Примерами событий могут служить:

1. Попадание в цель при выстреле из орудия (опыт-стрельба, событие – попадание в цель).
2. Выпадение двух гербов при трёхкратном подбрасывании монеты (опыт - бросание монеты, событие - выпадение двух гербов).

События в теории вероятностей принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$..

Например, событие А –попадание в цель при выстреле, событие В – Принятие сигнала радиостанцией при наличии помех и т. д.

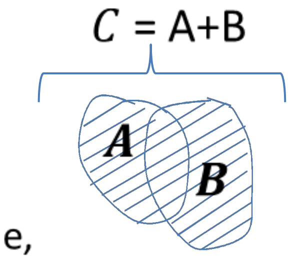
***Достоверным*** называется событие, которое обязательно происходит в результате данного эксперимента.

Например, замерзание воды при отрицательной температуре – достоверное событие

***Невозможным*** называется событие которое не может произойти в результате данного эксперимента

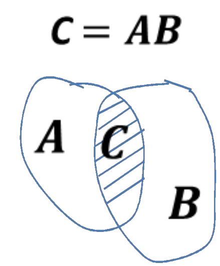
Например, загорание лампочки при отсутствии тока в электрической цепи- невозможное событие

***Объединением $A \cup B$ (или суммой) событий $A$ и $B$*** называется событие $C$, состоящее в том, что произошло либо $A$, либо $B$, либо оба события одновременно: $\boldsymbol{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ *(или* ***C=A+B)***




Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B – попадание в цель при втором выстреле, то событие C=A+B есть попадание в цель вообще.

***Пересечением $A \cap B$* (или произведением) событий *$A$* и *$B$*** называется событие $C$, состоящее в том, что произошли оба события $A$ и $B$ одновременно: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ (*или* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$).




Например, если событие $A$ есть попадание в цель при первом выстреле, событие $B$ – попадание в цель при втором выстреле, то событие $C = A\,B$ есть попадание в цель при обоих выстрелах.

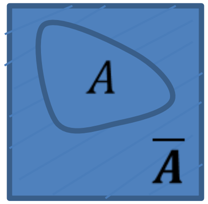
***Пространством элементарных событий*** называется множество $\Omega$, содержащее все возможные исходы данного эксперимента, из которых в результате испытания может реализоваться только один исход.

*Например,* при трех выстрелах по мишени количество возможных попаданий составляет пространство элементарных событий: $\Omega = \{A_0; A_1; A_2; A_3\}$, где события $A_i$, $i = \overline{0; 3}$ обозначают $i$ попаданий в мишень.

Пространство элементарных событий образует так называемую ***полную группу попарно несовместных событий.***

Для несовместных событий $A$ и $B$ выполняется $AB = \emptyset$ $-$ пустое множество.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются ***противоположными*** и обозначаются $\boldsymbol{A}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}$.




*Например,* при одном выстреле по мишени попадание и промах – два противоположных события.

Справедливы соотношения $\boldsymbol{A\overline{A}} = \emptyset$, $\boldsymbol{A} + \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\Omega}$.

Последнее утверждение имеет место для любого числа событий:
если $A_I A_J = \emptyset$, $i \neq j$, $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$, то события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий

# Классическая вероятность

**Вероятностью** события $A$ называется отношение числа $m$ благоприятствующих появлению этого события исходов опыта m к числу всех возможных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

**Пример 1.** В урне 12 шаров: 3 белых, 4 чёрных, 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны чёрный шар?

Р е ш е н и е. Здесь m = 4, n = 12 => P(A) = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

О т в е т: $P(A) = \frac{1}{3}$.

**Пример 2.** В ящике 15 шаров, из которых 10 чёрных и 5 белых . Наугад вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых наугад шаров 2 окажутся белыми.

Р е ш е н и е. Общее число элементарных исходов данного опыта равно числу сочетаний

$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, т. е. числу выборок из 15 по 6 без учёта порядка

$$n = C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!\cdot 9!} = \frac{\cancel{9!}\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \cancel{9!}} = 5005.$$

Число благоприятных исходов определяется как количество выборок, каждая из которых содержит 6 шаров: 2 белых шара, взятых из 10 белых, и 4 чёрных шара, взятых из 10 чёрных без учёта порядка, т.е.

$m = C_5^2 \cdot C_{10}^4 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}\cdot\frac{10!}{4!(10-4)!} = 2100.$ Искомая вероятность $P(A) = \frac{2100}{5005} = 0{,}42$

О т в е т: искомая вероятность составляет 42%

# Статистическая и геометрическая вероятности

**Статистической вероятностью** события считают его относительную частоту $w(A) = \dfrac{m}{n}$: отношение числа опытов, в которых наблюдалось событие А, к общему количеству проведенных испытаний.

**Геометрическое определение вероятности**

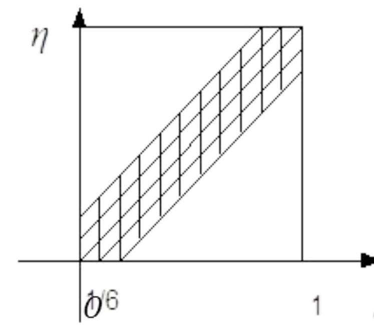
В качестве пространства элементарных событий рассмотрим произвольное множество $\Omega$ на прямой, на плоскости или в пространстве. Предположим, что «мера» $\Omega$ (длина, площадь, или объём соответственно) конечна. Пусть случайный эксперимент состоит в том, что мы наудачу бросаем в область $\Omega$ точку, а событие $A$ - попадание точки в некоторую подобласть $A$ области $\Omega$. Термин «наудачу» означает, что вероятность попадания точки в любую часть $A$ множества $\Omega$ не зависит от формы или расположения $A$ внутри $\Omega$, а зависит лишь от «меры» этих областей $|A|$ и $|\Omega|$. Вероятность события $A$ определяется формулой

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

## Задача о встрече

Два студента условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого?

Р е ш н и е: Пусть $\xi$ и $\eta$ — моменты прихода студентов. Изобразим $\xi$ и $\eta$ как декартовы координаты точек на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем 1 час. Все возможные результаты эксперимента изобразятся множеством точек квадрата со стороной 1,а исходы, благоприятствующие встрече, - точками заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной области к площади квадрата:




$$P(A) = \frac{1-(5/6)^2}{1} = \frac{11}{36} \approx 30{,}6\%.$$

О т в е т: вероятность встречи составляет 30.6%

---

- $\xi$ - «кси», $\eta$ - «эта»

# Основные аксиомы теории вероятностей

*1. Если A – случайное событие, то* $0 \le P(A) \le 1$.

*2. Если* $\Omega$ *– достоверное событие, то* $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$.

*3. Если* $\emptyset$ *– невозможное событие, то* $\boldsymbol{P(\varnothing) = 0}$.

*4. Если* $A$ и $\overline{A}$ *– противоположные события, то* $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

*Замечание.* При решении практических задач часто оказывается, что вероятность $P(A)$ легче вычислить через вероятность $P(\overline{A})$.

**Пример.** Из полного набора костей домино наудачу берут пять костей . Найти вероятность *p* того, что среди них будет хотя бы одна костяшка с шестёркой.

Р е ш е н и е. На костяшках домино 7 цифр:

$\{0;0\},\{0;1\},\dots,\{0;6\},\{1;0\},\{1;1\},\dots,\{1;6\},\dots,\{6;0\},\{6;1\},\dots,\{6;6\}$. Всего костей в домино 28 $\left(C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21, \text{и ещё 7 дублей}\right)$. Среди них шестёрку содержат семь костей. Найдём вероятность *q* противоположного события. Вероятность того, что все взятые пять костей не содержат шестёрки равна

$$q = \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = \frac{21!}{5!\cdot 16!}\cdot\frac{5!\cdot 23!}{28!} \approx 0.207.$$

Тогда p = 1- q = 1-0.207=0.793

О т в е т: $\mathrm{p} = 0.793 = 79.3\%$

---

- $$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

# Условная вероятность. Правило умножения вероятностей

Вероятность наступления события $A$, вычисленная при условии, что событие $B$ уже произошло, т. е. $P(B) \neq 0$, называется *условной вероятностью события A, при условии, что произошло событие B*, и обозначается $P(A/B)$ .

- *Вероятность произведения двух событий равна* произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого

$P(AB) = P(B) \cdot (A\backslash B) = P(A) \cdot P(B\backslash A)$, если соответствующие условные вероятности определены (то есть если $P(B) \neq 0$, $P(A) \neq 0$).

**Пример.** В ящике 15 шаров, из которых 5 белых и 10 чёрных. Из ящика последовательно вынимают два шара (первый шар в ящик не возвращается). Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется белым, а второй чёрным.

Р е ш е н и е. Обозначим через $A$ событие «первым вынули белый шар», через $B$ – «вторым вынули чёрный шар». Искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{5}{21}$$

О т в е т: $P(AB) = \frac{5}{21}$

# Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Если события $A_i$ попарно несовместны, то $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

**Пример**. Дважды подбросим монету. Если учитывать порядок, то исходов получится 4, и все они - равно возможные события, то есть имеют вероятность по 1/4:

$A_1$ –(герб, герб), $A_2$ –(решка, решка), $A_3$ –(решка, герб), $A_4$ – (герб, решка).

Если порядок не учитывать, то следует объявить два последних исхода одним и тем же результатом эксперимента, и получить три исхода вместо четырех: выпало два герба, либо две решки, либо один герб и одна решка. При этом первые два исхода имеют вероятность 1/4: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{4}$,
а последнее событие — С= $A_3 + A_4$ - имеет вероятность

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

*Замечание.* Практически часто удобно вычислять вероятность суммы событий через вероятности произведения противоположных событий по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_N) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ \ldots \cdot \overline{A_N}) .$$

**Пример**. Из двух орудий производят (независимо) по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия составляет 0.8, для второго – 0.9. Требуется найти:

а) вероятность только одного попадания в цель;

б) вероятность хотя бы одного попадания в цель.

Р е ш е н и е.

а) Пусть событие А – попадание в цель из первого орудия, В – из второго. Тогда вероятность только одного попадания в цель равна $P\left(A\overline{B} + \overline{A}B\right) = P\left(A\overline{B}\right) + P(\overline{A}B)$=

=P(A)P($\overline{B}$)+P($\overline{A}$)$P(B) = 0.8(1-0.9) + (1-0.8)0.9 = 0.08 + 0.18 = \boxed{0.26}$

б) Вероятность хотя бы одного попадания в цель равна

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)= 0.8+0.9-0.8$\cdot$ $0.9 = 1.7 - 0.72 = \boxed{0.98}$

* Последний результат рациональнее получить так:

P(A+B)=1 – P($\overline{A} \cdot \overline{B}$) $= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0.2 \cdot 0.1 = 1 - 0.02 = 0.98$

## Формула полной вероятности

Вероятность *P(A)* появления события *A*, которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий (гипотез), определяется ***формулой полной вероятности***

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i), \qquad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$$

## Формула Бейеса

Условная вероятность того, что имело место событие $H_i$, если в результате эксперимента наблюдалось событие *A*, может быть вычислена по формуле:

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)}, \qquad i=1;2; \dots ;n.$$

Вероятности $P(H_i/A)$, вычисленные по формуле Бейеса, часто называют *вероятностями гипотез.*

**Пример**.

В ящике содержатся одинаковые изделия, изготовленные двумя автоматами: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные – вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго - 2%. Требуется найти:

а) вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным;

б) вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Р е ш е н и е. Обозначим через $A$ событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие – бракованное, а через $H_i$ $(i = \overline{1,2})$ - событие, состоящее в том, что это изделие изготовлено соответственно $i$ - тым автоматом. Тогда

а) по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) =$$

$$=0{,}4 \cdot 0{,}03 + (1 - 0{,}4) \cdot 0{,}02 = \boxed{0{,}024}$$

б)по формуле Бейеса

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}03}{0{,}024} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

# Формула Бернулли

Последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода — «успех» или «неудача», называется *схемой Бернулли.* Пусть при этом «успех» в одном испытании происходит с вероятностью $p \in [0,1]$, «неудача» — с вероятностью $q = 1 - p$.

Тогда вероятность $P_n(k)$ появления события $k$ раз при $n$ испытаниях определяется по *формуле Бернулли* $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

*( биномиальный закон распределения вероятностей).*

Вероятности $P_n(k)$ в последней формуле называются *биномиальными.*

Для них справедливо равенство $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$

**Пример.** Найти вероятность того, что при 10 бросаниях монеты «орёл» выпадет 5 раз.

Р е ш е н и е. Имеем n=10, k=5, p=$\frac{1}{2}$ $=> P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-5} =$

$$= \frac{10!}{5!\cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{\cancel{6}\cdot 7\cdot \overset{4}{\cancel{8}}\cdot 9\cdot \cancel{10}}{\cancel{2\cdot 3}\cdot \cancel{4\cdot 5}1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{7\cdot \cancel{4}\cdot 9}{\cancel{4}\cdot 32\cdot 8} = \boxed{\frac{63}{256}}$$

- $$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

# Понятие случайной величины.

Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Случайная величина называется **непрерывной**, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

*Примеры дискретных случайных величин*:

1. В партии из 3 изделий число дефектных деталей $X$ может принимать значения $\{x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ \ x_4 = 3\}$.
2. Число выстрелов $X$ до первого попадания в цель может принимать бесконечное, но счётное множество значений $\{x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2, \dots\}$.

*Примеры непрерывных случайных величин*:

1. Случайное отклонение $X$ по дальности точки падения снаряда от цели (так как снаряд может упасть в любую точку интервала, ограниченного пределами рассеяния снарядов, то все числа из этого интервала будут возможными значениями $X$)
2. Время безотказной работы радиолампы.

## Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Пусть $X$ — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ т.е. имеющая ряд - (закон) распределения, задаваемый таблицей

| X | | | | |
|---|---|---|---|---|
| P | | | | |

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

**Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ .

**Дисперсией (рассеянием)** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$D(X) = M(X - M(X))^2$ .

**Задача.** Дискретная случайная величина $X$ имеет только два возможных значения: $x_1$ и $x_2$, причем $x_1 < x_2$ . Найти закон распределения величины $X$, если известно, что вероятность того, что $X$ примет значение $x_1$, равна $P_1 = 0.6$ , а $M(X) = 1.4$; $D(X) = 0.24$.

Р е ш е н и е. Разобьём ход решения задачи на два этапа

**1этап.**

Найдём вероятность $p_2$ того, что $X$ примет значение $x_2$.

Сумма вероятностей всех возможных значений $X$ равна единице $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1,$

Поэтому вероятность $P_2$ того, что $X$ примет значение $x_2$,

равна $p_2 = 1 - 0.6 = 0.4$. Тогда закон распределения дискретной случайной величины $X$ можно представить в виде

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $P$ | $0.6$ | $0.4$ |

**2этап.** Найдём два возможных значения случайной величины $X$

***1 шаг.*** Составим два уравнения.

а) Учитывая, что математическое ожидание дискретной случайной величины

подсчитывается по формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, получим

$$\sum_{i=1}^{2} x_i P_i = 0.6x_1 + 0.4x_2 \quad => \quad 0.6x_1 + 0.4x_2 = 1.4,$$

б) Используя формулу $D(X)=\sum_{i=1}^{2}(x_i - M(X))^2 \cdot P_i$, получим

$$(x_1 - 1.4)^2\, 0.6 + (x_2 - 1.4)^2\, 0.4 = 0.24$$

***2 шаг.*** Решив систему уравнений $\begin{cases} 0.6x_1 + 0.4x_2 = 1.4, \\ (x_1 - 1.4)^2\, 0.6 + (x_2 - 1.4)^2\, 0.4 = 0.24. \end{cases}$

найдем два решения: $x_1 = 1, x_2 = 2$ и $x_1 = 1.8, x_2 = 0.8$.

По условию $x_1 < x_2$, поэтому задаче удовлетворяет только первое решение.

О т в е т: искомый закон распределения имеет вид:

| $X$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $P$ | $0.6$ | $0.4$ |

## Плотность распределения, математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

**Функцией распределения $F(x)$** случайной величины $X$ называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее $x$: $F(x) = p(X < x)$.

*Свойства функции распределения.*

1) $0 \le F(x) \le 1$. 2) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

3) $F(x)$ - неубывающая функция, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Функция $f(x)$, называемая **плотностью распределения** непрерывной случайной величины, определяется по формуле: $f(x) = F'(x)$.

*Свойства функции плотности распределения.*

1) $f(x) \ge 0$, так как функция распределения является неубывающей.

2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$; 3) $p(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, так как $F(x) \to const$ при $x \to \pm\infty$.

**Математическое ожидание** непрерывной случайной величины $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

**Дисперсия** непрерывной случайной величины $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)dx$

**Задача.** Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ x/2 & при \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Найдем *плотность распределения вероятностей* по формуле $f(x)=F'(x)$. $=>$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ 1/2 & при \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & при \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидания величины по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$=> \quad M(X)=\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot xdx + \int_{0}^{2} 1/2 \cdot xdx + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot xdx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 1 \qquad \boxed{M(X)=1.}$$

Дисперсию непрерывной случайной величины находим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)]^2 \cdot f(x)dx$$

$$=> \quad D(X)=\int_{0}^{2} (x-1)^2 \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(x-1)^3 \cdot \frac{1}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6}\left[(2-1)^3-(0-1)^3\right] = \frac{1}{3} \qquad \boxed{D(X)=\frac{1}{3}}$$

## Нормальный закон распределения

В природе существует фундаментальный закон, управляющий поведением абсолютного большинства случайных величин. Такой закон называется *нормальным распределением или законом Гаусса.*

Плотность вероятности нормально распределённой случайной величины определяется формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

где *среднее квадратическое отклонение* $\sigma = \sqrt{D(X)}$ является мерой рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания m. Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α; β) находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

обозначает *функцию Лапласа (интеграл вероятности или функция ошибок или erf x)*, для вычисления значений которой пользуются специальной таблицей, приводимой в приложениях учебной и справочной литературы по теории вероятностей.

**Задача.** Известны математическое ожидание m= 10 и среднее квадратичное отклонение $\sigma = 2$ нормально распределенной случайной величины *X*. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (12,14).

Р е ш е н и е. Подставим $\alpha = 12, \beta = 14, a = 10$ и $\sigma = 2$ в формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Получим $P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1)$ Значения $\Phi(2)$ и $\Phi(1)$ функции Лапласа находим по таблице, которая приводится в приложении учебников и справочников по теории вероятностей:

$\Phi(2) = 0.4772$; $\Phi(1) = 0.3413$. =>

$$P(12 < X < 14) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

О т в е т: $P(12 < X < 14) = 0.1359$.