

# Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей изучает закономерности появления повторяющихся в однородных условиях случайных событий, разрабатывает методы их математического моделирования с целью управления возникающими в результате ситуациями.

При решении задач теории вероятностей используются правила и формулы комбинаторики.

## ● Элементы комбинаторики.

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного конечного множества и расположения их в определённом порядке.

### ● Размещения. Перестановки.

**Размещения** — это выборки на множестве из  $n$  элементов по  $k$  ( $k < n$ ) с учётом порядка. Число всех возможных размещений определяется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Например, на множестве из трёх букв  $M = \{a, b, c\}$  возможны размещения по две буквы  $\{a; b\}$ ,  $\{b; a\}$ ,  $\{a; c\}$ ,  $\{c; a\}$ ,  $\{b; c\}$ ,  $\{c; b\}$ ,

а их количество равно  $A_3^2 = 3 \cdot 2 = \frac{3!}{3-2!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{2}{\underset{3}{\mathbb{A}}} = 6$

**Перестановками** называются размещения из  $n$

элементов по  $n$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \{0! = 1\} = \frac{n!}{1} = n! \quad \Rightarrow$$

Число перестановок на множестве из  $n$  элементов равно  $P_n = n!$

*Например*, на множестве из трёх букв  $M = \{a, b, c\}$  возможные перестановки  $\{a; b; c\}$ ,  $\{a; c; b\}$ ,  $\{b; a; c\}$ ,  $\{b; c; a\}$ ,  $\{c; a; b\}$ ,  $\{c; b; a\}$ , а их количество равно  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

**Сочетаниями** из  $n$  элементов по  $k$  называются выборки на множестве

из  $n$  элементов по  $k$  ( $k < n$ ) без учёта порядка.  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Число сочетаний на множестве из

$n$  элементов по  $k$  равно

*Например*, на множестве из трёх букв  $M = \{a, b, c\}$  возможные сочетания по две буквы  $\{a; b\} = \{b; a\}$ ,  $\{a; c\} = \{c; a\}$ ,  $\{b; c\} = \{c; b\}$ ,

а их количество равно  $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{2! \cancel{3}}{2!} = 3 \quad \Rightarrow \quad C_3^2 = 3$

## Случайные события и их классификация.

Методами теории вероятностей изучаются явления, которые могут происходить при воспроизведении одних и тех же условий (при *экспериментах, опытах, испытаниях*) и обладают свойством «статистической устойчивости».

**Событием (случайным)** называется всякий факт, который может либо произойти, либо нет в результате неоднократного проведения одного и того же опыта.

Примерами событий могут служить:

1. Попадание в цель при выстреле из орудия (опыт-стрельба, событие – попадание в цель).
2. Выпадение двух гербов при трёхкратном подбрасывании монеты (опыт - бросание монеты, событие - выпадение двух гербов).

События в теории вероятностей принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита  $A, B, C, \dots$

Например, событие  $A$  –попадание в цель при выстреле, событие  $B$  – Принятие сигнала радиостанцией при наличии помех и т. д.

**Достоверным** называется событие, которое обязательно происходит в результате данного эксперимента.

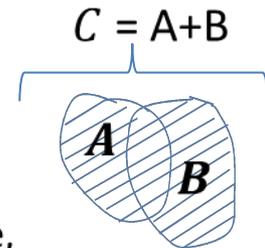
Например, замерзание воды при отрицательной температуре – достоверное событие

**Невозможным** называется событие которое не может произойти в результате данного эксперимента

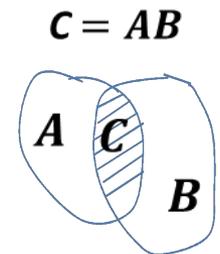
Например, загорание лампочки при отсутствии тока в электрической цепи – невозможное событие

**Объединением  $A \cup B$  (или суммой) событий  $A$  и  $B$**  называется событие  $C$ , состоящее в том, что произошло либо  $A$ , либо  $B$ , либо оба события одновременно:  $C = A \cup B$  (или  $C = A + B$ )

Например, если событие  $A$  есть попадание в цель при первом выстреле, событие  $B$  – попадание в цель при втором выстреле, то событие  $C = A + B$  есть попадание в цель вообще.



**Пересечением  $A \cap B$  (или произведением) событий  $A$  и  $B$**  называется событие  $C$ , состоящее в том, что произошли оба события  $A$  и  $B$  одновременно:  $C = A \cap B$  (или  $C = AB$ ).



Например, если событие  $A$  есть попадание в цель при первом выстреле, событие  $B$  – попадание в цель при втором выстреле, то событие  $C = A B$  есть попадание в цель при обоих выстрелах.

**Пространством элементарных событий** называется множество  $\Omega$ , содержащее все возможные исходы данного эксперимента, из которых в результате испытания может реализоваться только один исход.

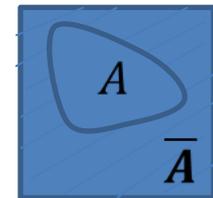
Например, при трех выстрелах по мишени количество возможных попаданий составляет пространство элементарных событий:  $\Omega = \{A_0; A_1; A_2; A_3\}$ , где события  $A_i$ ,  $i = \overline{0; 3}$  обозначают  $i$  попаданий в мишень.

Пространство элементарных событий образует так называемую **полную группу попарно несовместных событий**.

Для несовместных событий  $A$  и  $B$  выполняется  $AB = \emptyset$  – пустое множество.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются **противоположными** и обозначаются  $A$  и  $\bar{A}$ .

Например, при одном выстреле по мишени попадание и промах – два противоположных события.



Справедливы соотношения  $A\bar{A} = \emptyset$ ,  $A + \bar{A} = \Omega$ .

Последнее утверждение имеет место для любого числа событий: если  $A_i A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ , то события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют полную группу событий

# Классическая вероятность

**Вероятностью** события  $A$  называется отношение числа  $m$  благоприятствующих появлению этого события исходов опыта  $m$  к числу всех возможных исходов  $n$ :

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

**Пример 1.** В урне 12 шаров: 3 белых, 4 чёрных, 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны чёрный шар?

Р е ш е н и е. Здесь  $m = 4$ ,  $n = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ . О т в е т:  $P(A) = \frac{1}{3}$ .

**Пример 2.** В ящике 15 шаров, из которых 10 чёрных и 5 белых. Наугад вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых наугад шаров 2 окажутся белыми.

Р е ш е н и е. Общее число элементарных исходов данного опыта равно числу сочетаний

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , т. е. числу выборок из 15 по 6 без учёта порядка

$$n = C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6! \cdot 9!} = \frac{\cancel{9} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cancel{9}} = 5005.$$

Число благоприятных исходов определяется как количество выборок, каждая из которых содержит 6 шаров: 2 белых шара, взятых из 5 белых, и 4 чёрных шара, взятых из 10 чёрных без учёта порядка, т.е.

$$m = C_5^2 \cdot C_{10}^4 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{10!}{4!(10-4)!} = 2100. \text{ Искомая вероятность } P(A) = \frac{2100}{5005} = 0,42$$

О т в е т: искомая вероятность составляет 42%

# Статистическая и геометрическая вероятности

Статистической вероятностью события считают его относительную частоту  $w(A) = \frac{m}{n}$ : отношение числа опытов, в которых наблюдалось событие  $A$ , к общему количеству проведенных испытаний.

## Геометрическое определение вероятности

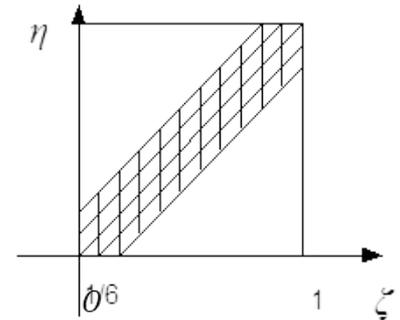
В качестве пространства элементарных событий рассмотрим произвольное множество  $\Omega$  на прямой, на плоскости или в пространстве. Предположим, что «мера»  $\Omega$  (длина, площадь, или объём соответственно) конечна. Пусть случайный эксперимент состоит в том, что мы наудачу бросаем в область  $\Omega$  точку, а событие  $A$  - попадание точки в некоторую подобласть  $A$  области  $\Omega$ . Термин «наудачу» означает, что вероятность попадания точки в любую часть  $A$  множества  $\Omega$  не зависит от формы или расположения  $A$  внутри  $\Omega$ , а зависит лишь от «меры» этих областей  $|A|$  и  $|\Omega|$ . Вероятность события  $A$  определяется формулой

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

## Задача о

встрече  
Два студента условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого?

Решение Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — моменты прихода студентов. Изобразим  $\xi$  и  $\eta$  как декартовы координаты точек на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем 1 час. Все возможные результаты эксперимента изобразятся множеством точек квадрата со стороной 1, а благоприятствующие встрече, — точками заштрихованной области.



Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной области к площади квадрата:

$$P(A) = \frac{11}{36} \approx 30,6\%.$$

Ответ: вероятность встречи составляет 30.6%

- 
- $\xi$  - «кси»,  $\eta$  - «эта»

# Основные аксиомы теории вероятностей

1. Если  $A$  – случайное событие, то  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

2. Если  $\Omega$  – достоверное событие, то  $P(\Omega) = 1$ .

3. Если  $\emptyset$  – невозможное событие, то  $P(\emptyset) = 0$ .

4. Если  $A$  и  $\bar{A}$  – противоположные события, то  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

*Замечание.* При решении практических задач часто оказывается, что вероятность  $P(A)$  легче вычислить через вероятность  $P(\bar{A})$ .

**Пример.** Из полного набора костей домино наудачу берут пять костей. Найти вероятность  $p$  того, что среди них будет хотя бы одна костяшка с шестёркой.

**Решение.** На костяшках домино 7 цифр:

$\{0; 0\}, \{0; 1\}, \dots, \{0; 6\}, \{1; 0\}, \{1; 1\}, \dots, \{1; 6\}, \dots, \{6; 0\}, \{6; 1\}, \dots, \{6; 6\}$ . Всего костей в

домино 28 ( $C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ , и ещё 7 дублей). Среди них шестёрку

содержат семь костей. Найдём вероятность  $q$  противоположного события.

Вероятность того, что все взятые пять костей не содержат шестёрки равна

$$q = \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = \frac{21!}{5! \cdot 16!} \cdot \frac{5! \cdot 23!}{28!} \approx 0.207.$$

Тогда  $p = 1 - q =$   
 $1 - 0.207 = 0.793$

О т в е т:  $p = 0.793 = 79.3\%$

---

•  $C_n^k = \frac{n!}{k! (n - k)!}$

## Условная вероятность. Правило умножения вероятностей

Вероятность наступления события  $A$ , вычисленная при условии, что событие  $B$  уже произошло, т. е.  $P(B) \neq 0$ , называется *условной вероятностью события  $A$ , при условии, что произошло событие  $B$* , и обозначается  $P(A/B)$ .

• Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого  $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$ , если соответствующие условные вероятности определены (то есть если  $P(B) \neq 0, P(A) \neq 0$ ).

**Пример.** В ящике 15 шаров, из которых 5 белых и 10 чёрных. Из ящика последовательно вынимают два шара (первый шар в ящик не возвращается). Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется белым, а второй чёрным.

**Решение.** Обозначим через  $A$  событие «первым вынули белый шар», через  $B$  – «вторым вынули чёрный шар». Искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{5}{21}$$

Ответ:  $P(AB) = \frac{5}{21}$

# Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Если события  $A_i$  попарно несовместны, то  $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

**Пример.** Дважды подбросим монету. Если учитывать порядок, то исходов получится 4, и все они - равно возможные события, то есть имеют вероятность по 1/4:

$A_1$  — (герб, герб),  $A_2$  — (решка, решка),  $A_3$  — (решка, герб),  $A_4$  — (герб, решка).

Если порядок не учитывать, то следует объявить два последних исхода одним и тем же результатом эксперимента, и получить три исхода вместо четырех: выпало два герба, либо две решки, либо один герб и одна решка. При этом

первые два исхода имеют вероятность 1/4:  $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{4}$ ,

а последнее событие —  $C = A_3 + A_4$  - имеет вероятность

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

**Замечание.** Практически часто удобно вычислять вероятность суммы событий через вероятности произведения противоположных событий по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_N) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_N}).$$

**Пример.** Из двух орудий производят (независимо) по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия составляет 0.8, для второго – 0.9.

Требуется найти:

- а) вероятность только одного попадания в цель;
- б) вероятность хотя бы одного попадания в цель.

Р е ш е н и е.

а) Пусть событие А – попадание в цель из первого орудия, В – из второго. Тогда вероятность только одного попадания в цель равна  $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0.8(1 - 0.9) + (1 - 0.8)0.9 = 0.08 + 0.18 = \boxed{0.26}$

б) Вероятность хотя бы одного попадания в цель равна  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.8 + 0.9 - 0.8 \cdot 0.9 = 1.7 - 0.72 = \boxed{0.98}$

\* Последний результат рациональнее получить так:

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0.2 \cdot 0.1 = 1 - 0.02 = 0.98$$

## Формула полной вероятности

Вероятность  $P(A)$  появления события  $A$ , которое может произойти только совместно с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу несовместных событий (гипотез), определяется **формулой полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i), \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

### Формула Бейеса

Условная вероятность того, что имело место событие  $H_i$ , если в результате эксперимента наблюдалось событие  $A$ , может быть вычислена по формуле:

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A/H_i)P(H_i)}, \quad i=1;2; \dots ;n.$$

Вероятности  $P(H_i/A)$ , вычисленные по формуле Бейеса, часто называют *вероятностями гипотез*.

## Пример.

В ящике содержатся одинаковые изделия, изготовленные двумя автоматами: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные – вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго - 2%. Требуется найти:

- а) вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным;
- б) вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Р е ш е н и е. Обозначим через  $A$  событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие – бракованное, а через  $H_i$  ( $i = \overline{1,2}$ ) - событие, состоящее в том, что это изделие изготовлено соответственно  $i$ -тым автоматом. Тогда

- а) по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \\ &= 0,4 \cdot 0,03 + (1 - 0,4) \cdot 0,02 = \boxed{0,024} \end{aligned}$$

- б) по формуле Бейеса

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,03}{0,024} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

## Формула

## Бернулли

Последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода — «успех» или «неудача», называется *схемой Бернулли*. Пусть при этом «успех» в одном испытании происходит с вероятностью  $p \in [0,1]$ , «неудача» — с вероятностью  $q = 1 - p$ .

Тогда вероятность  $P_n(k)$  появления события  $k$  раз при  $n$  испытаниях определяется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

(*биномиальный закон распределения вероятностей*).

Вероятности  $P_n(k)$  в последней формуле называются *биномиальными*.

Для них справедливо равенство  $\sum_{k=0}^n P_n(k) = 1$ .

**Пример.** Найти вероятность того, что при 10 бросаниях монеты «орёл» выпадет 5 раз.

Решение. Имеем  $n=10, k=5, p=\frac{1}{2} \Rightarrow P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-5} =$

$$= \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{\cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 9}{4 \cdot 32 \cdot 8} = \boxed{\frac{63}{256}}$$

---

- $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

## Понятие случайной величины.

Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Случайная величина называется **непрерывной**, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

*Примеры дискретных случайных величин:*

1. В партии из 3 изделий число дефектных деталей  $X$  может принимать значения  $\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3\}$ .
2. Число выстрелов  $X$  до первого попадания в цель может принимать бесконечное, но счётное множество значений  $\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots\}$ .

*Примеры непрерывных случайных величин:*

1. Случайное отклонение  $X$  по дальности точки падения снаряда от цели (так как снаряд может упасть в любую точку интервала, ограниченного пределами рассеяния снарядов, то все числа из этого интервала будут возможными значениями  $X$ )
2. Время безотказной работы радиолампы.

## Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Пусть  $X$  – дискретная случайная величина, принимающая значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$  т.е. имеющая ряд - (закон) распределения, задаваемый таблицей

X				
P				

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

**Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им

вероятности:  $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ .

**Дисперсией (рассеянием)** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

**Задача.** Дискретная случайная величина  $X$  имеет только два возможных значения:  $x_1$  и  $x_2$ , причем  $x_1 < x_2$ . Найти закон распределения величины  $X$ , если известно, что вероятность того, что  $X$  примет значение  $x_1$ , равна  $P_1 = 0.6$ , а  $M(X) = 1.4$ ;  $D(X) = 0.24$ .

**Решение.** Разобьём ход решения задачи на два этапа

**1 этап.**

Найдём вероятность  $p_2$  того, что  $X$  примет значение  $x_2$ .

Сумма вероятностей всех возможных значений  $X$  равна единице

$$\sum_{i=1}^2 p_i = 1,$$

Поэтому вероятность  $P_2$  того, что  $X$  примет значение  $x_2$ ,

равна  $p_2 = 1 - 0.6 = 0.4$ . Тогда закон распределения дискретной случайной

величины  $X$  можно представить в виде

$X$	$x_1$	$x_2$
$P$	0.6	0.4

**2 этап.** Найдём два возможных значения случайной величины  $X$

**1 шаг.** Составим два уравнения.

а) Учитывая, что математическое ожидание дискретной случайной величины

подсчитывается по формуле  $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$ , получим

$$\sum_{i=1}^2 x_i P_i = 0.6x_1 + 0.4x_2 \quad \Rightarrow \quad 0.6x_1 + 0.4x_2 = 1.4,$$

б) Используя формулу  $D(X) = \sum_{i=1}^2 (x_i - M(X))^2 \cdot P_i$ , получим

$$(x_1 - 1.4)^2 \cdot 0.6 + (x_2 - 1.4)^2 \cdot 0.4 = 0.24$$

**2 шаг.** Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 0.6x_1 + 0.4x_2 = 1.4, \\ (x_1 - 1.4)^2 \cdot 0.6 + (x_2 - 1.4)^2 \cdot 0.4 = 0.24. \end{cases}$$

найдем два решения:  $x_1 = 1, x_2 = 2$  и  $x_1 = 1.8, x_2 = 0.8$ .

По условию  $x_1 < x_2$ , поэтому задаче удовлетворяет только первое решение.

О т в е т: искомый закон  
распределения имеет вид:

$X$	1	2
$P$	0.6	0.4

## Плотность распределения, математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

**Функцией распределения**  $F(x)$  случайной величины  $X$  называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее  $x$ :  $F(x) = P(X < x)$ .

*Свойства функции распределения.*

- 1)  $0 \leq F(x) \leq 1$ . 2)  $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ .
- 3)  $F(x)$  - неубывающая функция, то есть  $F(x_2) \geq F(x_1)$  при  $x_2 > x_1$ .
- 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

Функция  $f(x)$ , называемая **плотностью распределения** непрерывной случайной величины, определяется по формуле:  $f(x) = F'(x)$ .

*Свойства функции плотности распределения.*

- 1)  $f(x) \geq 0$ , так как функция распределения является неубывающей.
- 2)  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ ; 3)  $P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt$ ; 4)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , так как  $F(x) \rightarrow const$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Математическое ожидание** непрерывной случайной величины

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

**Дисперсия** непрерывной случайной величины

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)dx$$

**Задача.** Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , заданной функцией распределения

**Решение.**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x/2 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдем плотность распределения вероятностей по формуле  $f(x) = F'(x)$ .  $\Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1/2 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидания величины по формуле  $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

$$\Rightarrow M(X) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot x dx + \int_0^2 1/2 \cdot x dx + \int_2^{\infty} 0 \cdot x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 1 \quad \boxed{M(X) = 1.}$$

Дисперсию непрерывной случайной величины находим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x) dx$$

$$\Rightarrow D(X) = \int_0^2 (x-1)^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} (x-1)^3 \cdot \frac{1}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{6} [(2-1)^3 - (0-1)^3] = \frac{1}{3} \quad \boxed{D(X) = \frac{1}{3}}$$

## Нормальный закон распределения

В природе существует фундаментальный закон, управляющий поведением абсолютного большинства случайных величин. Такой закон называется *нормальным распределением или законом Гаусса*.

Плотность вероятности нормально распределённой случайной величины определяется формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

где *среднее квадратическое отклонение*  $\sigma = \sqrt{D(X)}$  является мерой рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания  $m$ . Вероятность того, что  $X$  примет значение, принадлежащее интервалу  $(\alpha; \beta)$  находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  обозначает *функцию Лапласа (интеграл вероятности или функция ошибок или erf x)*, для вычисления

значений которой пользуются специальной таблицей, приводимой в приложениях учебной и справочной литературы по теории вероятностей.

**Задача.** Известны математическое ожидание  $m = 10$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma = 2$  нормально распределенной случайной величины  $X$ . Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал  $(12, 14)$ .

**Решение.** Подставим  $\alpha = 12, \beta = 14, a = 10$  и  $\sigma = 2$  в формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Получим  $P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1)$  Значения  $\Phi(2)$  и  $\Phi(1)$  функции Лапласа находим по таблице, которая приводится в приложении учебников и справочников по теории вероятностей:

$$\Phi(2) = 0.4772; \quad \Phi(1) = 0.3413. \quad =>$$

$$P(12 < X < 14) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

**О т в е т:**  $P(12 < X < 14) = 0.1359.$

