

04.02.21.

Тема:

Вычисление производной степенной функции. Правила дифференцирования. Производные суммы, разности, произведения, частного.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://iu.ru/video-lessons/65715819-331d-46fb-9294-8ec09ff5c43b>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

## Правила дифференцирования

При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования суммы, произведения и частного:

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \quad (1)$$

Подробно это свойство производной формулируется так: если каждая из функций  $f(x)$  и  $g(x)$  имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула (1).

суммы  
нескольких функций равна сумме производных этих функций, производная разности равна разности производных.

### Задача

Найти производную функции:

$$1) f(x) = x^3 - x^2 + x - 3; \quad 2) f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\blacktriangleright 1) f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - (3)' = 3x^2 - 2x + 1;$$

$$2) f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}. \quad \blacktriangleleft$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cf(x))' = cf'(x). \quad (2)$$

**Задача**

Вычислить  $f'(-2)$ , если  $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 + 7x - 17$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright f'(x) &= \left(\frac{1}{4}x^5\right)' - (3x^3)' + (7x)' - (17)' = \frac{1}{4}(x^5)' - \\ &- 3(x^3)' + 7(x)' = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 + 7, \end{aligned}$$

$$f'(-2) = \frac{5}{4}(-2)^4 - 9(-2)^2 + 7 = -9. \triangleleft$$

**3. Производная произведения:**

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (3)$$

**Задача**

Найти производную функции  $f(x)g(x)$ , если  $f(x) = 3x^2 - 5$ ,  $g(x) = 2x + 7$ .

$\blacktriangleright$  По формуле (3) находим

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \\ &= (3x^2 - 5)'(2x + 7) + (3x^2 - 5)(2x + 7)' = \\ &= 6x(2x + 7) + (3x^2 - 5) \cdot 2 = 18x^2 + 42x - 10. \triangleleft \end{aligned}$$

**4. Производная частного:**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы при условии, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производную в точке  $x$ , причём в равенстве (4)  $g(x) \neq 0$ .

**Задача**

Найти производную функции  $F(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ .

► Обозначим  $x^3 = f(x)$ ,  $x^2 + 1 = g(x)$ . По формуле (4) находим  $F'(x) = \frac{(x^3)'(x^2 + 1) - x^3(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$   
 $= \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$ . ◁

**5. Производная сложной функции.**

Рассмотрим функцию  $F(x) = \log_2(x^2 + 1)$ . Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию  $f(y) = \log_2 y$ , где  $y = g(x) = x^2 + 1$ , т. е. как функцию  $f(y)$ , аргумент которой также является функцией  $y = g(x)$ . Иными словами, сложная функция — это функция от функции  $F(x) = f(g(x))$ . Производная сложной функции находится по формуле  $F'(x) = f'(y)g'(x)$ , где  $y = g(x)$ , т. е. по формуле

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x). \quad (5)$$

Рассмотрим примеры.

1) Пусть  $F(x) = (2x + 1)^2 + 5(2x + 1)$ .

Здесь  $f(y) = y^2 + 5y$ ,  $y = g(x) = 2x + 1$ .

По формуле (5) находим  $F'(x) = (2y + 5) \cdot (2x + 1)' =$   
 $= (2y + 5) \cdot 2 = (2(2x + 1) + 5) \cdot 2 = 8x + 14$ .

2) Пусть  $F(x) = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ . Здесь  $f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ ,  $y = g(x) =$   
 $= x^2 + 1$ . По формуле (5) находим

$$F'(x) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)' = \frac{3}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x \sqrt{x^2 + 1}.$$

## Практическая часть.

Найти производную функции (802—803).

802 1)  $x^2 + x$ ;      2)  $x^2 - x$ ;      3)  $3x^2$ ;      4)  $-17x^2$ ;  
5)  $-4x^3$ ;      6)  $0,5x^3$ ;      7)  $13x^2 + 26$ ;      8)  $8x^2 - 16$ .

803 1)  $3x^2 - 5x + 5$ ;      2)  $5x^2 + 6x - 7$ ;      3)  $x^4 + 2x^2$ ;  
4)  $x^5 - 3x^2$ ;      5)  $x^3 + 5x$ ;      6)  $-2x^3 + 18x$ ;  
7)  $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ ;      8)  $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$ .

805 Найти производную функции:

1)  $x^2 + \frac{1}{x^3}$ ;      2)  $x^3 + \frac{1}{x^2}$ ;      3)  $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$ ;      4)  $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$ .

810 Найти производную функции:

1)  $(x^2 - x)(x^3 + x)$ ;      2)  $(x + 2)\sqrt[3]{x}$ ;      3)  $(x - 1)\sqrt{x}$ .