ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Литература:

1) В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика
2) В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события.

Под событием понимается явление, которое происходит в результате осуществления некоторого набора условий. Осуществление какого-либо набора условий называется опытом или испытанием.

Случайным событием называется такое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта.

Опыт – бросание монеты.
События: появление «герба»,
появление « цифры».

Опыт – стрельба по мишени.
Событие – результаты стрельбы
(число очков).

Опыт – бросание игральной кости.
Событие - выпадение числа очков
(от 1 до 6).

Событие называется достоверным (**U**), если оно обязательно произойдет в результате испытания.

Событие называется невозможным или недостоверным (**V**), если оно не может произойти в результате испытания.

Если в результате испытания появление одного события исключает появление другого, то такие события называются несовместными.

Примеры:

Выпадение герба при одном бросании монеты исключает появление цифры.

Выпадение «6» очков на игральной кости исключает появление «3» очков.

События называются совместными, если в результате одного опыта появление одного события не исключает появление другого.

Опыт – выбор карты из колоды.
События:

A – выбор туза,
B – выбор красной масти.
A и *B* – совместные события.

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Каждое событие из полной группы попарно несовместных событий называют исходами или элементарными событиями.

События называются равновозможными, если в условиях опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости образуют полную группу и являются равновозможными.

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Суммой событий называется событие, состоящее в появлении одного из этих событий

$$A+B = A \text{ или } B$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Произведением событий называется событие, состоящее в одновременном появлении этих событий

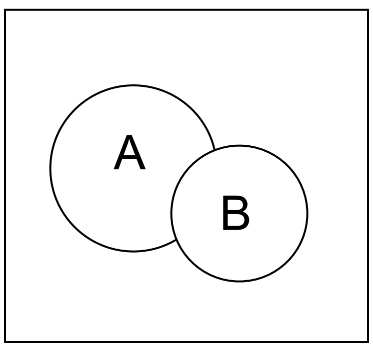
$$A \times B = A \text{ и } B$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

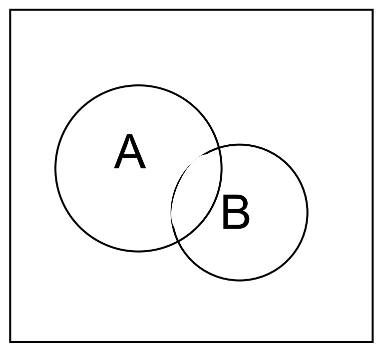
Событие $\overline{A}$ называется противоположным к событию A, если оно происходит тогда, когда A не происходит.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ (ДИАГРАММЫ ВИЕНА)

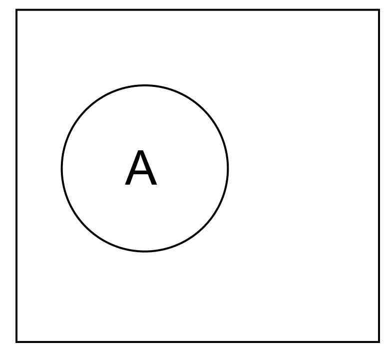
Полную группу событий представим в виде квадрата, тогда



□A+B



□ $A \times B$



□ $\bar{A}$

$\bar{A}$, A - полная группа событий

Задача.

Бросается игральная кость
Обозначим события
A_1 – выпало «2»
A_2 – выпало «4»
A_3 – выпало «6»

Записать:

выпало четное

$$A_1+A_2+A_3$$

Задача.
Бросается игральная кость
Обозначим события
A_1 – выпало более трех
A_2 – выпало четное
Записать:

выпало «5»

$$A_1 \times \overline{A_2}$$

Вероятность события – это численная мера объективной возможности его появления.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ А: $P(A) = \frac{m}{n},$

где
m – число благоприятных исходов;
n – общее число исходов.

Задача.
Бросается игральная кость.
Найти вероятности событий:

1) выпало «3»

P(A)=1/6

2) выпало четное число больше двух

P(A)=2/6=1/3

3) выпало менее десяти очков

P(A)=6/6=1 (событие достоверное)

4) выпало более десяти очков

P(A)=0/6=0 (событие недостоверное)

Свойства вероятности:

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1}$$

Вероятность достоверного события равна 1.

Вероятность недостоверного события равна 0.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Относительной частотой появления события понимается отношение числа опытов, в которых появилось событие *A*, к числу всех опытов.

$$\boxed{P^*(A) = \frac{M}{N}.}$$

Яков Бернулли
XVII в.

Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа опытов относительная частота появления события будет сколь угодно мало отличаться от постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. Поэтому относительную частоту появления события при достаточно большом числе опытов называют статистической вероятностью.

Статистической вероятностью события **A** называется число, относительно которого стабилизируется относительная частота события **A** при неограниченном увеличении числа испытаний.

Задача.
Посажено 15 деревьев, из которых прижились 12. Найти относительную частоту приживаемости.

$$P^*(A) = \frac{12}{15} = 0{,}8$$

ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

ОСНОВНОЕ ПРАВИЛО КОМБИНАТОРИКИ

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами,…, k-тое действие – n_k способами.

Тогда все k действий могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Размещениями из n различных элементов по m элементов (m<n) называют комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, отличающиеся либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений из n по m

$$\boxed{A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}$$

Перестановками из n различных элементов называют размещения из **n** элементов по **n** элементов.

Число перестановок

$$\boxed{\begin{aligned}&P_n = A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = \\ &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!\end{aligned}}$$

Сочетаниями из n различных элементов по m элементов (m<n) называют комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом. (Порядок элементов не учитывается)

Число сочетаний из n по m $$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}}$$

Задача.

Сколькими способами из 20 присяжных заседателей можно отобрать троих для участия в судебном процессе.

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 2\cdot ...\cdot 17)} =$$

$$\frac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140$$

Задача.

Сколькими способами из 20 членов правления можно отобрать троих для замещения вакансий вице-президентов, отвечающих соответственно за производство, финансы, реализацию продукции.

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

$$A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

Задача.

Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 с использованием всех указанных цифр в этом числе.

$$P_4 = 4! = 24$$

Задача.
Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?

1	6
6	1
2	5
5	2
3	4
4	3

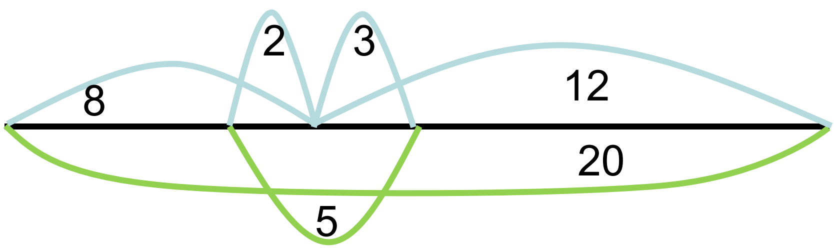
$$P = \frac{6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

Задача.
Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков не равно 6?

$$\begin{matrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$P = \frac{36-4}{6 \cdot 6} = \frac{8}{9}$$

Задача. В классе 20 учеников, из них 12 девочек. Наугад отбирают 5 учеников на дежурство по школе. Найти вероятность того, что среди отобранных будут 2 мальчика.



$$P = \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^3}{C_{20}^5} =$$

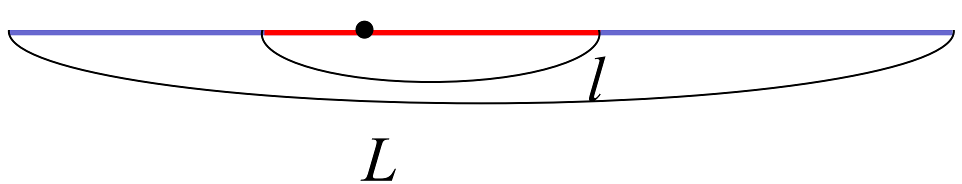
$$= \frac{\left(\frac{8!}{2!(8-2)!}\right)\left(\frac{12!}{3!(12-3)!}\right)}{\left(\frac{20!}{5!(20-5)!}\right)} = \frac{\left(\frac{8!}{2!\cdot 6!}\right)\left(\frac{12!}{3!\cdot 9!}\right)}{\left(\frac{20!}{5!\cdot 15!}\right)} = \frac{\left(\frac{7\cdot 8}{2}\right)\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}\right)}{\left(\frac{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right)} =$$

$$= \frac{385}{969} = 0,39731682 \approx 0,397$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Классическое определение вероятности применимо лишь к конечному числу опытов.
В тех случаях, когда число опытов бесконечно, применяют геометрическую вероятность – вероятность попадания точки в область.

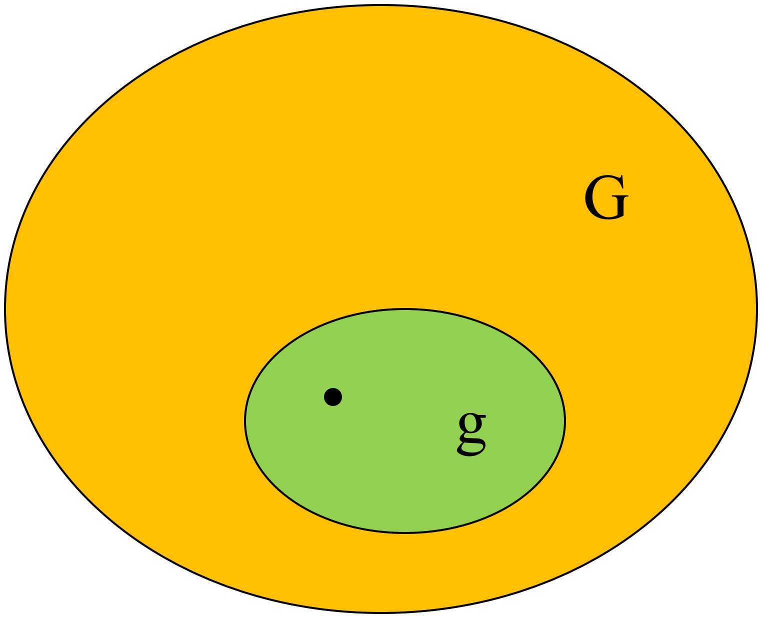
Отрезок длины l составляет часть отрезка длины L.
Вероятность попадания точки на отрезок длины l не зависит от его расположения и вычисляется по формуле



$$P = \frac{l}{L}$$

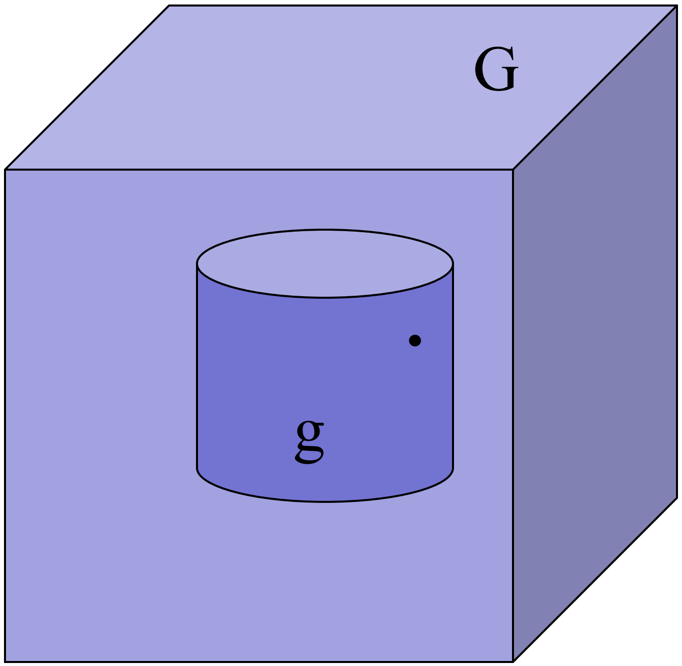
Аналогично для плоских и пространственных фигур.

Вероятность попадания точки в плоскую фигуру **g**, которая является частью плоской фигуры **G** равна



$$P = \frac{S(g)}{S(G)}$$

Вероятность попадания точки в пространственную фигуру **g**, которая является частью пространственной фигуры **G** равна



$$P = \frac{V(g)}{V(G)}$$

Задача.

В квадратном окне со стороной **a** имеется квадратная форточка со стороной **b**. Какова вероятность того, что летящий в окно комар влетит в окно через открытую форточку?

$$P = \frac{b^2}{a^2}$$