

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Литература:

- 1) В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика
- 2) В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Основным понятием теории вероятностей является понятие **случайного события**.

Под событием понимается явление, которое происходит в результате осуществления некоторого набора условий. Осуществление какого-либо набора условий называется **опытом** или **испытанием**.

Случайным событием называется такое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта.



Опыт – бросание монеты.
События: появление «герба»,
появление «цифры».



Опыт – стрельба по мишени.
Событие – результаты стрельбы
(число очков).



Опыт – бросание игральной кости.
Событие - выпадение числа очков
(от 1 до 6).

Событие называется **достоверным (U)**, если оно обязательно произойдет в результате испытания.

Событие называется **невозможным** или **недостоверным (V)**, если оно не может произойти в результате испытания.

Если в результате испытания появление одного события исключает появление другого, то такие события называются **несовместными**.

Примеры:

Выпадение герба при одном бросании монеты исключает появление цифры.

Выпадение «6» очков на игральной кости исключает появление «3» очков.

События называются **совместными**, если в результате одного опыта появление одного события не исключает появление другого.

Опыт – выбор карты из колоды.

События:



A – выбор туза,

B – выбор красной масти.

A и B – совместные события.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Каждое событие из полной группы попарно несовместных событий называют **исходами** или **элементарными событиями**.

События называются **равновозможными**, если в условиях опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости образуют полную группу и являются равновозможными.

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Суммой событий называется событие, состоящее в появлении одного из этих событий

$$A+B = A \text{ или } B$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Произведением событий называется событие, состоящее в одновременном появлении этих событий

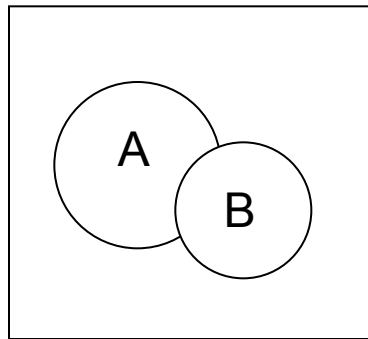
$$A \times B = A \text{ и } B$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

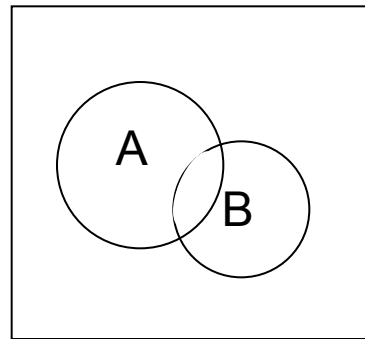
Событие \bar{A} называется **противоположным** к событию A , если оно происходит тогда, когда A не происходит.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ (ДИАГРАММЫ ВИЕНА)

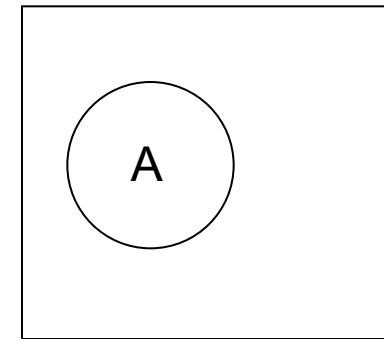
Полную группу событий представим в виде
квадрата, тогда



□ $A+B$



□ $A \times B$



□ \bar{A}

\bar{A}, A - полная группа событий

Задача.

Бросается игральная кость

Обозначим события

A_1 – выпало «2»

A_2 – выпало «4»

A_3 – выпало «6»



Записать:

выпало четное

$$A_1 + A_2 + A_3$$

Задача.

Бросается игральная кость

Обозначим события

A_1 – выпало более трех

A_2 – выпало четное

Записать:

выпало «5»

$$A_1 \times \overline{A_2}$$



Вероятность события – это численная мера объективной возможности его появления.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ A : $P(A) = \frac{m}{n}$,

где

m – число благоприятных исходов;

n – общее число исходов.

Задача.

Бросается игральная кость.

Найти вероятности событий:

1) выпало «3»

$$P(A) = 1/6$$

2) выпало четное число больше двух

$$P(A) = 2/6 = 1/3$$

3) выпало менее десяти очков

$$P(A) = 6/6 = 1 \text{ (событие достоверное)}$$

4) выпало более десяти очков

$$P(A) = 0/6 = 0 \text{ (событие недостоверное)}$$



Свойства вероятности:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Вероятность достоверного события равна **1**.

Вероятность недостоверного события равна **0**.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Относительной частотой появления события понимается отношение числа опытов, в которых появилось событие A , к числу всех опытов.

$$P^*(A) = \frac{M}{N}.$$



Яков Бернулли
XVII в.

Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа опытов относительная частота появления события будет сколь угодно мало отличаться от постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. Поэтому относительную частоту появления события при достаточно большом числе опытов называют **статистической вероятностью.**

Статистической вероятностью события A называется число, относительно которого стабилизируется относительная частота события A при неограниченном увеличении числа испытаний.

Задача.

Посажено 15 деревьев, из которых прижились 12.
Найти относительную частоту приживаемости.

$$P^*(A) = \frac{12}{15} = 0,8$$

ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

ОСНОВНОЕ ПРАВИЛО КОМБИНАТОРИКИ

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами, ..., k -тое действие – n_k способами.

Тогда все k действий могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Размещениями из n различных элементов по m элементов ($m < n$) называют комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, отличающиеся либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений из n по m

$$A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)$$

Перестановками из n различных элементов называют размещения из n элементов по n элементов.

Число перестановок

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Сочетаниями из n различных элементов по m элементов ($m < n$) называют комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом. (Порядок элементов не учитывается)

Число сочетаний из n по m

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}$$

Задача.

Сколькими способами из 20 присяжных заседателей можно отобрать троих для участия в судебном процессе.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 17)} =$$

$$\frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

Задача.

Сколькими способами из 20 членов правления можно отобрать троих для замещения вакансий вице-президентов, отвечающих соответственно за производство, финансы, реализацию продукции.

$$A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)$$

$$A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

Задача.

Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 с использованием всех указанных цифр в этом числе.

$$P_4 = 4! = 24$$

Задача.

Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?



1 6

6 1

2 5

5 2

3 4

4 3

$$P = \frac{6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

Задача.

Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков не равно 6?

1 6

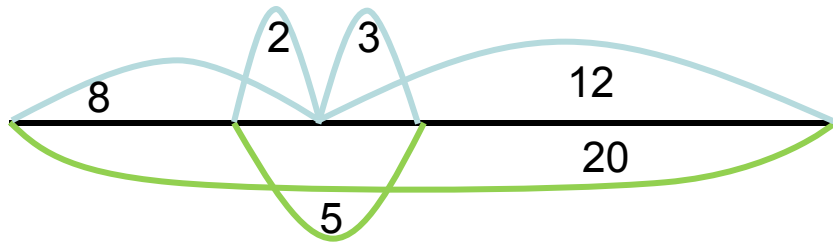
6 1

2 3

3 2

$$P = \frac{36 - 4}{6 \cdot 6} = \frac{8}{9}$$

Задача. В классе 20 учеников, из них 12 девочек. Наугад отбирают 5 учеников на дежурство по школе. Найти вероятность того, что среди отобранных будут 2 мальчика.



$$P = \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^3}{C_{20}^5} =$$

$$= \frac{\left(\frac{8!}{2!(8-2)!} \right) \left(\frac{12!}{3!(12-3)!} \right)}{\left(\frac{20!}{5!(20-5)!} \right)} = \frac{\left(\frac{8!}{2! \cdot 6!} \right) \left(\frac{12!}{3! \cdot 9!} \right)}{\left(\frac{20!}{5! \cdot 15!} \right)} = \frac{\left(\frac{7 \cdot 8}{2} \right) \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} \right)}{\left(\frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right)} =$$

$$= \frac{385}{969} = 0,39731682 \approx 0,397$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Классическое определение вероятности применимо лишь к конечному числу опытов. В тех случаях, когда число опытов бесконечно, применяют **геометрическую вероятность** – вероятность попадания точки в область.

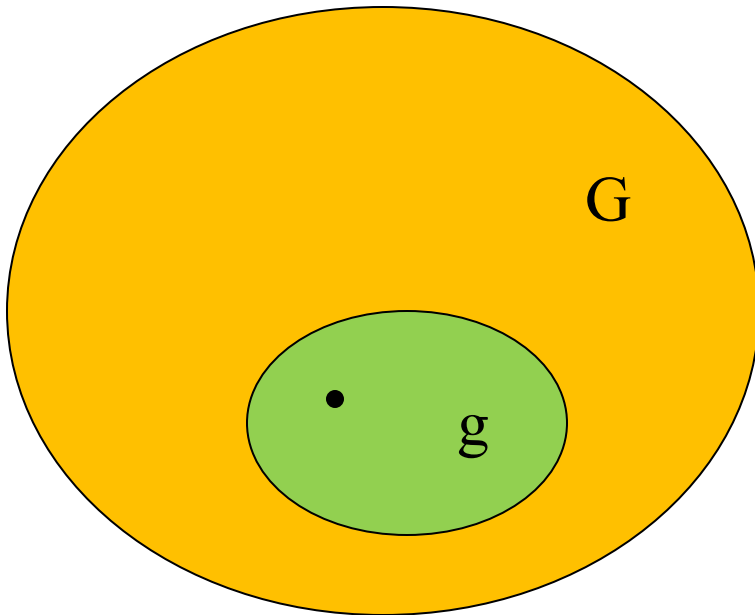
Отрезок длины l составляет часть отрезка длины L . Вероятность попадания точки на отрезок длины l не зависит от его расположения и вычисляется по формуле



$$P = \frac{l}{L}$$

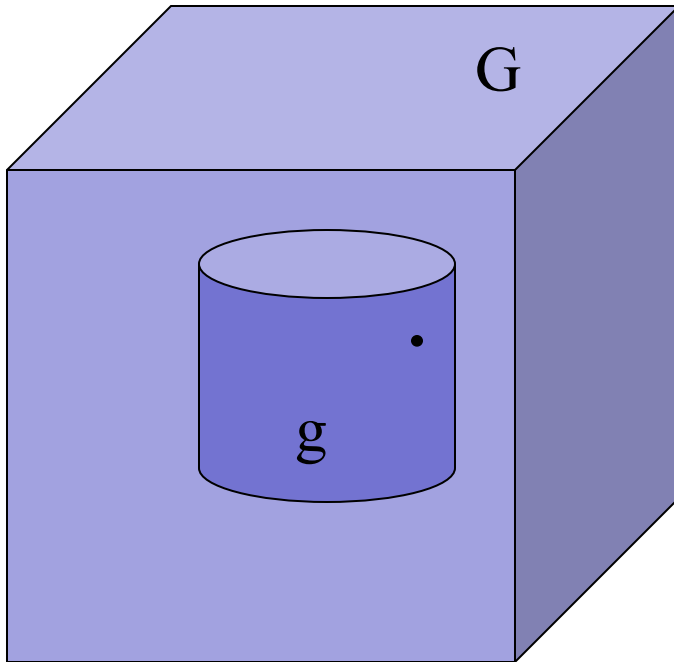
Аналогично для плоских и пространственных фигур.

Вероятность попадания точки в плоскую фигуру g , которая является частью плоской фигуры G равна



$$P = \frac{S(g)}{S(G)}$$

Вероятность попадания точки в пространственную фигуру g , которая является частью пространственной фигуры G равна



$$P = \frac{V(g)}{V(G)}$$

Задача.

В квадратном окне со стороной **a** имеется квадратная форточка со стороной **b**. Какова вероятность того, что летящий в окно комар влетит в окно через открытую форточку?

$$P = \frac{b^2}{a^2}$$