中国石油大学(华东) CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM 理学院

惟真惟实

概率论与数理统计

教师:芮杰

15610552978

2019年QQ群:761127546

一、什么是概率？

二、生活中的概率问题

例1：

北京奥运会圆满闭幕，某玩具厂商为推销其生产的福娃玩具，特举办了一次有奖活动，设立了一个转盘，如图所示被等分成12个扇形区域。顾客随意向转盘内投掷一点，如果落在转盘红色区域，顾客则可获得一套福娃玩具。问顾客能得到一套福娃玩具的概率是多少？

- 例2
- 　　十一大促销，在淘宝上买的货物终于到了，快递发短信给你：下午4点到5点将到达您的送货地址，请注意接收。那您等候时间不超过10分钟的概率是多少？


11

- **例3**

在2014年世界杯半决赛第二场的比赛中，阿根廷队和荷兰队在大战120分钟后仍然战平，双方进入点球大战，荷兰队在接下来的4次点球机会中，至少射入2次的概率是多少？

[illegible] 4

[illegible] 30 [illegible] 5 [illegible] 0. 98 [illegible] 0. 02 [illegible] 100 [illegible] 5 [illegible] a [illegible] a [illegible]

[illegible] 10000 [illegible]

□ 5

□□20□□□18□□□□□□
□□

纯净水在标准大气压下，加热到100摄氏度，沸腾的概率是多少？

必然现象与随机现象

必然现象：条件下，某些事情一定发生或一定不发生的现象。

Necessity Phenomenon

随机现象：条件下，可能发生也可能不发生的现象。

Random Phenomenon

任务与研究方式

概率论与数理统计的任务:

The Task of Probability and Statistics

研究和揭示随机现象的统计规律性。

研究方式: *Study manner*

从数量的侧面研究随机现象统计规律。

Statistics Law

绪 论 篇

- 概 率 论 起 源
- 发 展 简 史
- 应 用 前 景
- 学习方法指导

概 率 论 起 源

Origin

概率论与数理统计是一门古老的学科，它起源于十七世纪资本主义上升的初期，这时航海商业有了很大的发展，关闭的封建社会经济正在被航海商业经济所取代。然而航海商业是冒风险的事业，人们自然要关心大量投资是否有利可图？怎样估计出现各种不幸事故与自然灾害的可能性？在桥牌活动中，经常需要判断某种花色在对方手中的分配等等。从某种意义上讲，概率论与数理统计正是从研究这类问题开始的。

发展简史

istory

随

公 ”

公

公 子

概 期

意

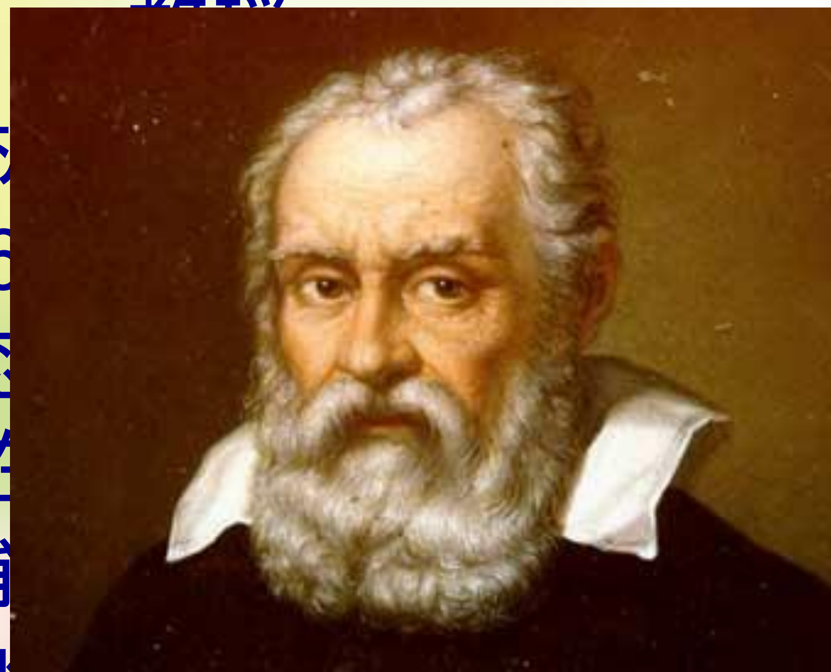
在 颈

骰

代表人物

卡尔达诺（1501-1576）意大利数学和医学

教授



1526年《杉 … 年出版

伽利略 16 … 关于骰子

游戏的思想

他解释了在 … 么会有216

种同等可能 … 三颗骰子的

某些和数的 … 样大小的可能

性，而玩骰子 … 是同等可能。比

如和数为9和 … 占优势？

概率的产生

点问题

对于数学中一个非常特别的问题的解法的探求成为数学化的概率科学产生的标志之一，这个问题被称作“点问题”。

点问题的起源故事

话说，1654年法国的一位军人德.梅勒，语言学家、古典学者

德.梅勒和他的一个朋友每人出赌注30个金币，两人各自选取骰子中的一个点数，谁先掷出该点数次数多，谁就赢得全部赌注。德.梅勒选的点数“5”，他的朋友选择的点数“3”。

在游戏进行了一会儿后，德.梅勒选的点数“5”出现了2次，而他的朋友选择的点数“3”只出现了一次。这时候，德.梅勒由于一个紧急事情必须离开，游戏不得不停止。他们该如何分配赌桌上的60个金币的赌注呢？

帕斯卡 法国“最伟大的天才”

费马 业余

两人在通信

了一种研究

合数学)研究

学史上的一

惠更斯（荷兰） 1657年《论掷骰子游戏中的计算》——概率论中最早的论著

早期概率论的真正创立者是
和惠更斯，这一时期被称为

概率的发展

瑞士数学家族——贝努利家

雅可布.贝努利　提出“贝努利
了20年的时
年，出版《猜

尼古拉.贝努利　提出著名的

拉普拉斯(法国)

明确给出概率的古典定

证明了“棣莫佛—拉普拉

建立了观测误差理论和

1812年 出版《分析的概

成为严谨的学科

1906年 俄数学家马尔科夫

1934年 前苏联数学家辛钦(1894-1959)提出“平稳过程理论”以及“辛钦大数定律”

20世纪初 完成了勒贝格测度与积分理论及随后发展的抽象测度和积分理论

1933年 柯尔莫哥洛夫《概率论基础》

首次给出概率 定义和一套严
密的公理化体 方法成为现
代概率论的基 成为严谨的
数学分支。

柯尔莫哥洛夫，A. H.

**电子计算机的 速了概率论与数
理统计的发展。 形成了许多新的
统计分支:时间 推断、稳健统
计、投影寻踪等。**

应用前景 Prospect

概率论与数理统计应用呈现出极其壮观的局面，尤其在质量管理、计量经济学、计量心理学、金融数学方面起着重要的作用。数理统计已渗透于工业统计、农业统计、水文统计、统计医学、统计力学、统计物理学、统计化学、统计教育学、统计体育学、统计心理学等许多领域。气象预报、产量预报、地震预报、石油勘探开发、可靠性工程等凡是有数据需要处理的地方，都离不开概率统计。因此概率论与数理统计作为一门应用数学课程是非常重要的。

学习方法指导

学习概率论与数理统计重点要理解掌握它的基本概念、基本理论和常用统计方法的具体应用。

理解实质　掌握内涵　循序渐进

抓住典型　触类旁通　开拓思路

善于分析　寻找规律　勇于创新

注意加强前后知识的联系，善于把新问题化作老问题加以解决，掌握解决处理实际问题的一般方法，逐步提高分析问题、解决问题的能力。

使用教材及参考书

教材:《随机数据处理方法》(第三版)石大出版社，王清河等编著。

参考书: 1.《概率论与数理统计》(第三版)高教出版社，盛骤等编。

2. *Introduction to Probability and Statistics, Sixth Edition* ,Mendenhall .

3.《概率论与数理统计学习指导》(胶印本)常兆光、王清河等编著

概 率 论 篇

第一章 随机事件与概率

第二章 随机变量及其分布

第三章 随机变量的数字特征

第四章 大数定律与中心极限定理

第一章 随机事件与概率

- 随机试验与随机事件
- 频率与概率
- 等可能概型、几何概型
- 条件概率
- 事件的独立性
- 综 合 练 习

§1.1 随机试验与随机事件

Random Experiments and Random Events

- 随机试验
- 随机事件
- 样本空间 *Sample Space*
- 事件之间的关系及运算

Random Experiments

E_1

E_2

E_3

1

2

3

E

Random Events

A B C

例 投掷一枚骰子，观察可能出现的点数

1. 事件A:出现的点数为奇数
2. 事件B:出现的点数小于4
3. 事件 e_1 :出现1点
4. 事件 e_i :出现的点数为i(i=2,3,4,5,6)

当事件 e_1， e_3或e_5发生时，A发生，即

$$A=\{e_1,e_3,e_5\}.$$

事件分类

[illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible]: [illegible], [illegible] Ω [illegible]

[illegible]: [illegible], [illegible] ϕ [illegible]

投掷一枚硬币的基本事件:

e_1 :{H}　　e_2 :{T}

依次投掷两枚硬币的基本事件:

e_1:{HH}　e_2:{HT}　e_3:{TH}　e_4:{TT}

投掷一枚骰子的基本事件和复合事件

事件 e_i 和事件A:出现的点数为奇数

需要指出的是

e

A B

Ω

ϕ

□ .□ □ □ □

Sample Space

样本空间:

由试验所有可能结果构成的集合称为样本空间，通常用符号Ω 表示，Ω中的每个元素称为**样本点**。

基本事件:

只包含一个样本点的事件称为基本事件

Exp1-1 [illegible]

SOL[illegible] H, [illegible] T, Ω[illegible]

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\} \hat{=} \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

Exp1-2 [illegible] Ω[illegible]

SOL[illegible] $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Exp1-3

$\Omega=\{t\mid t\geq 0, t\in R\}$ 5

$A=\{t\mid 0\leq t<5, t\in R\}$

需要指出的是：

Aim

1 3

$\Omega=\{3,4,\cdots,18\}$

2 3

$\Omega=\{0,1,2,3\}$

3

作业：

以小组为单位，在相同的条件下扔一枚均匀的硬币100次，统计正面、反面出现的次数。

Ω ϕ e

A, B, A_1, A_2, A_n

1 $A \subset B$ A B

2 $A = B$ $A \subset B$ $B \subset A$

3 A B A, B

4 A B (AB

A B

5 $A - B$ $A - B = A\overline{B}$

A B

□ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$$A_1 \square A_2 \square \square \square A_n \triangleq \underset{i=1}{\overset{n}{\square}} A_i$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$$A_1 \square A_2 \square \square \square A_n \square \square \triangleq \underset{i=1}{\overset{\infty}{\square}} A_i$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$$A_1 \square A_2 \square \square \square A_n \triangleq \underset{i=1}{\overset{n}{\square}} A_i$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$$A_1 \square A_2 \square \square \square A_n \square \square \triangleq \underset{i=1}{\overset{\infty}{\square}} A_i$$

[illegible] 6[illegible]

[illegible] $AB=\phi$ [illegible] A [illegible] B [illegible]

[illegible] $\forall i \neq j$ [illegible] $A_i A_j = \phi (i$ [illegible] $j = 1$ [illegible] 2 [illegible] $)$ [illegible]

[illegible] A_1 [illegible] A_2 [illegible] A_n [illegible]

[illegible] 7[illegible]

[illegible] $AB=\phi$ [illegible] A [illegible] $B=\Omega$ [illegible] A [illegible] B [illegible]

[illegible] $\overline{A}=B$ [illegible] $\overline{B}=A$ [illegible]

□ 8□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$$\overline{A \square B} = \overline{A} \square \overline{B} \qquad \overline{A \square B} = \overline{A} \square \overline{B}$$

□ 9□ □ □ □ □ (□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □)

□ □ □ □ $A \square B = B \square A, \quad A \square B = B \square A,$

□ □ □ □ $A \square (B \square C) = (A \square B) \square C,$

$$A \square (B \square C) = (A \square B) \square C$$

□ □ □ □ $A \square (B \square C) = (A \square B) \square (A \square C),$

$$A \square (B \square C) = (A \square B) \square (A \square C),$$

Exp1-5

A_1 “ ”

$$A_1 = \{HH \quad HT\} \hat{=} e_1 \quad e_2$$

A_2 “ ”

$$A_2 = \{HH \quad TT\} \hat{=} e_1 \quad e_4$$

A_3 “ ”

$$A_3 = \{HT \quad TH\} \hat{=} e_2 \quad e_3$$

$$A_1 \quad A_2 = \{HH \quad HT \quad TT\}$$

$$A_1 \quad A_2 = \{HH\} = e_1, \qquad A_1 - A_2 = \{HT\}$$

$A_2 A_3 = \phi$ A_2 A_3

$A_2 \quad A_3 = \Omega$ A_2 A_3

CH1

例1-6 设A,B,C 为三个事件，试用事件之间的运算关系表示下列事件

(1)A发生而B与C都不发生；

$$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\qquad A\overline{B}\,\overline{C}\qquad A-B-C$$

(2)A,B,C恰有一个发生；

$$(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

(3)A,B,C至少有一个发生；

$$A\cup B\cup C$$

(4)A,B,C至多有两个发生。

$$\overline{A\cap B\cap C}\qquad \overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$$

思考：A,B,C 都不发生与A,B,C 不都发生的区别

§1.2 频率与概率

Frequency and Probability

一.频　率

二.概率的统计性定义

三.概率的公理化定义

CH1

.

A

$P(A)$ $P(A)$ A

[ ] n $A=\{H\}$,

$n(A)$ n A

$$f_n(A) \triangleq \frac{n(A)}{n}$$

A

经典试验：

掷一枚均匀的硬币，观察正面（记为H）、反面（记为T）出现的情况。

实验者	n	$n(H)$	$f_n(H)$	$n(T)$	$f_n(T)$
芮杰	100	53	0.53	47	0.47

[illegible] 1-1

[illegible]	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	$n(A)$	$f_n(A)$	$n(A)$	$f_n(A)$	$n(A)$	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

□ 1-2

□□□	n	$n(A)$	$f_n(A)$
□□	4040	2048	0.5070
K.□□	12000	6019	0.5015
K.□□	24000	12012	0.5005

□□□□(□□1-1□□1-2)□□ n □□□□ $\frac{n(A)}{n}$□$\frac{1}{2}$□□□□□□□□□□□,□□□□□$\frac{1}{2}$, 1/2□□□□□ $f_n(A)$□□□□□□□□□□□□□□

□□ A□□□□□□

频率定义： Definition of Frequency

□□ 1-1 □ E□□□□□□ A□□□□□□□□

$n(A)$□□□ A□ n□□□□□□□□□□□□□□□

□ $\frac{n(A)}{n}$□ n□□□□ A□□□□□□□□

$$f_n(A) \triangleq \frac{n(A)}{n} \qquad \text{□1-1□}$$

□□ $n(A)$□□□□ A□ n□□□□□□□□□□□□

□ n□□□□ $f_n(A)$□□□□□□□□□□□ p□□

□ p□□□□□□□□

□□□□□□ $f_n(A)$□□□□

$f_n(A)$

Property

1 $0 \le f_n(A) \le 1$

2 $f_n(\Omega) = 1$

3 A B

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

$A_1, A_2, \cdots, A_m$

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

Statistical definition of Probability

需要指出的是

A

p

$$f_n(A) \xrightarrow{n\to\infty} p$$

1-2 A p A

$P(A)$

[illegible]．[illegible]

Axiomatize Definition

[illegible] 1-3 [illegible] E [illegible] Ω [illegible] E [illegible] A [illegible] $P(A)$ [illegible]

[illegible] 1 [illegible] $0 \le P(A) \le 1$ [illegible]

[illegible] 2 [illegible] $P(\Omega) = 1$ [illegible]

[illegible] 3 [illegible] $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ [illegible]

[illegible] $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ [illegible]

[illegible] $P(A)$ [illegible] A [illegible]

□□ $P(A)$ □□□□□□

□1□ $P(\phi)=0$

□2□□ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ □□□□□□□□

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

□3□□ A □□□□ $\overline{A}$ □□ $P(A)=1-P(\overline{A})$□

Proof□ □□ $A\cup\overline{A}=\Omega$□□ $A\cap\overline{A}=\phi$□□□□□□2□

□□□

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

□ $P(A)=1-P(\overline{A})$□

4 $A \subset B$ $P(B-A)=P(B)-P(A)$

$P(A) \le P(B)$

Proof $B = A \cup (B-A)$ $A \cap (B-A) = \phi$

2

$$P(B)=P(A \cup (B-A)) = P(A)+P(B-A)$$

$P(B-A)=P(B)-P(A)$

$P(B-A)\ge 0$ $P(B)-P(A)\ge 0$ $P(A)\le P(B)$

A, B

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

[illegible] **5**[illegible] $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Proof[illegible] $A\cup B=A\cup(B-AB)$ [illegible] $A\cap(B-AB)=\phi$

[illegible] **2** [illegible] **4** [illegible]

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

[illegible] $A_1, A_2, \cdots, A_n$ [illegible]

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}^{n}P(A_iA_jA_k)$$

加法公式

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

Exp1-7 □□□□ A□ B□□ $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$

□ $P(A)=p$□□ $P(B)$□

SOL one□□□

$$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

□□□ $1-P(A)-P(B)=0$□□

$$P(B)=1-P(A)=1-p$$

SOL two□□□□□ **5**□□

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)$$ □□ **5**□

$$=1-P(\overline{A\cup B})-P(A)+P(AB)$$ □□□ **3**□

$$=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A)+P(AB)$$ □□□□

$$=1-P(A)=1-p$$ □□□□□□

Exp1-8 □ □ □ □ A □ B□ C □ $P(AC) = 1/8$ □

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$□ $P(AB) = P(BC) = 0$□ □ A□

B□ C□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$$P(A □ B □ C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

□ $ABC \subset AB$ □ □ $P(ABC) \le P(AB) = 0$□ □

$P(ABC) = 0$□ □

$$P(A □ B □ C) = \frac{1}{4} \times 3 - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Exp 1-9 设 A ，B 为随机事件， $P(A)=0.7$，

$P(A-B)=0.3$， 求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解: 由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

以及题设条件，得 $P(AB)=0.4$

从而由对偶原理以及概率的性质3可知

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(AB)=0.6$$

类似问题: 设 A，B 为随机事件， $P(A)=0.6$

，$P(B-A)=0.2$，求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$。