

Лекция №1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
И
ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

ПЛАН

1. Основные понятия.
2. Геометрическое изображение комплексных чисел.
3. Формы записи комплексных чисел.
4. Действия над комплексными числами.
5. Зачем изучать комплексные числа?

1. Основные понятия.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

Комплексным числом Z называется выражение $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица.
 $x = \operatorname{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z
 $y = \operatorname{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z
Если $x = 0$, то число $z = iy$ называется **чисто мнимым**.
Если $y = 0$, то число $z = x$ отождествляется с действительным числом.
Множество \mathbf{R} всех действительных чисел является подмножеством множества \mathbf{C} всех комплексных чисел.

$x = \operatorname{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \operatorname{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество \mathbf{R} всех действительных чисел является

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$$z = iy \text{ – называется } \mathbf{чисто\ мнимым}.$$

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество \mathbf{R} всех действительных чисел является подмножеством множества \mathbf{C} всех комплексных чисел.

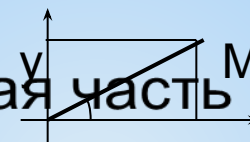
2. Геометрическое изображение комплексных чисел.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z
 $y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z



Если $x = 0$, то число

$$z = iy \text{ – называется } \mathbf{\text{чисто мнимым}}.$$

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **\mathbf{R}** всех действительных чисел является

Решите уравнение

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$D = 36 - 52 = -16$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6}{2} \pm \frac{4i}{2}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm 2i$$

Из равенства двух комплексных чисел найти действительные числа x и y

$$a). z_1 = -2 + (5x - 3y)i$$

$$z_1 = z_2$$

$$z_2 = (2x - 4y) + 9i$$

решение

$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}$$

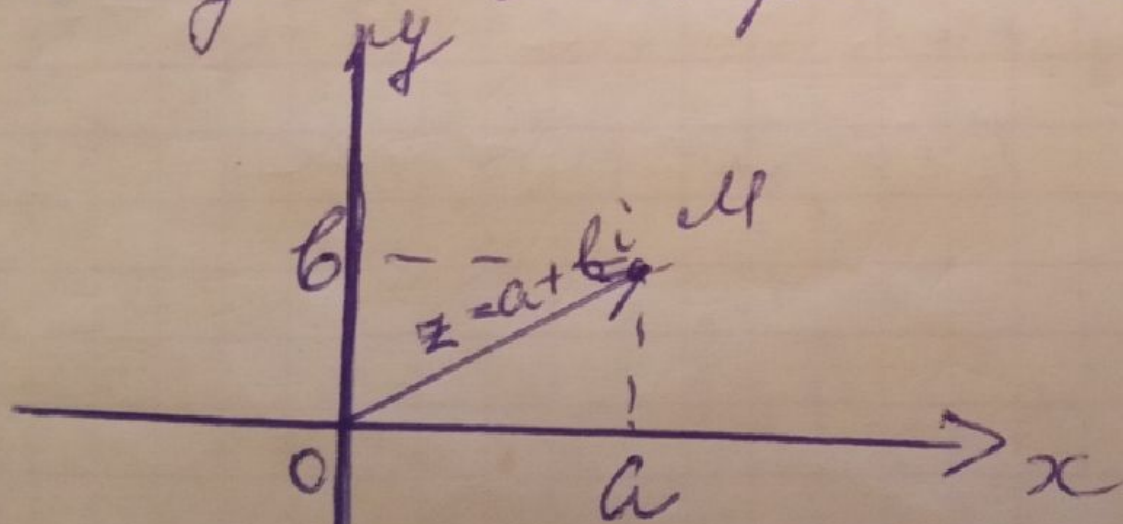
и надо решить систему

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$b). z_1 = (x^2 - 5x + 5) + 4i$$

$$z_2 = -1 + yi$$

Комплексное число $z = a + bi$
на плоскости изображается
в виде вектора $\vec{OM} (a; b)$



Длина вектора $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Примеры

$$z_1 = 2 + 4i$$

$$z_2 = -3 + i$$

$$z_3 = 2,5 - 2i$$

Дана:

- 1) решить уравнение во множестве комплекс. чисел

$$x^2 - 2x + 17 = 0.$$

- 2) Из равенства двух чисел
найти x и y

$$z_1 = (2x - y) + 5i$$

$$z_2 = 3 + yi$$

- 3) Построить комплексные числа

$$z_1 = 1 + 3i$$

$$z_2 = -2 - 5i$$

- 4) Дана комплекс. число $z = 6 - 7i$
записать сопряжённое

3. **Формы записи комплексных чисел.**

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$$z = iy \text{ – называется } \mathbf{чисто\ мнимым}.$$

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество \mathbf{R} всех действительных чисел является подмножеством множества \mathbf{C} всех комплексных чисел.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$$z = iy \text{ – называется } \mathbf{чисто\ мнимым}.$$

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

4. Действия над комплексными

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \operatorname{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \operatorname{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

Вычитание комплексных чисел

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \operatorname{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \operatorname{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

Умножение комплексных чисел

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$$z = iy \text{ – называется } \mathbf{чисто\ мнимым}.$$

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество \mathbf{R} всех действительных чисел является подмножеством множества \mathbf{C} всех комплексных чисел.

Комплексным числом Z называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$$z = iy \text{ – называется } \textit{чисто мнимым}.$$

Если $y = 0$, то число

$$z = x \text{ отождествляется с действительным числом.}$$

Множество \mathbf{R} всех действительных чисел является подмножеством множества \mathbf{C} всех комплексных чисел.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$$z = iy \text{ – называется } \textit{чисто мнимым}.$$

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество \mathbf{R} всех действительных чисел является подмножеством множества \mathbf{C} всех комплексных чисел.

Деление комплексных чисел

- *Комплексным числом Z называется выражение*

$$**$z = x + iy,$**$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая *мнимая единица*.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$$**$z = iy$ – называется *чисто мнимым*.**$$

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

Извлечение корней из комплексных чисел

- *Комплексным числом Z называется выражение*

$$**$z = x + iy,$**$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \mathit{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \mathit{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

Зачем изучать комплексные числа?

На множестве \mathbb{C} вводятся понятия функции, предела таким образом, что соответствующие понятия действительного анализа рассматриваются как частный случай. При этом сохраняются известные свойства функций действительного переменного: теоремы о пределах, правила дифференцирования, формулы интегрирования и т.д. Однако, благодаря расширению класса функций появляются новые свойства. Например, доказывается, что из существования производной функции следует существование её производных n -го порядка в области. Устанавливается, что все элементарные функции связаны между собой: тригонометрические функции выражаются через показательную функцию, а обратные тригонометрические функции – через логарифмическую. Значительно глубже, чем в анализе функций действительного переменного, развита геометрическая теория – конформные отображения. Благодаря сочетанию аналитических и геометрических методов теория функций комплексного переменного находит широкое применение в других разделах математики и прикладных задач.

Одним из важных приложений ТФКП является ***операционное исчисление***, которое применяется для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$z = iy$ – называется **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.

- **Комплексным числом Z** называется выражение

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i – так называемая **мнимая единица**.

$x = \text{Re}Z$ – действительная часть комплексного числа Z

$y = \text{Im}Z$ – мнимая часть комплексного числа Z

Если $x = 0$, то число

$$z = iy \text{ – называется } \mathbf{чисто\ мнимым}.$$

Если $y = 0$, то число

$z = x$ отождествляется с действительным числом.

Множество **R** всех действительных чисел является подмножеством множества **C** всех комплексных чисел.