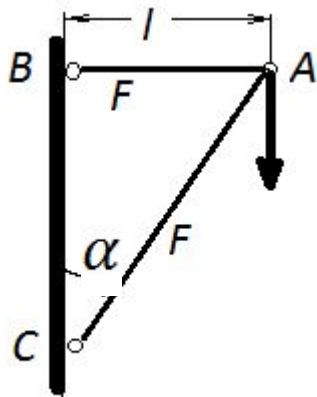


Расчет стержневых систем

Статически определимые стержневые системы

Задана стержневая система. Известны: l, α, P .

Определить усилия и напряжения в стержнях AB и AC .



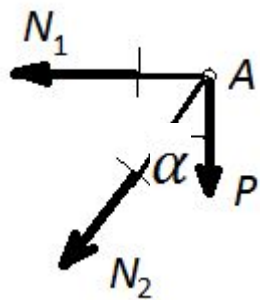
1. Составляем расчетную схему, вырезая с внешними силами,

цими на

стержни. Внутренние силы в стержнях

N_1 N_2

направляем от сечений (растяжение).



$$2. \sum X = 0 \quad -N_1 - N_2 \sin \alpha = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad -P - N_2 \cos \alpha = 0$$

Статически определимые стержневые системы

3. Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными, определяем усилие и его знак в каждом

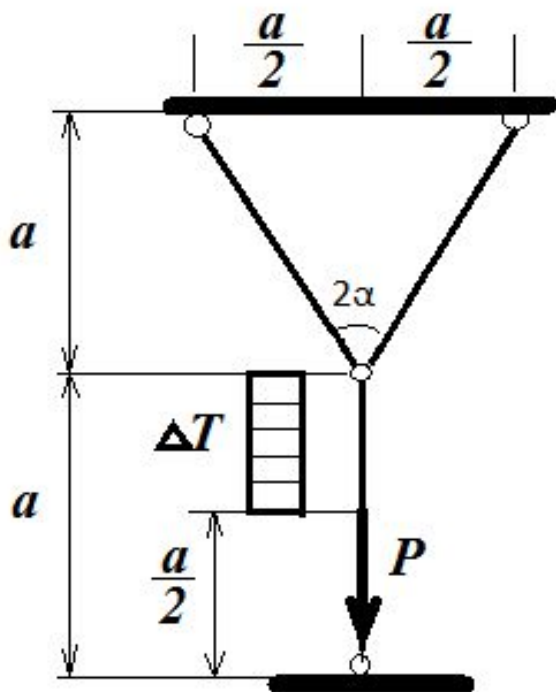
$$N_2 = -\frac{P}{\cos\alpha} \quad N_1 = -N_2 \sin\alpha = \frac{P \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Вывод: система статически определимая, для ее разрешения достаточно уравнений равновесия.

4. Для определения напряжений в стержнях нужно внутренние нормальные силы разделить на площади поперечных сечений стержней с сохранением знака нормаль

$$\sigma_1 = \frac{P \sin\alpha}{F \cos\alpha} \quad \sigma_2 = -\frac{P}{F \cos\alpha}$$

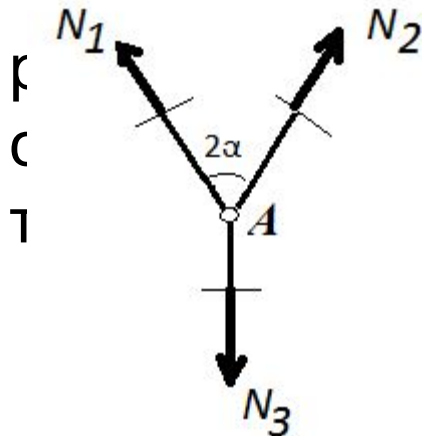
Стержневые статически неопределимые системы



Система трех стержней
жестко прикреплена к стенкам
нагружена силой P . Половина
системы нагревается на
разность температур ΔT ,
определяющие силы,
деформации
и перемещение
в точке А. Принять
 $\alpha \Delta T E F = 2P$ и известными все
прочие величины, требующиеся для
решения задачи.
Решение.

Расчет статически неопределимой стержневой системы

1. Составляем расчетную схему, разрезая все стержни и вырезая узел A со стержнями. Отброшенные связи заменяем внутренними силами в стержнях, направляя их от сечений (предполагая положительными).



2. Записываем уравнения

равновесия в одном узле, $\sum X = 0$ и $\sum Y = 0$. Отметим, если все уравнения равновесия.

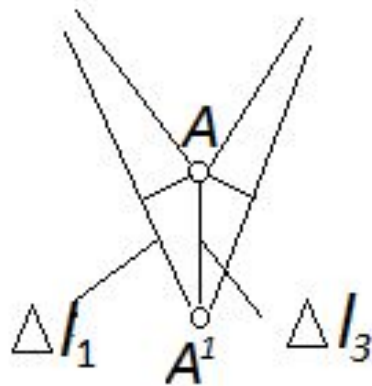
$$\sum X = 0 \quad N_1 = N_2$$

$$\sum Y = 0 \quad 2N_1 \cos \alpha = N_3$$

Расчет статически неопределимой стержневой системы

Получили два уравнения с тремя неизвестными – система статически неопределимая.

3. Для составления дополнительного уравнения используем условие совместности деформации стержней. Рассмотрим AA^1). Перемещение узла связывает деформации 1 и 3-го стержней



$$-\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha \quad \text{где}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{EF \cos \alpha}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 a}{EF} - \frac{Pa}{2EF} + \frac{\alpha \Delta T a}{2}$$

Расчет статически неопределимой стержневой системы

После подстановки получаем недостающее уравнение, связывающее усилия в 1 и 3 стержнях.

$$-\frac{N_1}{\cos^2 \alpha} = N_3 - \frac{P}{2} + \frac{\alpha \Delta T E F}{2}$$

4. После подстановки N_3 из уравнения равновесия, на N_1 и N_3 и

$$N_1 = \frac{(P - \alpha \Delta T E F) \cos^2 \alpha}{2(1 + 2 \cos^3 \alpha)}$$

$$N_3 = 2N_1 \cos \alpha = \frac{(P - \alpha \Delta T E F) \cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Расчет статически неопределимой стержневой системы

5. Напряжения в стержнях определяем как отношение нормальной силы к площади поперечного сечения.

$$\sigma_1 = \frac{(P - \alpha \Delta T E F) \cos^2 \alpha}{2F(1 + 2\cos^3 \alpha)} \quad \sigma_3 = \frac{(P - \alpha \Delta T E F) \cos^3 \alpha}{F(1 + 2\cos^3 \alpha)}$$

б. Определяем деформации стержней

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{a(P - \alpha \Delta T E F) \cos \alpha}{2EF(1 + 2\cos^3 \alpha)} \\ \Delta l_3 &= \frac{a(P - \alpha \Delta T E F) \cos^3 \alpha}{EF(1 + 2\cos^3 \alpha)} - \frac{Pa}{2EF} + \frac{\alpha \Delta T a}{2} = \\ &= -\frac{a(P - \alpha \Delta T E F)}{2EF(1 + 2\cos^3 \alpha)} \end{aligned}$$

Расчет статически неопределимой стержневой системы

7. Проверка правильности решения задачи заключается в удовлетворении исходному уравнению совместности деформаций и не противоречии здравому смыслу.

Видим, что полученное решение удовлетворяет обоим условиям.

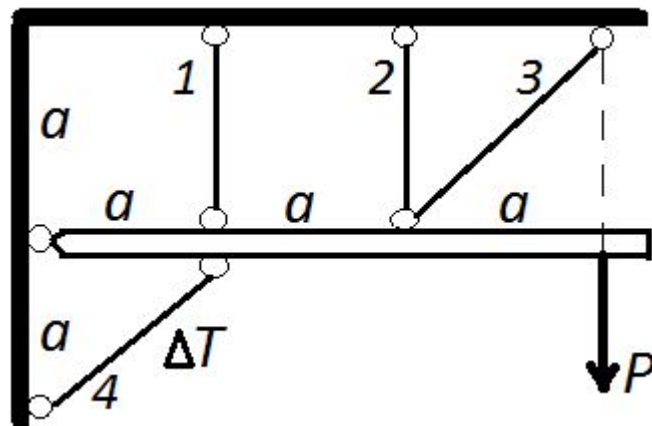
При заданных исходных данных третий стержень удлинится, узел А сместится вверх, а 1 и 2 стержни укоротятся с сохранением условия совместности деформаций.

8. При необходимости расчет на прочность

$$|\sigma_{i\max}| \leq [\sigma]$$

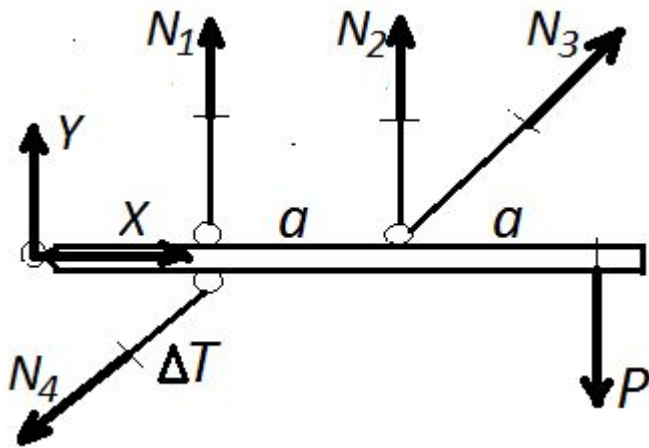
Расчет статически неопределимой стержневой системы

Жесткий недеформируемый брус закреплен на четырех одинаковых стержнях и нагружен силой P .
Определить усилия, напряжения и деформации в стержнях, считая известными нагрузку P , температуру 4-го стержня, размеры стержней, расстояния a и свойства материала стержней.



Расчет статически неопределимой стержневой системы

- Создаем расчетную схему и записываем уравнения равновесия



$$\sum X = 0 \quad X + \frac{\sqrt{2}}{2} N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y + N_1 + N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 - P = 0$$

$$\sum \text{mom} O = 0 \quad N_1 a + N_2 2a + \frac{\sqrt{2}}{2} N_3 2a - \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 a - P 3a = 0$$

- Вывод - система 3 раза статически неопределима

Расчет статически неопределимой стержневой системы

- Записываем уравнения совместности деформации стержней

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1 \quad \Delta l_3 = \frac{2\sqrt{2}}{2}\Delta l_1 \quad \Delta l_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta l_1$$

- Выражаем деформации через усилия в стержнях и вставляем их в уравнения совместности деформаций

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{EF} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EF} \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 \sqrt{2} a}{EF}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \sqrt{2} a}{EF} + \alpha \Delta T \sqrt{2} a \quad \frac{N_2 a}{EF} = \frac{2N_1 a}{EF} \quad \frac{N_3 \sqrt{2} a}{EF} = \frac{2\sqrt{2} N_1 a}{2 EF}$$

$$\frac{N_4 \sqrt{2} a}{EF} + \alpha \Delta T \sqrt{2} a = -\frac{\sqrt{2} N_1 a}{2 EF}$$

Расчет статически неопределимой стержневой системы

- Выражаем усилия во 2, 3 и 4-м стержнях через усилие в 1-м стержне и вставляем их в уравнение равновесия

$$N_2 = 2N_1 \quad N_3 = N_1 \quad 2N_4 = -N_1 - 2\alpha\Delta TEF$$

$$N_1 + 4N_1 + \sqrt{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}(N_1 + 2\alpha\Delta TEF) - 3P = 0$$

$$N_1 = \frac{2(6P - \sqrt{2}\alpha\Delta TEF)}{20 + 5\sqrt{2}} \quad N_2 = \frac{4(6P - \sqrt{2}\alpha\Delta TEF)}{20 + 5\sqrt{2}}$$

$$N_3 = \frac{2(6P - \sqrt{2}\alpha\Delta TEF)}{20 + 5\sqrt{2}} \quad N_4 = -\frac{6P - (20 + 6\sqrt{2})\alpha\Delta TEF}{20 + 5\sqrt{2}}$$

Расчет статически неопределимой стержневой системы

- Определяем деформации каждого стержня и проверяем правильность решения

$$\Delta l_1 = \frac{2(6P - \sqrt{2}\alpha\Delta TEF)a}{(20 + 5\sqrt{2})EF} \quad \Delta l_2 = \frac{4(6P - \sqrt{2}\alpha\Delta TEF)a}{(20 + 5\sqrt{2})EF}$$

$$\Delta l_3 = \frac{2(6P - \sqrt{2}\alpha\Delta TEF)\sqrt{2}a}{(20 + 5\sqrt{2})EF} \quad \Delta l_4 = -\frac{(6P - \sqrt{2}\alpha\Delta TEF)\sqrt{2}a}{(20 + 5\sqrt{2})EF}$$

- Уравнения совместности деформаций выполняются, т.е.
задача решена правильно