

***Тригонометрические
функции числового
аргумента***

Тригонометрические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Вернемся к формуле

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 / : \sin^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 / : \cos^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Дано: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (II четверть)

Найти: $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$

Решение:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} = -\frac{5}{12}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{12}{5}$$

$$\text{Ответ: } \cos \alpha = -\frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}$$

2) Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\text{где } \alpha < \frac{\pi}{2}$ (I кв.)

Найти: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$

Решение:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 4}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

3) Упростите выражение :

$$a) \operatorname{ctg}^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot (-\sin^2 \alpha) = -\cos^2 \alpha$$

$$б) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2 + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{2(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

4) Докажите тождество :

$$\operatorname{tg}^2 t - \sin^2 t = \operatorname{tg}^2 t \cdot \sin^2 t$$

Рассмотрим левую часть

$$\operatorname{tg}^2 t - \sin^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{1} = \frac{\sin^2 t - \sin^2 t \cos^2 t}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{\sin^2 t (1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t} = \operatorname{tg}^2 t \cdot \sin^2 t$$

$$\operatorname{tg}^2 t \cdot \sin^2 t = \operatorname{tg}^2 t \cdot \sin^2 t$$

Вывод : Тождество доказано.

Формулы приведения

Это формулы позволяющие
выражать значения
тригонометрических функций
любого угла через функции угла
первой четверти, т. е. $< 90^\circ$

Например: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \cos(2\pi + \alpha) \dots$

Всего из 32. Применяется следующее правило

Мнемоническое правило

Достаточно задать себе два вопроса:

1. Меняется ли функция на кофункцию?

Ответ. Если в формуле присутствуют углы вертикальной оси - 90° ($\pi/2$) или 270° ($3\pi/2$), киваем головой по вертикали и сами себе

отвечаем: «Да»,

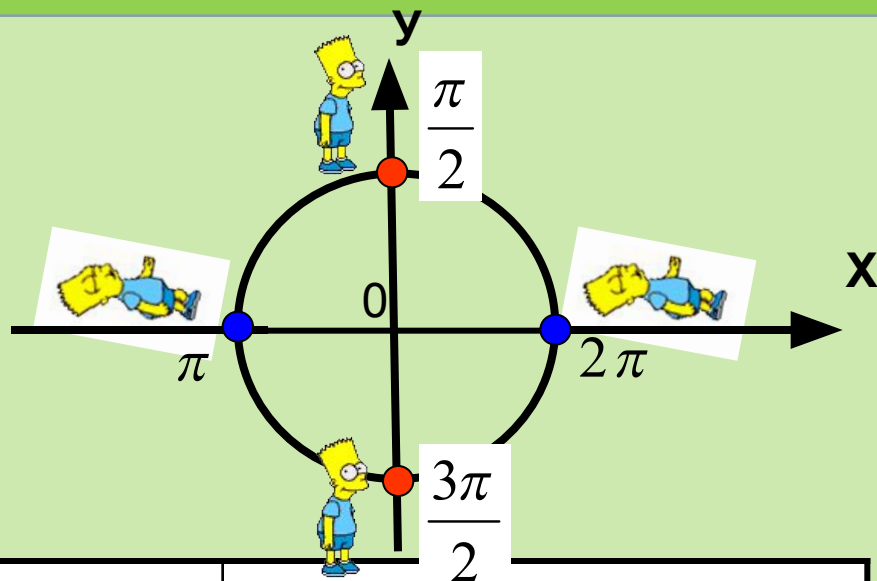
если же присутствуют углы горизонтальной оси 0° (π) или 360° (2π), то киваем головой по горизонтали и получаем **ответ: «Нет».**

2. Какой знак надо поставить в правой части формулы?

Ответ. Знак определяем по левой части.

Смотрим, в какую четверть попадает данный угол, и вспоминаем, какой знак в этой четверти имеет функция, стоящая в левой части.

Правило



	Приведение через «рабочие» углы: $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$ ($90^\circ; 270^\circ$)	Приведение через «спящие» углы: $\pi; 2\pi$ ($180^\circ; 360^\circ$)
Название функции	Меняется на кофункцию	Не меняется
Знак	Определяется по знаку функции в левой части формулы	

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Например :

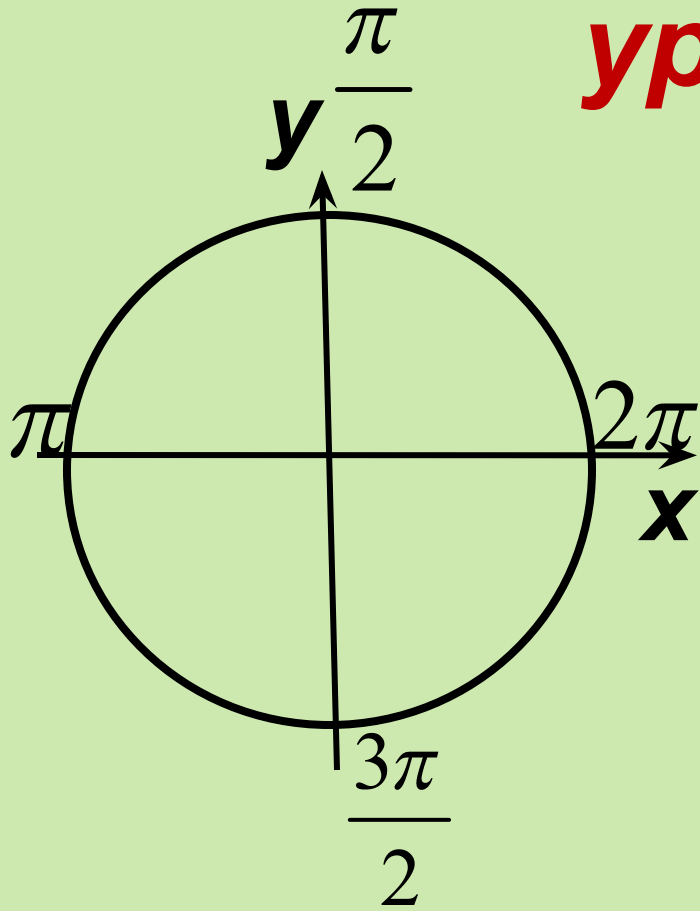
$$1) \cos \frac{8\pi}{3} = \cos 2\frac{2}{3}\pi = \cos(3\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$2) \sin(-585^\circ) = -\sin(360^\circ + 225^\circ) = -\sin 225^\circ = \\ = -\sin(180^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \operatorname{tg} 45\pi = \operatorname{tg} \pi = 0$$

$$4) \operatorname{ctg}(-\frac{5\pi}{4}) = -\operatorname{ctg}(1\frac{1}{4}\pi) = -\operatorname{ctg}(\pi + \frac{\pi}{4}) = \\ = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1$$

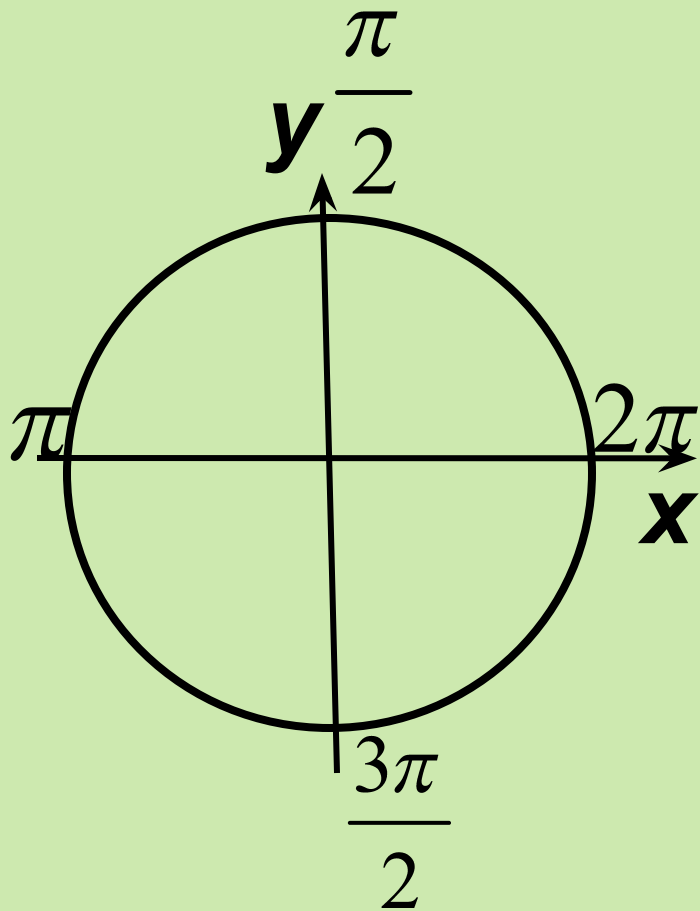
Решение простейших уравнений



$$\sin x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1$$
$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1$$

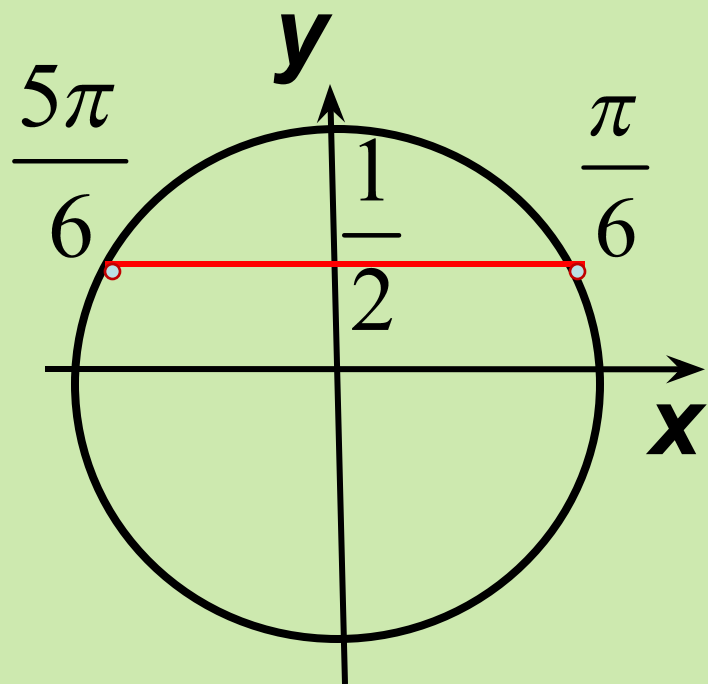
$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0$$

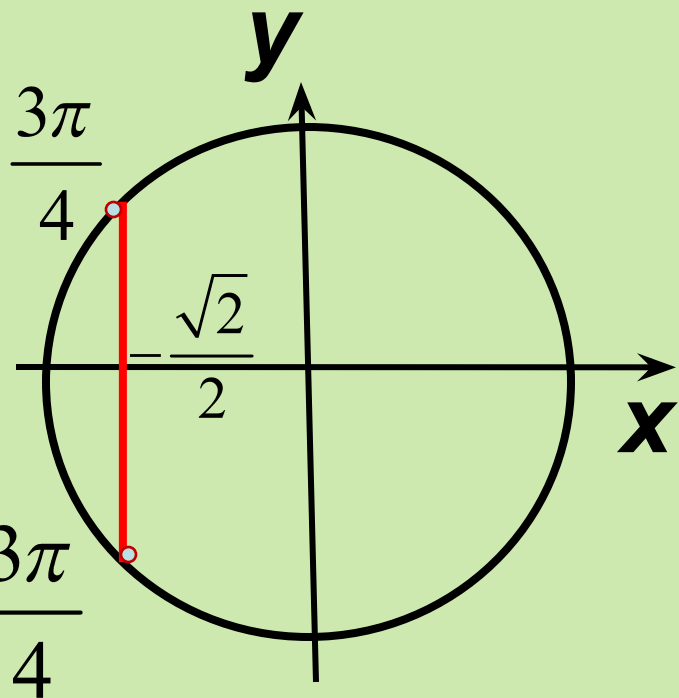
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$