Тригонометрические функции числового аргумента

Тригонометрические формулы

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\begin{gathered} tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{gathered}}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

$$\boxed{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

Вернемся к формуле

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1/:\sin^2\alpha$$

$$\boxed{1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1/:\cos^2\alpha$$

$$\boxed{tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$$

$$ctg\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+ctg^2\alpha}$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}}$$

$$\boxed{1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$$

$$tg\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}$$

$$Дано: \sin\alpha = \frac{5}{13},\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \ (II\ четв.)$$

$$Найти: \cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$$

$$Решение:$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{13}\cdot\frac{13}{12} = -\frac{5}{12}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{12}{5}$$

$$Ответ: \cos\alpha = -\frac{12}{13},\ tg\alpha = -\frac{5}{12},\ ctg\alpha = -\frac{12}{5}$$

$$2)\ \text{Дано}: tg\alpha = 2, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\ (I\ \text{четв}.)$$

$$\text{Найти}: \sin\alpha,\ \cos\alpha,\ ctg\alpha$$

$$\text{Решение}:$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+4}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Ответ}: ctg\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

3) *Упростите выражение:*

$$a)\ ctg^2\alpha(\cos^2\alpha-1)=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot(-\sin^2\alpha)=-\cos^2\alpha$$

$$б)\ \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

$4)$ *Докажите тождество:*

$$tg^2 t - \sin^2 t = tg^2 t \cdot \sin^2 t$$

Рассмотрим левую часть

$$tg^2 t - \sin^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{1} = \frac{\sin^2 t - \sin^2 t \cos^2 t}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{\sin^2 t(1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t} = tg^2 t \cdot \sin^2 t$$

$$tg^2 t \cdot \sin^2 t = tg^2 t \cdot \sin^2 t$$

Вывод: Тождество доказано.

Формулы приведения

Это формулы позволяющие выражать значения тригонометрических функций любого угла через функции угла первой четверти, т. е. < 90°

$$Например:\ \ \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha),\ \ \cos(2\pi+\alpha)...$$

Всего из 32. Применяется следующее правило

Мнемоническое правило

Достаточно задать себе два вопроса:

1. Меняется ли функция на кофункцию?

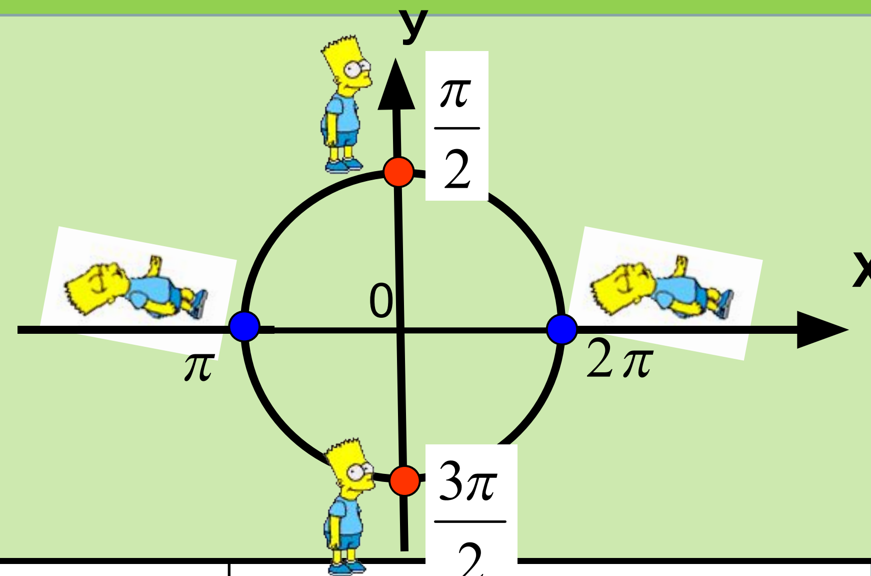
Ответ. **Если в формуле присутствуют углы вертикальной оси - 90° *(π/2)* или 270° *(3π/2)*, киваем головой по вертикали и сами себе отвечаем: «Да»,**

если же присутствуют углы горизонтальной оси 0° *(π)* или 360° *(2π)*, то киваем головой по горизонтали и получаем ответ: «Нет».

2. Какой знак надо поставить в правой части формулы?

Ответ. **Знак определяем по левой части. Смотрим, в какую четверть попадает данный угол, и вспоминаем, какой знак в этой четверти имеет функция, стоящая в левой части.**

Правило



	Приведение через **«рабочие»** углы: $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} (90°; 270°)$	Приведение через **«спящие»** углы: $\pi; 2\pi (180°; 360°)$
Название функции	**Меняется на кофункцию**	**Не меняется**
Знак	**Определяется по знаку функции в левой части формулы**	

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$ctg(2\pi - \alpha) = -ctg\alpha$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$tg(270^0 - \alpha) = ctg\alpha$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Например :

$$1)\cos\frac{8\pi}{3}=\cos 2\frac{2}{3}\pi = \cos(3\pi-\frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$2)\sin(-585^\circ)=-\sin(360^\circ+225^\circ)=-\sin 225^\circ=$$

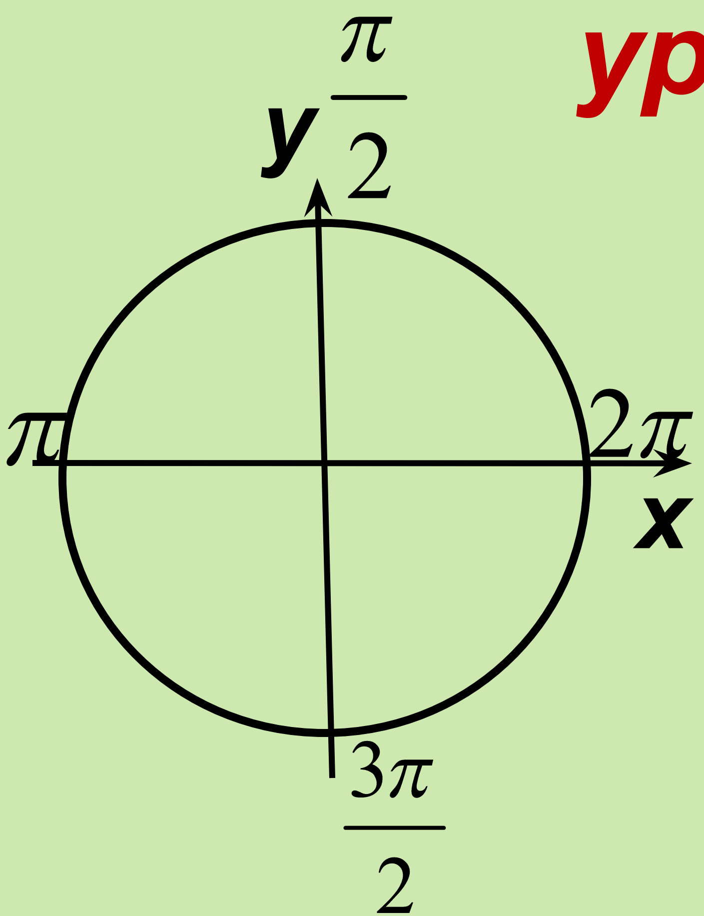
$$=-\sin(180^\circ+45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3)tg\,45\pi=tg\,\pi=0$$

$$4)\operatorname{ctg}(-\frac{5\pi}{4})=-ctg(1\frac{1}{4}\pi)=-ctg(\pi+\frac{\pi}{4})=$$

$$=-ctg\frac{\pi}{4}=-1$$

Решение простейших уравнений



$$\sin x = 1$$

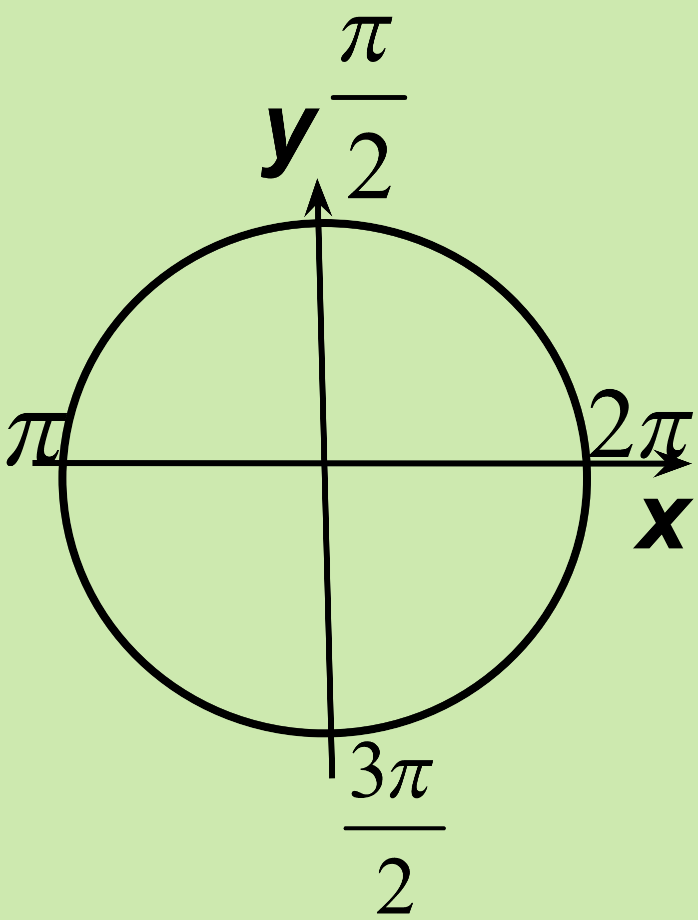
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin x = -1$$

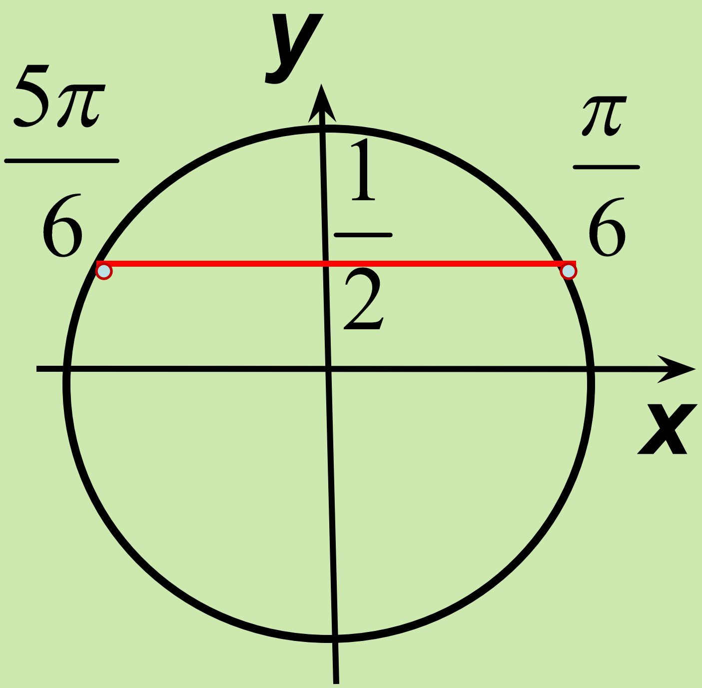
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$



$$\cos x = -1$$
$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 0$$
$$x = \pi n, n \in Z$$

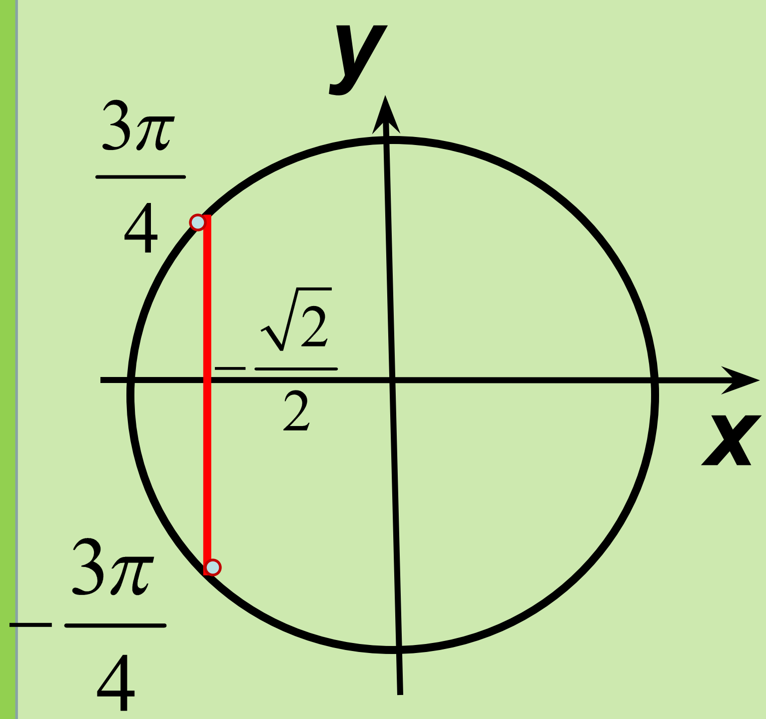
$$\cos x = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$



$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$



$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$