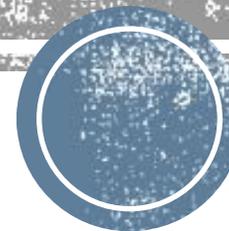


Первообразная и интеграл



Функция	Первообразные
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^p, p \neq -1, k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\sin(kx+b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx+b) + C$
$\cos(kx+b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$



Примеры применения этих формул

Функция	Первообразная
$(3x - 1)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{9}(3x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$
$\sin(5x + 2)$	$-\frac{1}{5}\cos(5x + 2) + C$
$\cos(5x + 2)$	$\frac{1}{5}\sin(5x + 2) + C$



Найти первообразную функций

1) $f(x) = x^4$

2) $f(x) = x^5 + x^7$

3) $f(x) = 3x^2 + x$

4) $f(x) = x + 5x^3 + 5$

5) $f(x) = 4 + \sin x$



Найти первообразную функций

$$1) f(x) = x^4$$

$$2) f(x) = x^5 + x^7$$

$$3) f(x) = 3x^2 + x$$

$$4) f(x) = x + 5x^3 + 5$$

$$5) f(x) = 4 + \sin x$$

$$1) F(x) = \frac{x^5}{5}$$

$$2) F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$$

$$3) F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2}$$

$$4) F(x) = \frac{x^2}{2} + 5 * \frac{x^4}{4} + 5x$$

$$5) F(x) = 4x + \cos x$$



1

Определите, является ли функция F первообразной для функции f на \mathcal{R} , если:

$$F(x) = 2x^4 + \cos^2 x - 3,$$

$$f(x) = 8x^3 + \sin 2x - 3x.$$

$$F(x) = 3x^5 - \sin^2 x + 2,$$

$$f(x) = 15x^4 - \sin 2x.$$

2

Найдите общий вид первообразных для функций:

$$\text{а) } f(x) = \frac{4}{x^5} - (1 - 2x)^3;$$

$$\text{б) } f(x) = x + \frac{2}{\cos^2 x} - 1.$$

$$\text{а) } f(x) = (3x + 2)^4 - \frac{1}{x^6};$$

$$\text{б) } f(x) = 2x - \frac{3}{\sin^2 x} + 6.$$

3

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A , если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}} + 3x^2,$$

$$A(-1; 0);$$

$$\text{б) } f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - 2 \cos \frac{x}{2},$$

$$A(2\pi; 2\pi).$$

$$\text{а) } f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}},$$

$$A(2; 0);$$

$$\text{б) } f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x +$$

$$+ \frac{1}{3} \sin 3x, \quad A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right).$$



Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где C - произвольная постоянная.

- Пример: $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$

Так как первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.



Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c = \text{const}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$



Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал - подынтегральному выражению. Действительно:

$$1. (\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

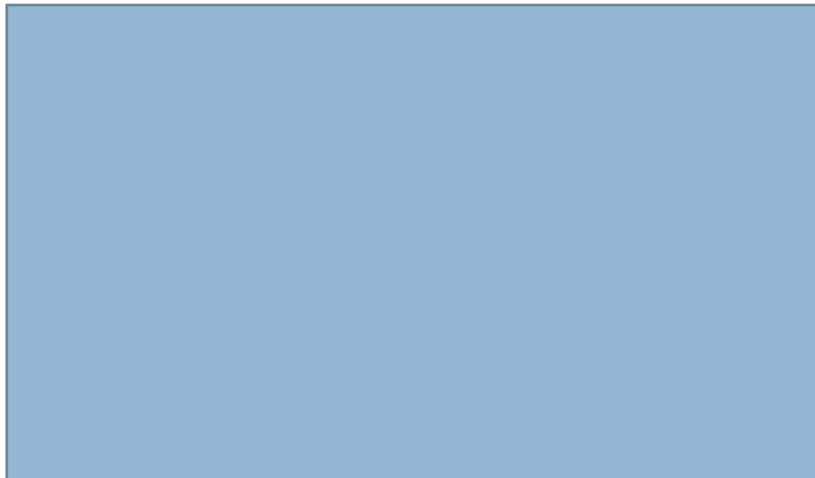
$$2. d \int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx.$$



Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$



6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctgx} + C .$



Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$



Примеры

Пример 1 . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \cos 5x dx &= \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \sin 5x + C . \end{aligned}$$



Примеры

Пример 2. Вычислить $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx &= \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$



1

Найдите функцию f , для которой функция F является одной из первообразных на \mathbb{R} , если:

$$F(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \operatorname{arccotg} x + 2x.$$

$$F(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) + \operatorname{arctg} x - 3x^2.$$

2

Найдите неопределенный интеграл:

$$\text{а) } \int \left(\frac{8}{\sin^2 x} + 6 \cos^2 \frac{x}{6} \right) dx;$$

$$\text{а) } \int \left(\frac{8}{\cos^2 x} - 8 \sin^2 2x \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left(3 - \frac{2}{(2x+5)^2} \right) dx.$$

$$\text{б) } \int \left(\frac{6}{(3x-1)^3} - 5 \right) dx.$$

3

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A , если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{2}{\sqrt{5-2x}} + 4x, \quad A(2; 6);$$

$$\text{а) } f(x) = 6x^2 - \frac{1}{6\sqrt{2-\frac{x}{3}}}, \quad A(3; 55)$$

$$\text{б) } f(x) = \sin x \sin 5x, \quad A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$$

$$\text{б) } f(x) = \cos x \cos 5x, \quad A\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$$

