Первообразная и интеграл

Функция	Первообразные
$x^p,\ p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^p,\ p \neq -1,\ k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\sin(kx+b),\ k \neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b) + C$
$\cos(kx+b),\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b) + C$

Примеры применения этих формул

Функция	Первообразная
$(3x-1)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$
$\sin(5x+2)$	$-\frac{1}{5}\cos(5x+2)+C$
$\cos(5x+2)$	$\frac{1}{5}\sin(5x+2)+C$

Найти первообразную функций

$1)\, f(x) = x^4$

$2)\, f(x) = x^5 + x^7$

$3)\, f(x) = 3x^2 + x$

$4)\, f(x) = x + 5x^3 + 5$

$5)\, f(x) = 4 + \sin x$

Найти первообразную функций

1) $f(x) = x^4$

2) $f(x) = x^5 + x^7$

3) $f(x) = 3x^2 + x$

4) $f(x) = x + 5x^3 + 5$

5) $f(x) = 4 + \sin x$

1) $F(x) = \frac{x^5}{5}$

2) $F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$

3) $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2}$

4) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5 * \frac{x^4}{4} + 5x$

5) $F(x) = 4x + \cos x$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Определите, является ли функция F первообразной для функции f на R, если:

Б1:

$F(x) = 2x^4 + \cos^2 x - 3,$
$f(x) = 8x^3 + \sin 2x - 3x.$

Б2:

$F(x) = 3x^5 - \sin^2 x + 2,$
$f(x) = 15x^4 - \sin 2x.$

2

Найдите общий вид первообразных для функций:

Б1:

а) $f(x) = \dfrac{4}{x^5} - (1 - 2x)^3;$

б) $f(x) = x + \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1.$

Б2:

а) $f(x) = (3x + 2)^4 - \dfrac{1}{x^6};$

б) $f(x) = 2x - \dfrac{3}{\sin^2 x} + 6.$

3

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A, если:

Б1:

а) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} + 3x^2,$ $A(-1; 0);$

б) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - 2\cos\dfrac{x}{2},$ $A(2\pi; 2\pi).$

Б2:

а) $f(x) = 4x^3 - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}},$ $A(2; 0);$

б) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \dfrac{1}{3}\sin 3x,$ $A\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right).$

Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции f(x) называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где C – произвольная постоянная.

- Пример: $$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

  Так как первообразной для функции f(x)=x на всей числовой оси является F(x)=x^2/2, поскольку (x^2/2)’=x.

Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал- подынтегральному выражению. Действительно:

$$1.\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2.\, d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\, arctg\, \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

Примеры

Пример1 . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \sin 5x + C .$$

Примеры

Пример 2. Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Вариант В1 | **Вариант В2**

1

Найдите функцию f, для которой функция F является одной из первообразных на R, если:

В1: $F(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \operatorname{arcctg} x + 2x.$

В2: $F(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) + \operatorname{arctg} x - 3x^2.$

2

Найдите неопределенный интеграл:

В1:

а) $\int\left(\frac{8}{\sin^2 x} + 6\cos^2\frac{x}{6}\right)dx;$

б) $\int\left(3 - \frac{2}{(2x+5)^2}\right)dx.$

В2:

а) $\int\left(\frac{8}{\cos^2 x} - 8\sin^2 2x\right)dx;$

б) $\int\left(\frac{6}{(3x-1)^3} - 5\right)dx.$

3

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A, если:

В1:

а) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{5-2x}} + 4x,\ A(2;6);$

б) $f(x) = \sin x \sin 5x,\ A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$

В2:

а) $f(x) = 6x^2 - \frac{1}{6\sqrt{2 - \frac{x}{3}}},\ A(3;55)$

б) $f(x) = \cos x \cos 5x,\ A\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$