

Новая Школа



Подготовка к ЕГЭ по математике 2019

Расстояния



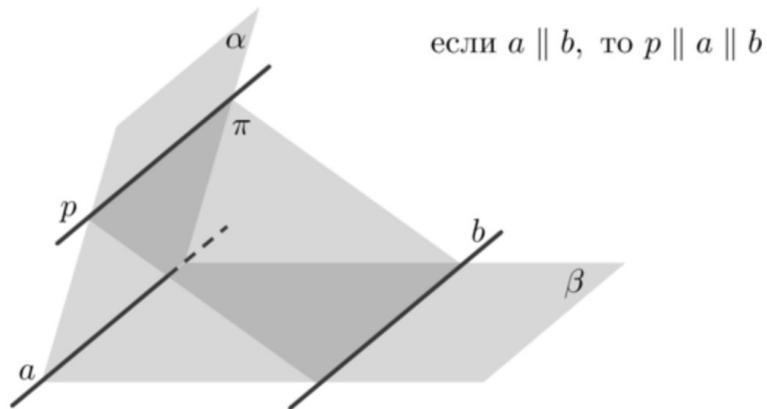
Задание №14

План занятия

- ❑ Основные факты стереометрии
- ❑ Расстояние между прямыми и плоскостями
- ❑ Расстояние от точки до прямой и до плоскости
- ❑ Задача из досрочного ЕГЭ 2019

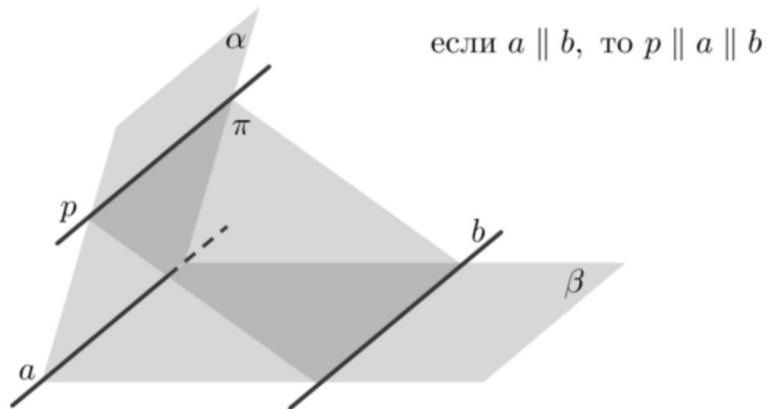
1. Параллельность прямых

- Две прямые в пространстве параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
- Через две параллельные прямые проходит плоскость, и притом только одна.
- Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



1. Параллельность прямых

- Если прямая a параллельна прямой b , а та в свою очередь параллельна прямой c , то $a \parallel c$.
- Пусть плоскость α и β пересекаются по прямой a , плоскости β и π пересекаются по прямой b , плоскости π и α пересекаются по прямой p . Тогда если $a \parallel b$, то $p \parallel a$ (или $p \parallel b$):



2. Параллельность прямой и плоскости

- Существует три вида взаимного расположения прямой и плоскости:
 1. прямая имеет с плоскостью две общие точки (то есть лежит в плоскости);
 2. прямая имеет с плоскостью ровно одну общую точку (то есть пересекает плоскость);
 3. прямая не имеет с плоскостью общих точек (то есть параллельна плоскости).



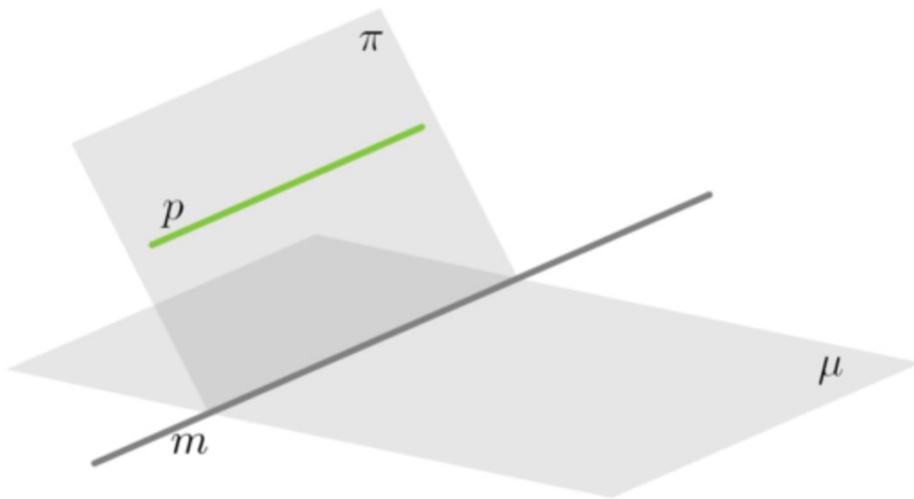
2. Параллельность прямой и плоскости

- Если прямая a , не лежащая в плоскости π , параллельна некоторой прямой p , лежащей в плоскости π , то она параллельна данной плоскости.



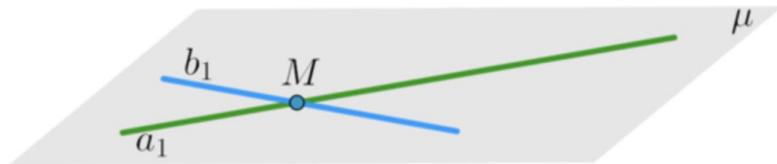
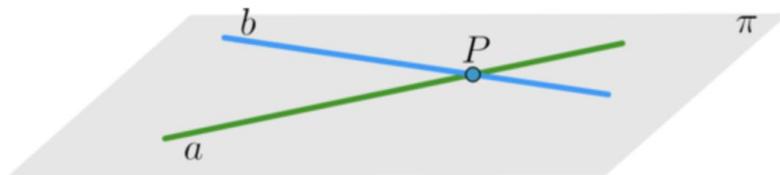
2. Параллельность прямой и плоскости

- Пусть прямая r параллельна плоскости μ . Если плоскость π проходит через прямую r и пересекает плоскость μ , то линия пересечения плоскостей π и μ — прямая m — параллельна прямой r .



3. Параллельность плоскостей

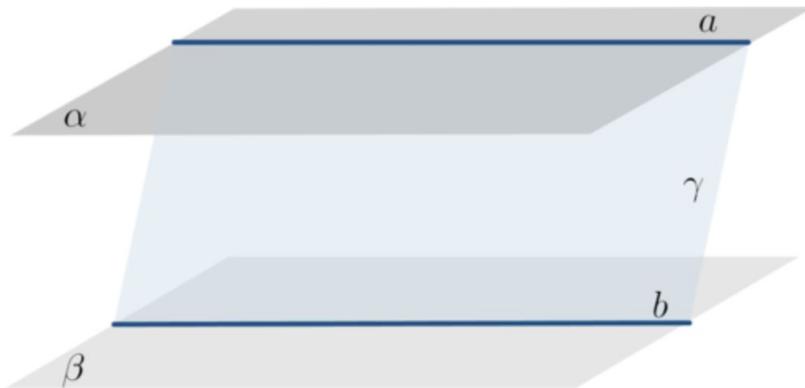
- Если две плоскости не имеют общих точек, то они называются параллельными плоскостями.
- Если две пересекающиеся прямые из одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым из другой плоскости, то такие плоскости будут параллельны.



3. Параллельность плоскостей

- Если две параллельные плоскости α и β пересечены третьей плоскостью γ , то линии пересечения плоскостей также параллельны:

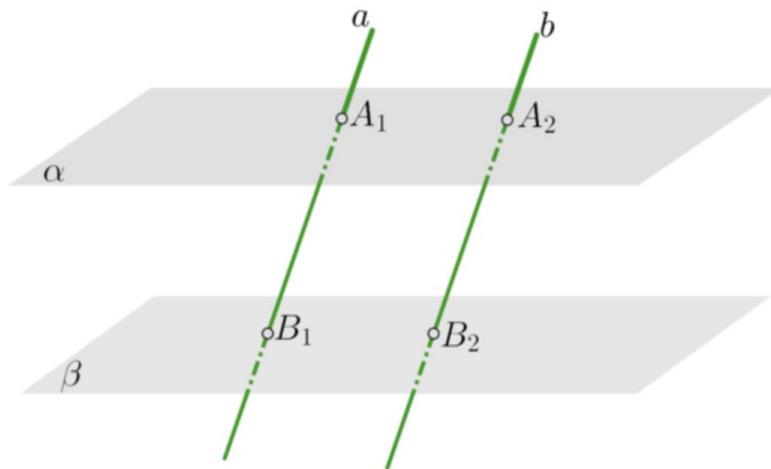
$$\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b \implies a \parallel b$$



3. Параллельность плоскостей

- Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны:

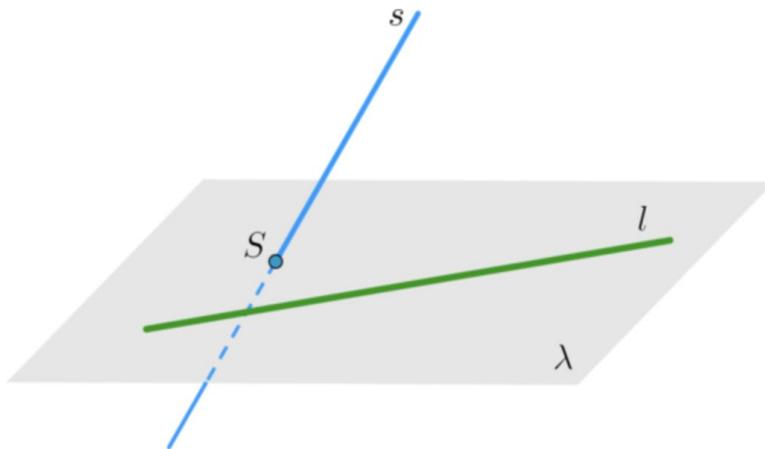
$$\alpha \parallel \beta, a \parallel b \implies A_1B_1 = A_2B_2$$



4. Скрещивающиеся прямые

- Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.
- Признак:

Пусть прямая l лежит в плоскости λ . Если прямая s пересекает плоскость λ в точке S , не лежащей на прямой l , то прямые l и s скрещиваются.

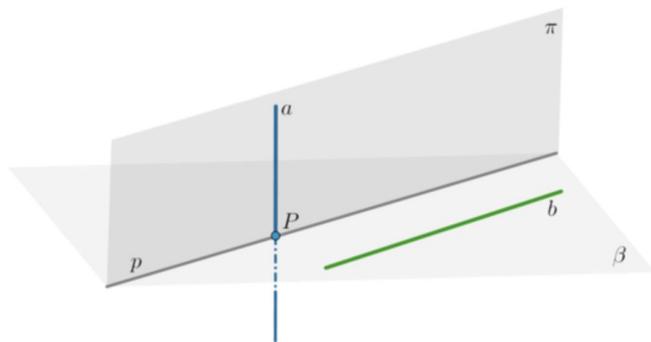


4. Скрещивающиеся прямые

- алгоритм нахождения угла между скрещивающимися прямыми a и b :

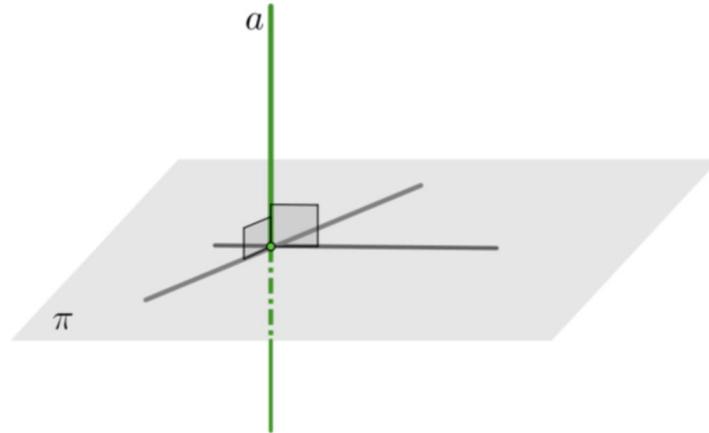
Шаг 1. Через одну из двух скрещивающихся прямых a провести плоскость π параллельно другой прямой b . Как это сделать: проведем плоскость β через прямую b так, чтобы она пересекала прямую a в точке P ; через точку P проведем прямую $p \parallel b$; тогда плоскость, проходящая через a и p , и есть плоскость π .

Шаг 2. В плоскости π найти угол между прямыми a и p ($p \parallel b$). Угол между ними будет равен углу между скрещивающимися прямыми a и b .



5. Перпендикулярность прямой и плоскости

- Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.
- Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.
- Признак: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.



6. Расстояния

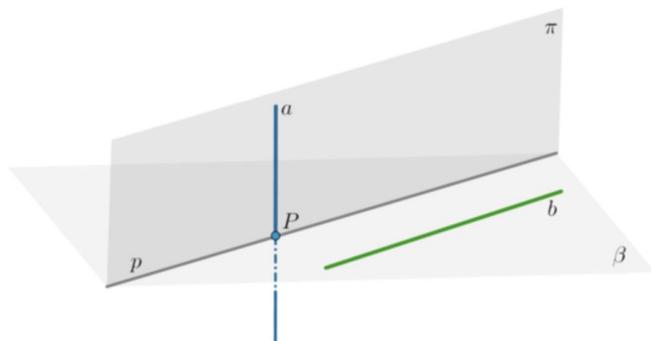
- Для того, чтобы найти расстояние между параллельными прямыми, нужно из любой точки одной прямой опустить перпендикуляр на другую прямую. Длина перпендикуляра и есть расстояние между этими прямыми.
- Для того, чтобы найти расстояние между плоскостью и параллельной ей прямой, нужно из любой точки прямой опустить перпендикуляр на эту плоскость. Длина перпендикуляра и есть расстояние между этой прямой и плоскостью.
- Для того, чтобы найти расстояние между параллельными плоскостями, нужно из любой точки одной плоскости опустить перпендикуляр к другой плоскости. Длина этого перпендикуляра и есть расстояние между параллельными плоскостями.

6. Расстояния

- алгоритм нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми a и b :

Шаг 1. Через одну из двух скрещивающихся прямых a провести плоскость π параллельно другой прямой b . Как это сделать: проведем плоскость β через прямую b так, чтобы она пересекала прямую a в точке P ; через точку P проведем прямую $p \parallel b$; тогда плоскость, проходящая через a и p , и есть плоскость π .

Шаг 2. Найдите расстояние от любой точки прямой b до плоскости π . Это расстояние и есть расстояние между скрещивающимися прямыми a и b .

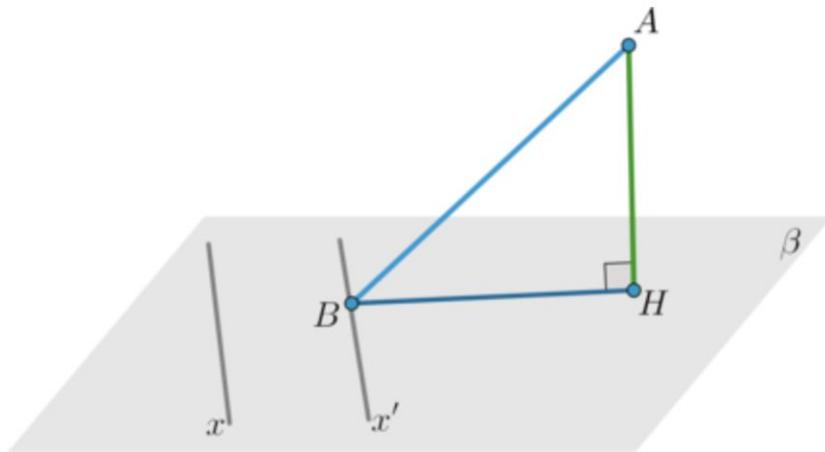


7. Теорема о трех перпендикулярах

• Пусть AH – перпендикуляр к плоскости β . Пусть AB, BH – наклонная и ее проекция на плоскость β . Тогда прямая x в плоскости β будет перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции:

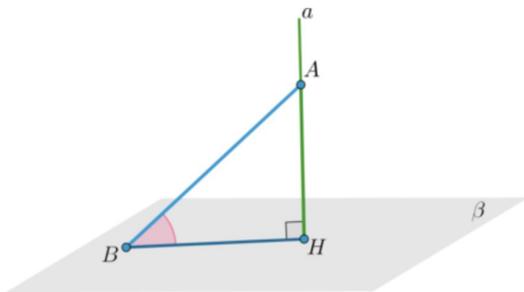
$$1. AH \perp \beta, AB \perp x \Rightarrow BH \perp x$$

$$2. AH \perp \beta, BH \perp x \Rightarrow AB \perp x$$



8. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями

- Угол между наклонной прямой и плоскостью — это угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. Таким образом, данный угол принимает значения из промежутка $(0^\circ; 90^\circ)$. Если прямая лежит в плоскости, то угол между ними считается равным 0° . Если прямая перпендикулярна плоскости, то, исходя из определения, угол между ними равен 90° .
- Чтобы найти угол между наклонной прямой и плоскостью, необходимо отметить некоторую точку A на этой прямой и провести перпендикуляр AH к плоскости. Если B — точка пересечения прямой с плоскостью, то $\angle ABH$ и есть искомый угол.



8. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями

• Для того, чтобы найти угол между плоскостями α и β , можно действовать по следующему алгоритму:

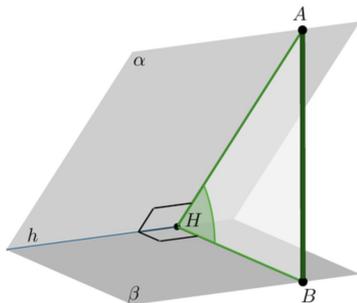
Отметить произвольную точку A в плоскости α .

Провести $AH \perp h$, где h — линия пересечения плоскостей.

Провести AB перпендикулярно плоскости β .

Тогда AB — перпендикуляр к плоскости β , AH — наклонная, следовательно, HB — проекция. Тогда по ТТП $HB \perp h$.

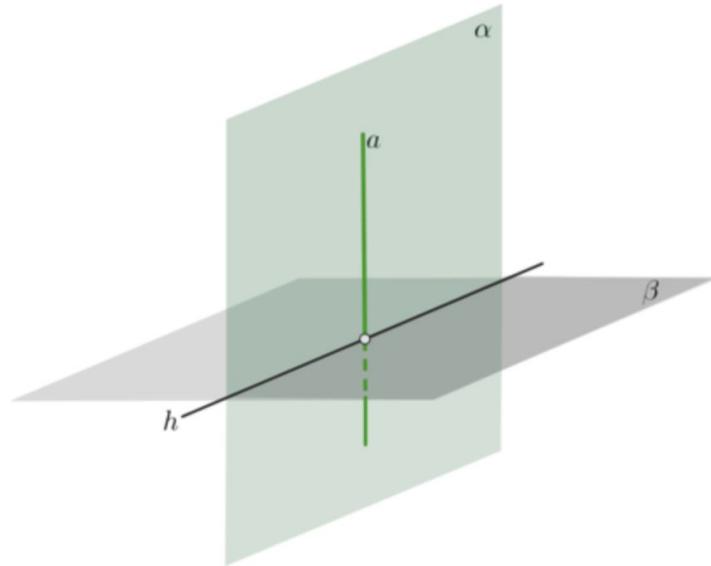
Следовательно, $\angle AHB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями. Градусная мера этого угла и есть градусная мера угла между плоскостями.



9. Перпендикулярность плоскостей

- Признак: если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

$$a \perp \beta, a \in \alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta$$



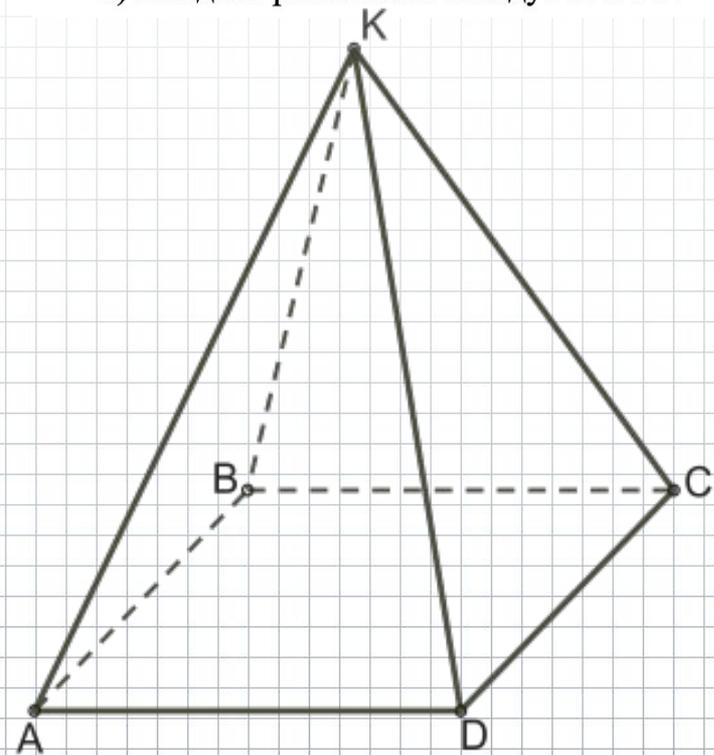
План занятия

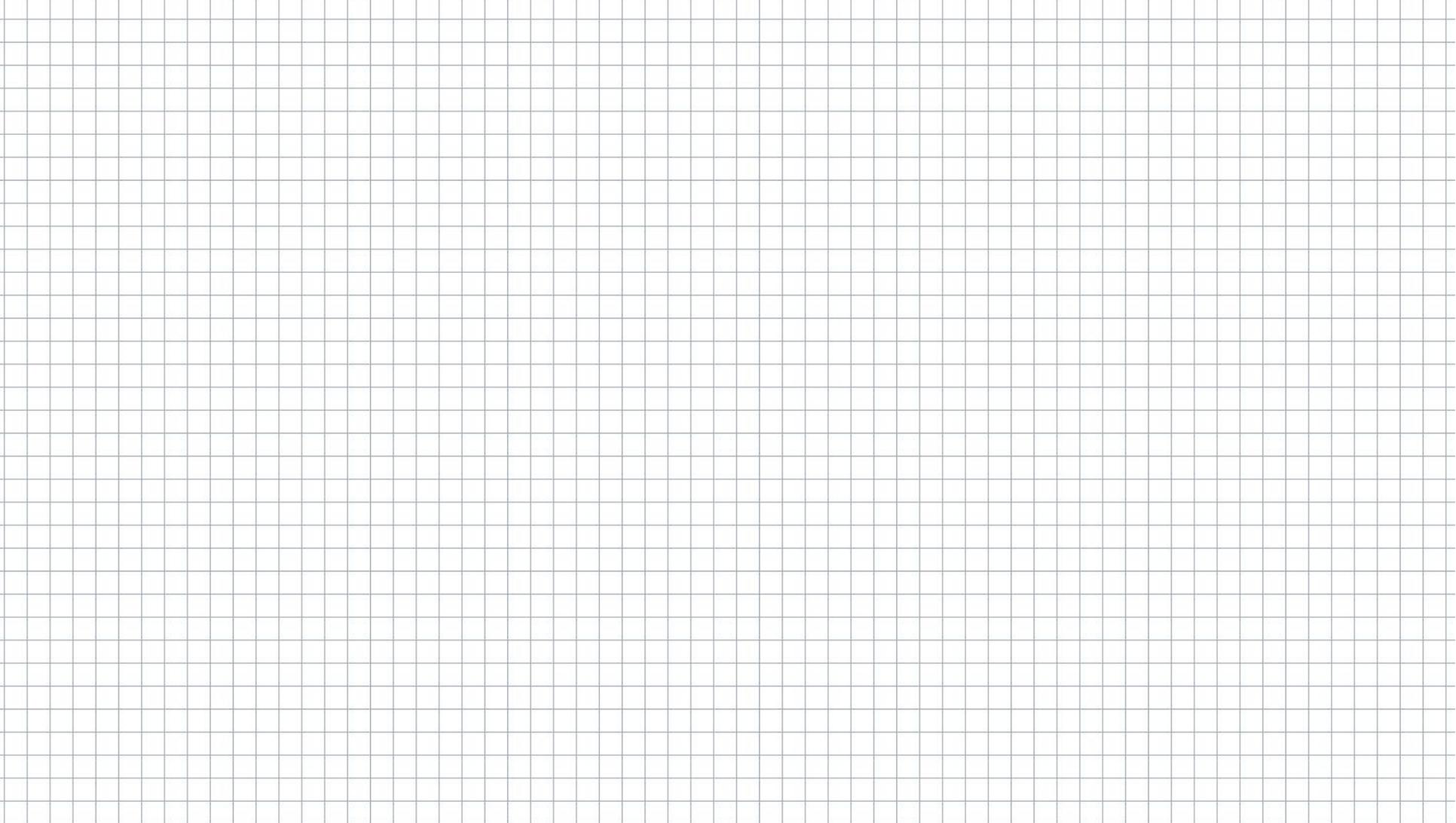
- Основные факты стереометрии
- Расстояние между прямыми и плоскостями
- Расстояние от точки до прямой и до плоскости
- Задача из досрочного ЕГЭ 2019

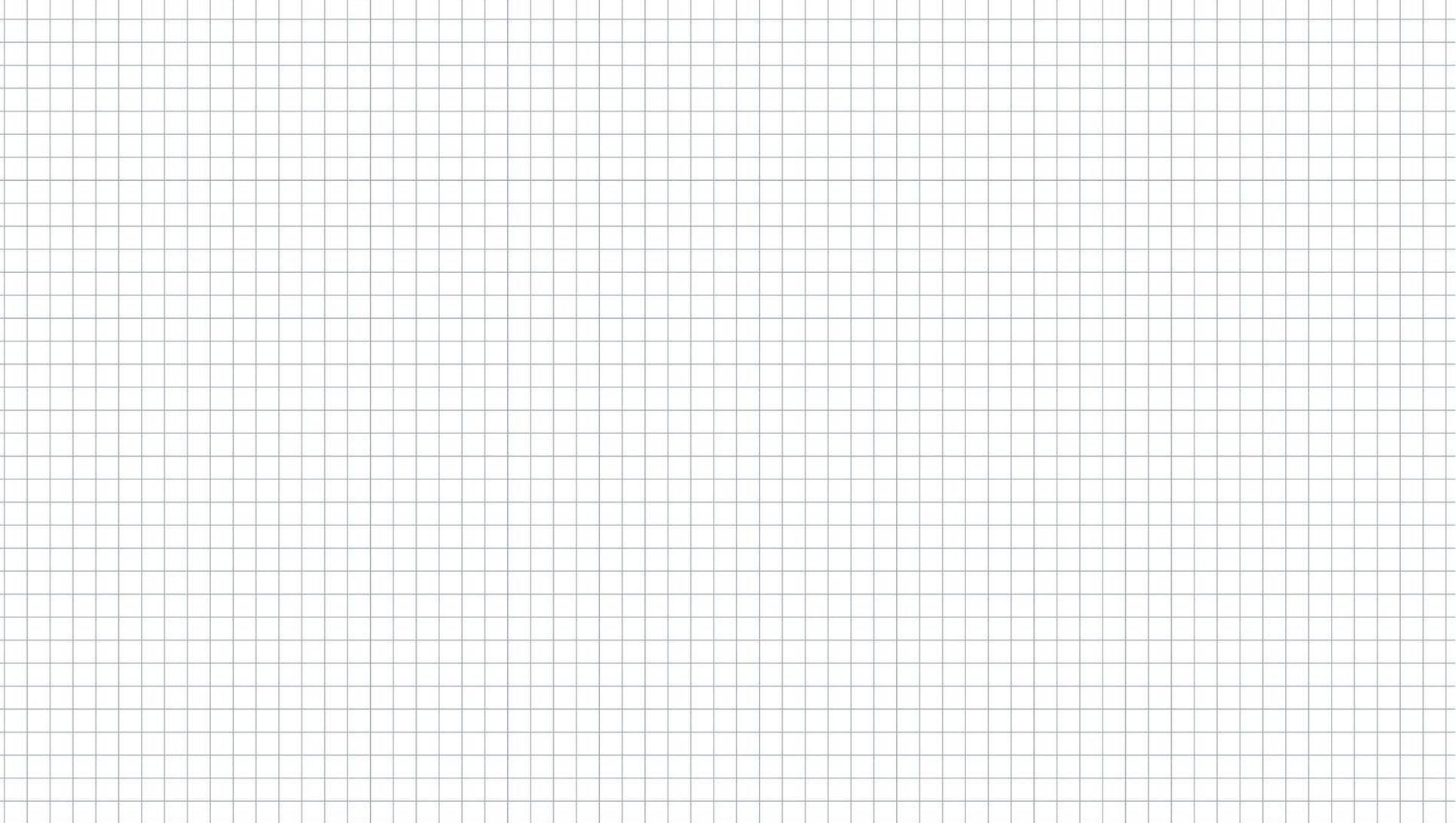
Задание №1

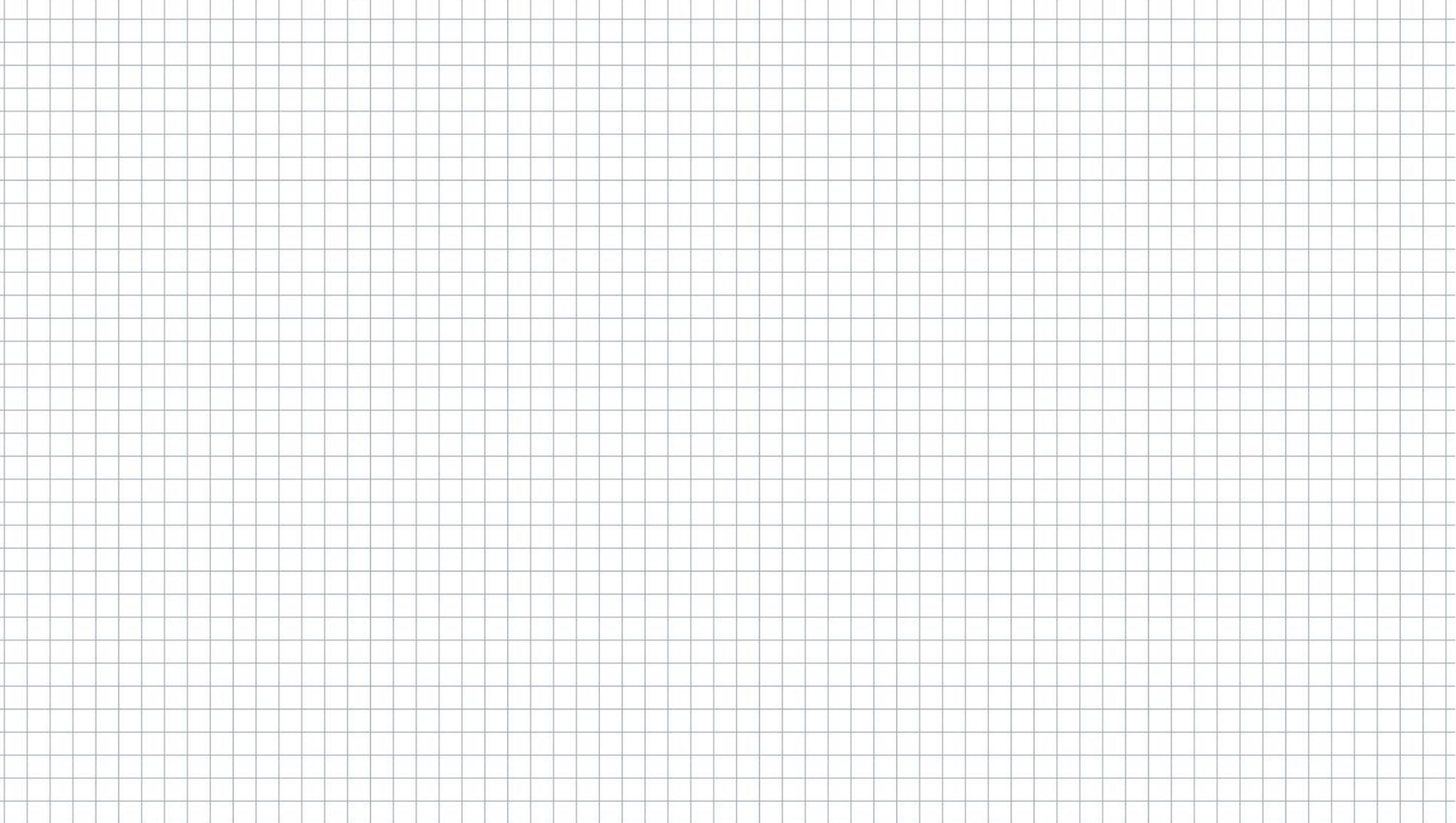
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD .

- Докажите, что точка T является серединой SM .
- Найдите расстояние между NT и SC .







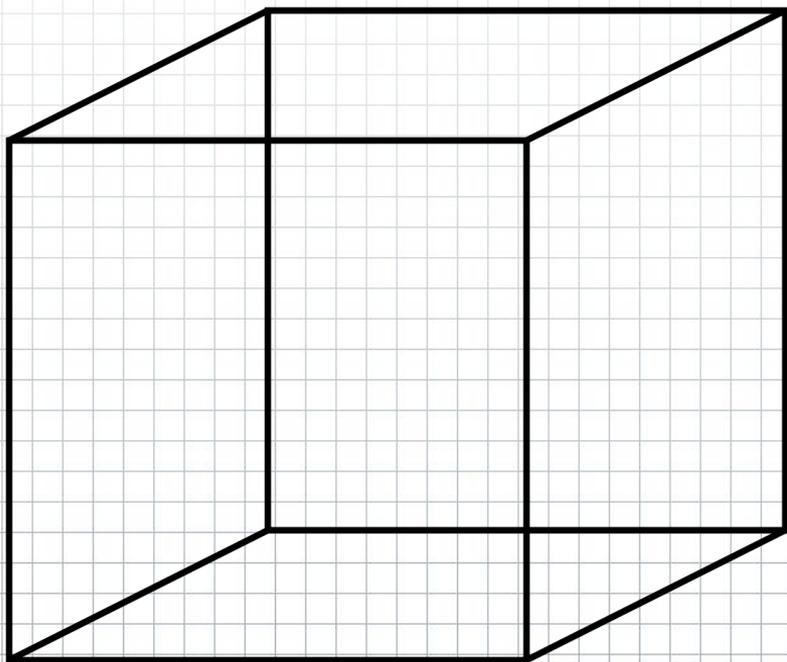


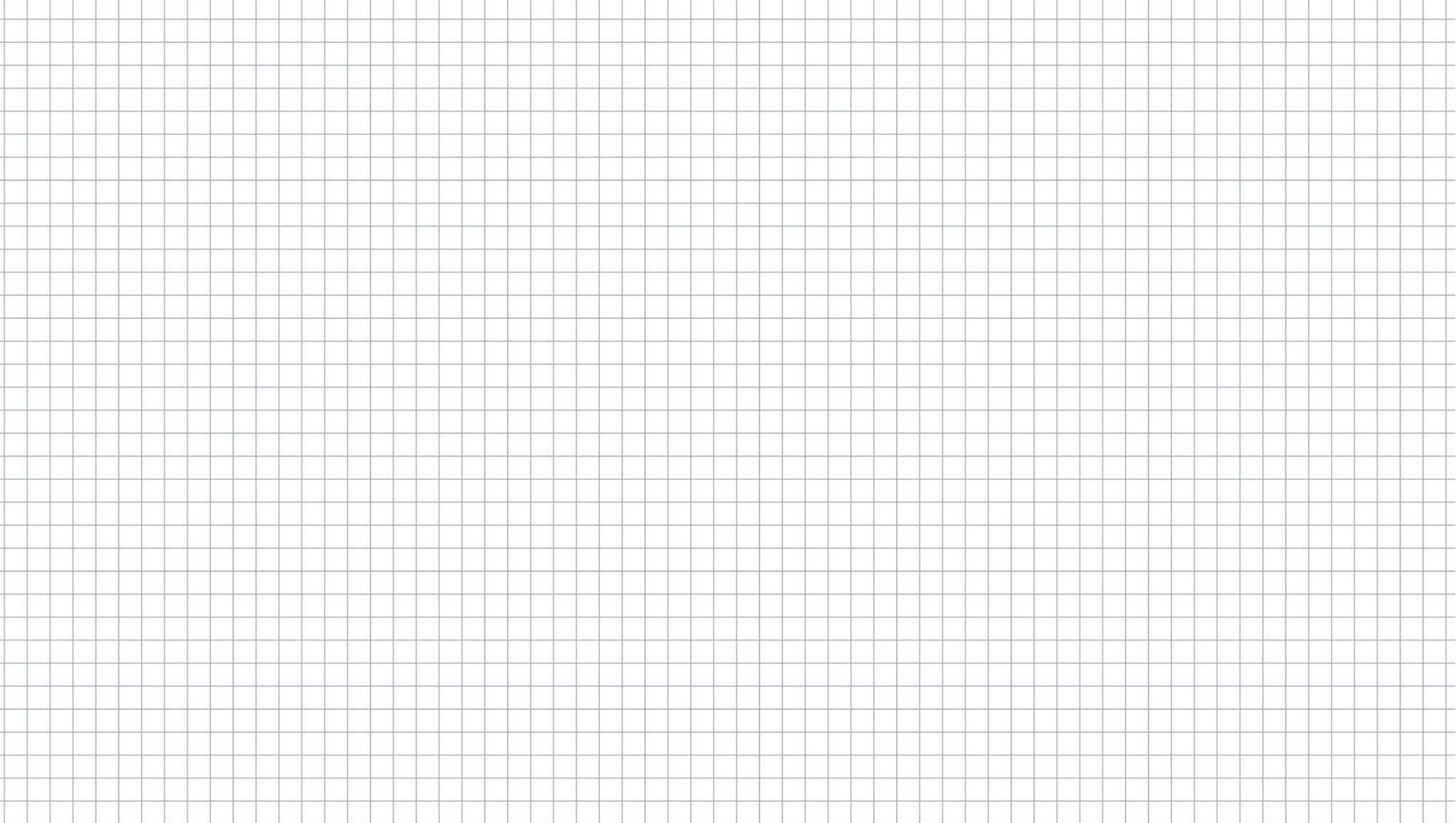
Задание №2

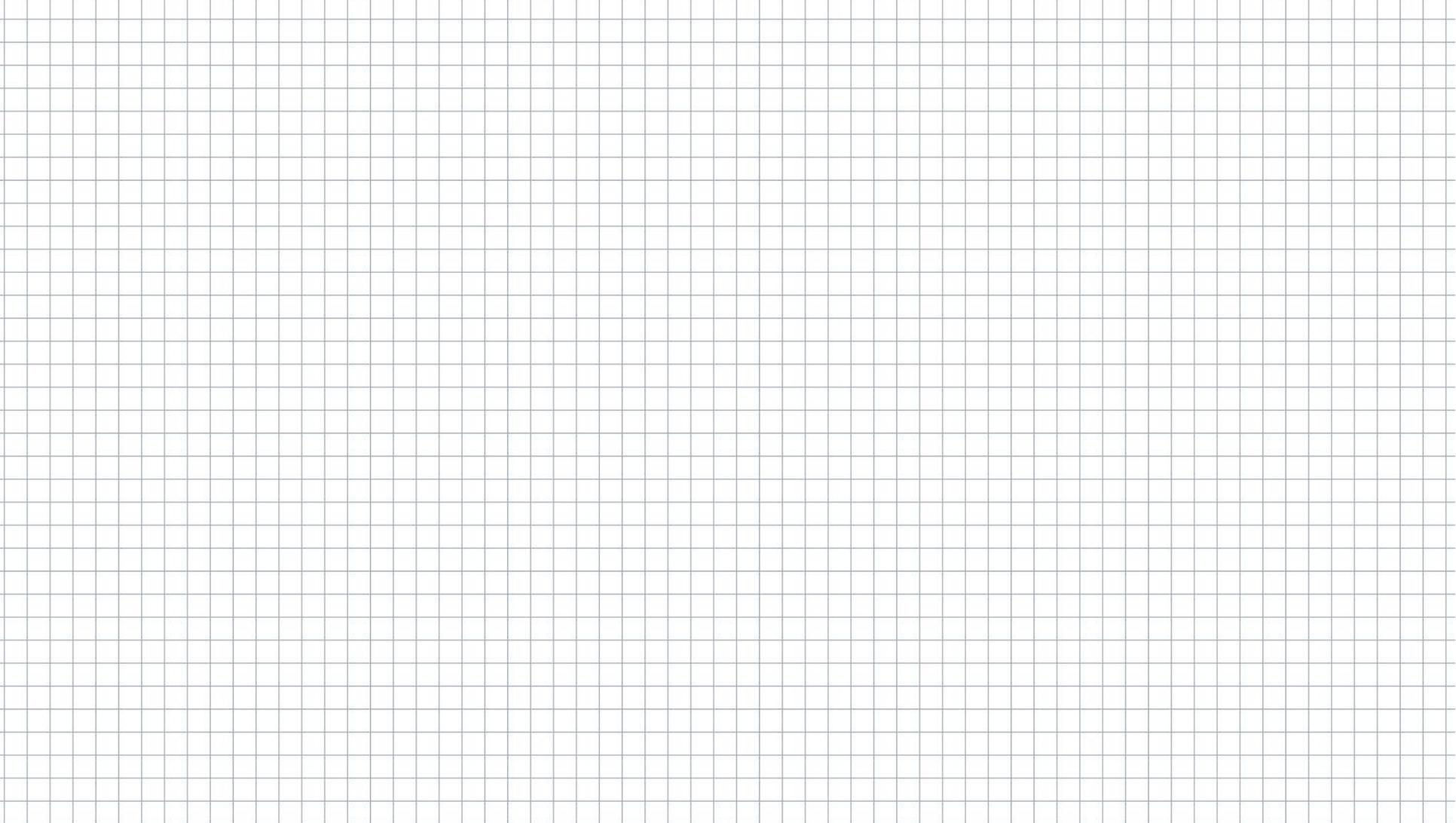
В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 6.

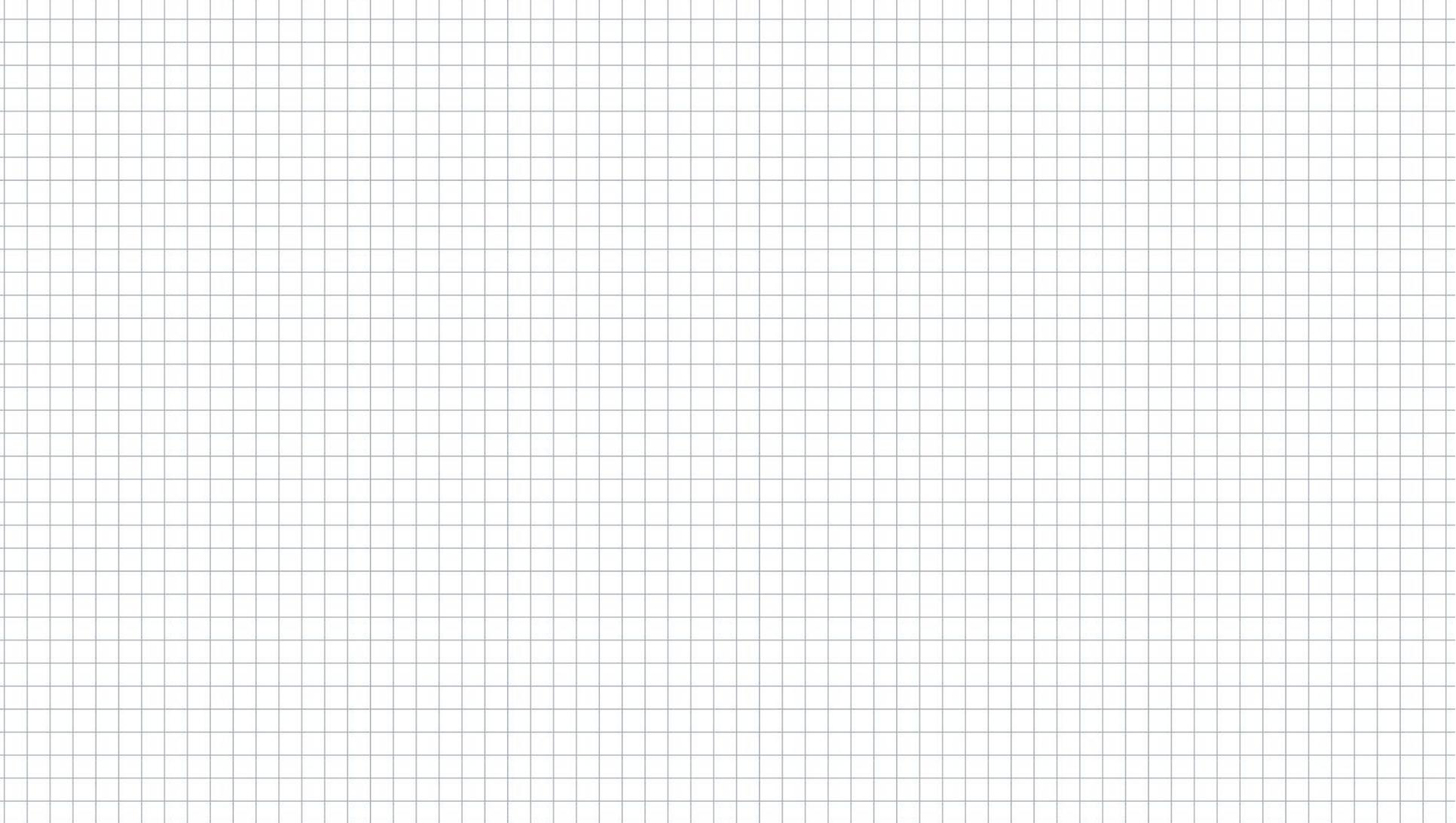
а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .







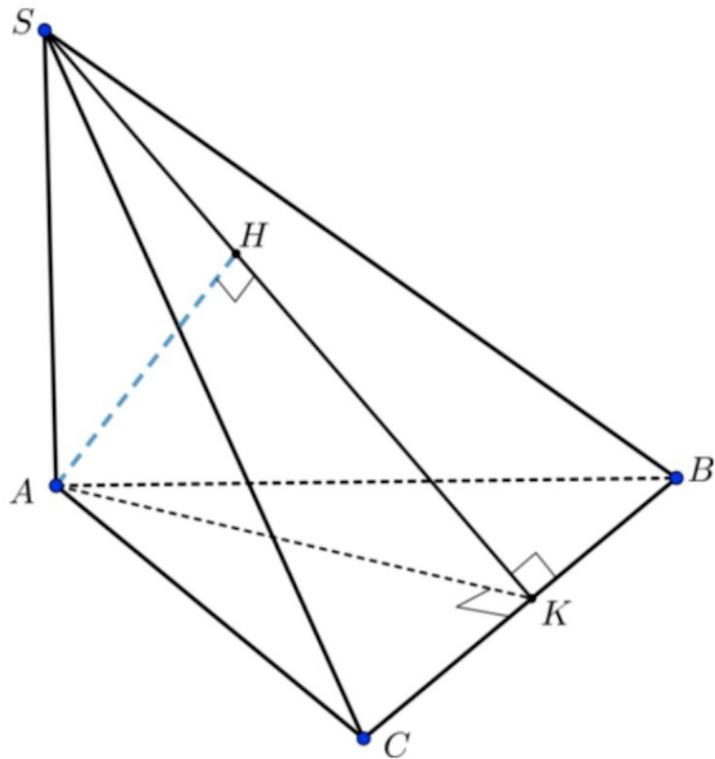


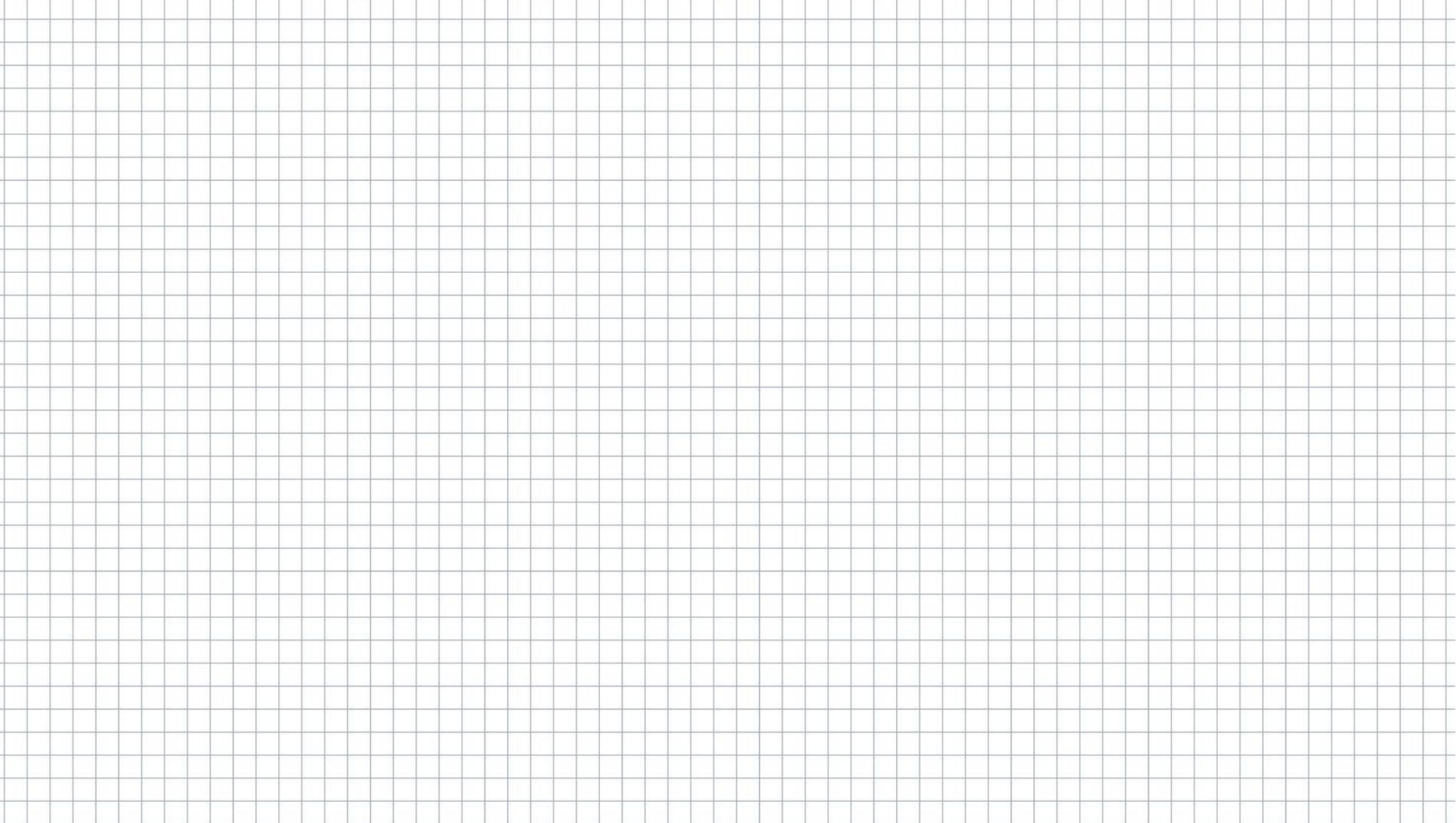
План занятия

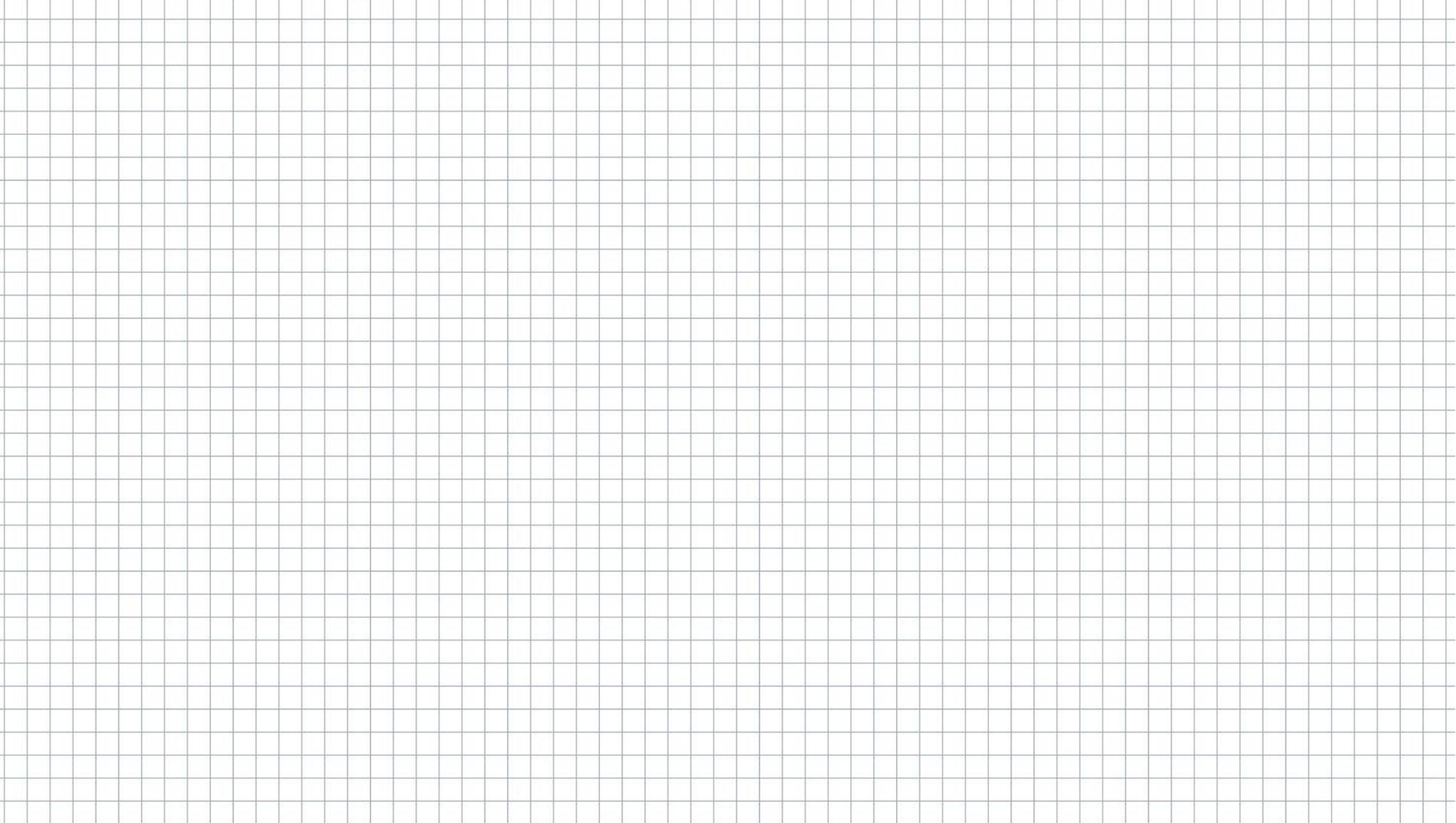
- Основные факты стереометрии
- Расстояние между прямыми и плоскостями
- Расстояние от точки до прямой и до плоскости
- Задача из досрочного ЕГЭ 2019

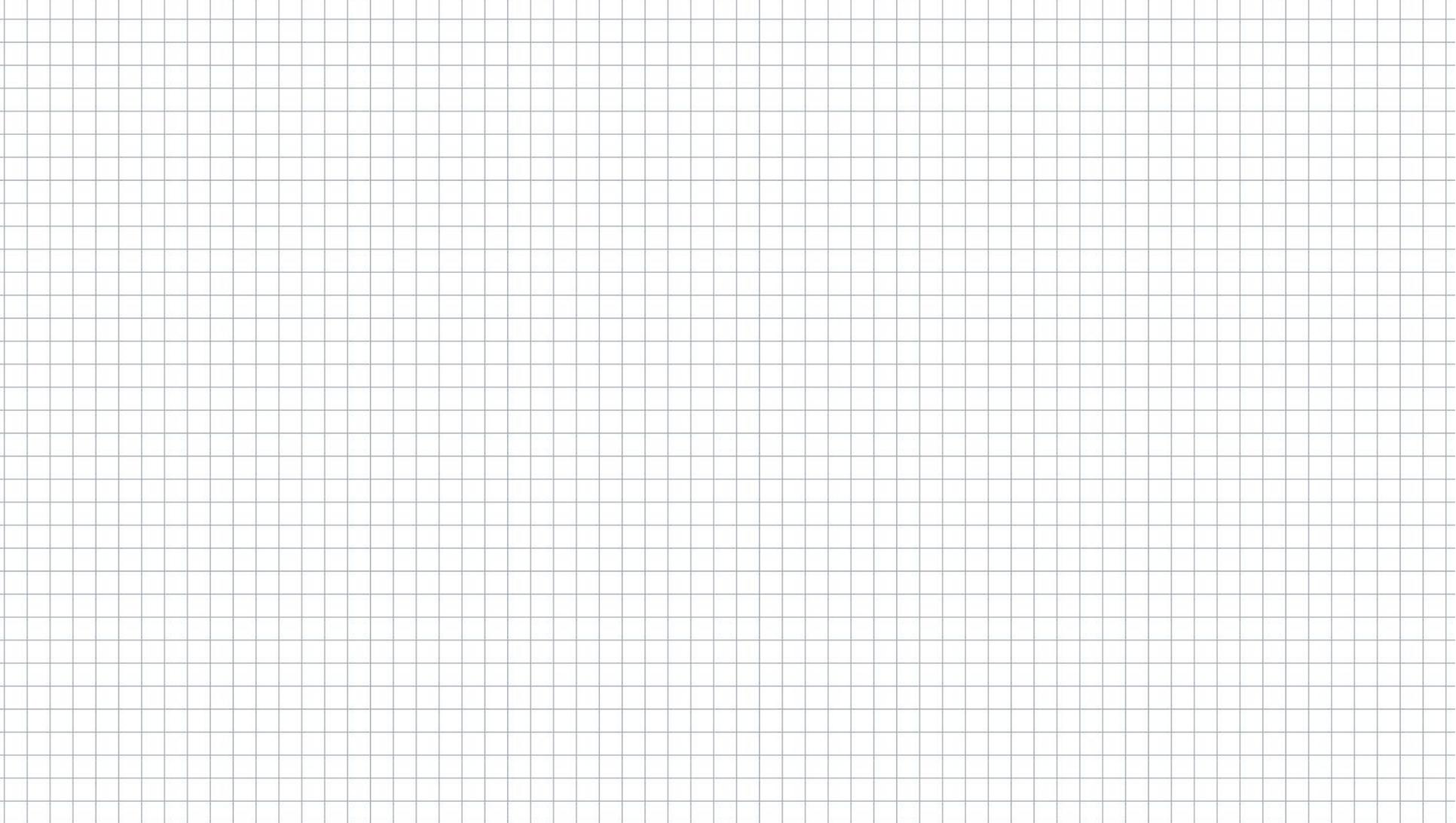
Задание №3

Дана треугольная пирамида $SABC$, причем грани SAB и SAC представляют собой равные равнобедренные треугольники с прямыми углами при вершине A . Найдите расстояние от точки A до грани SBC , если высота пирамиды равна h и равна BC .





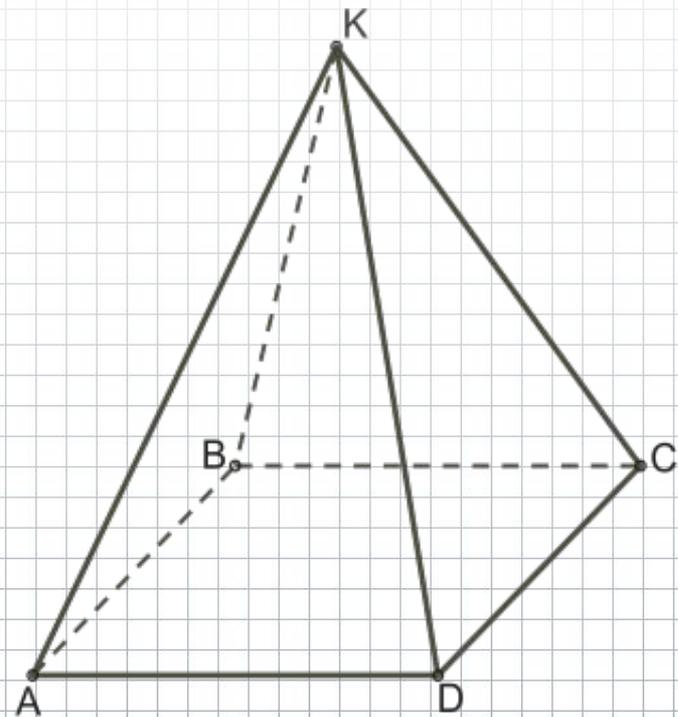


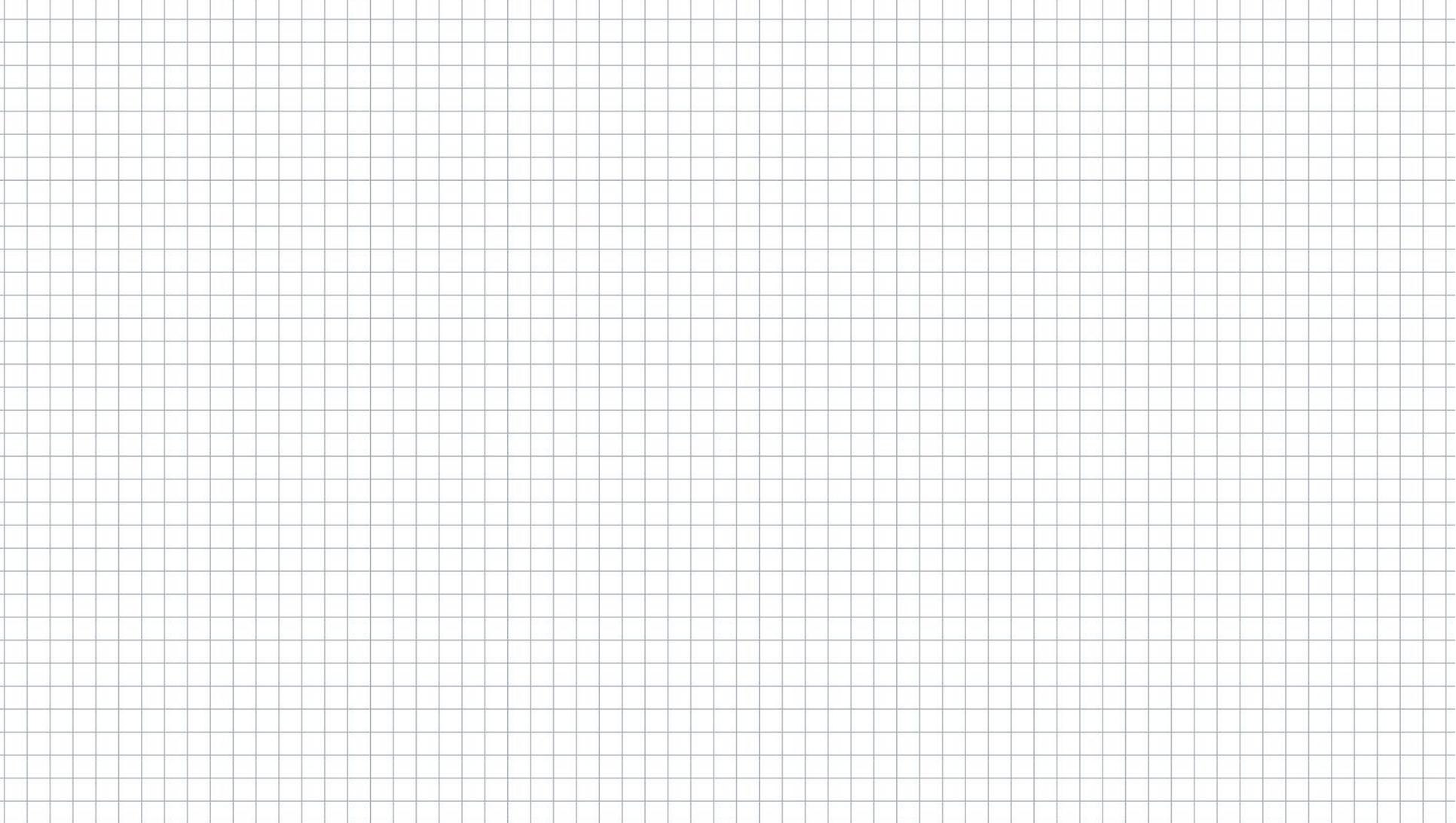


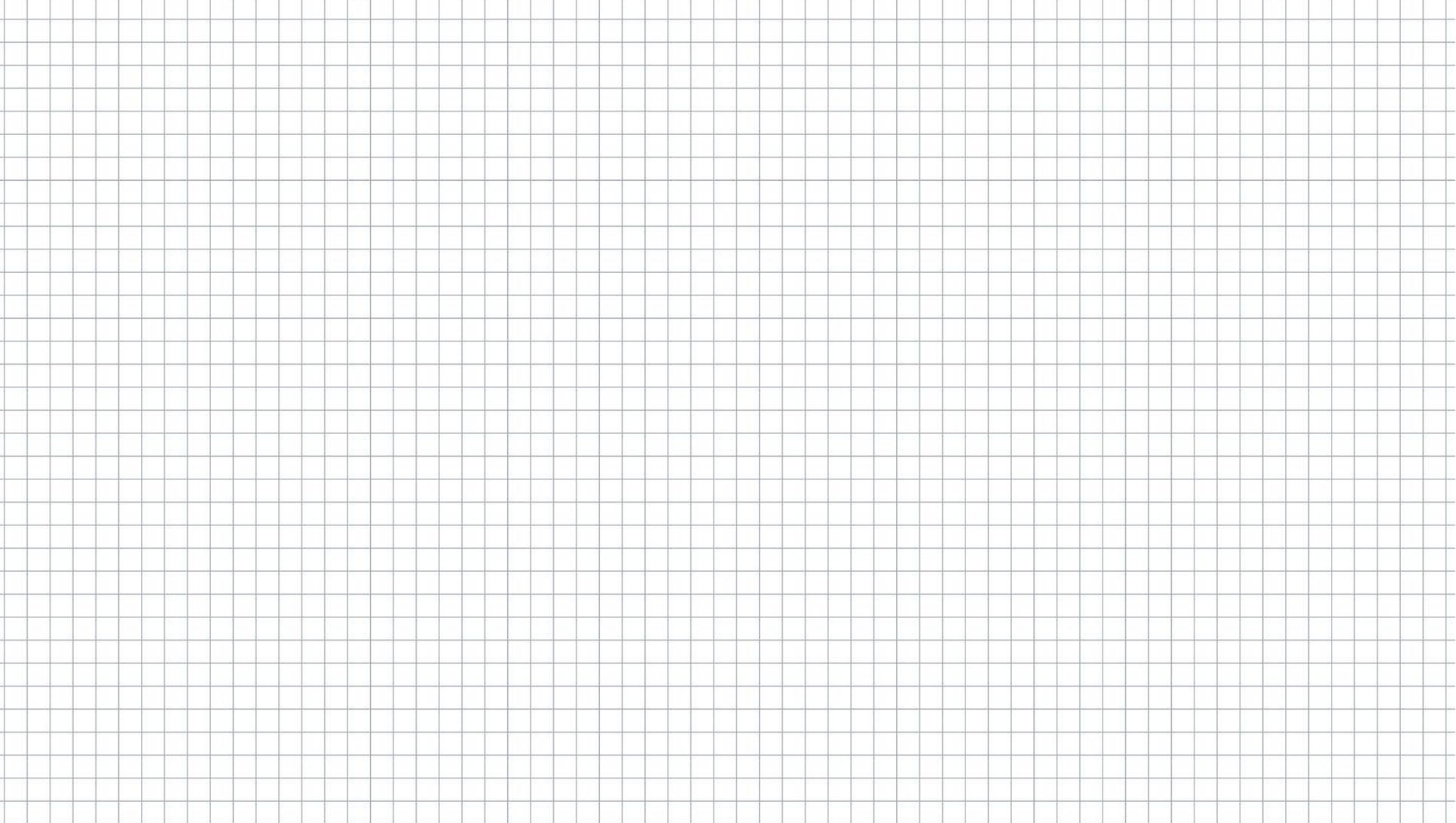
Задание №4

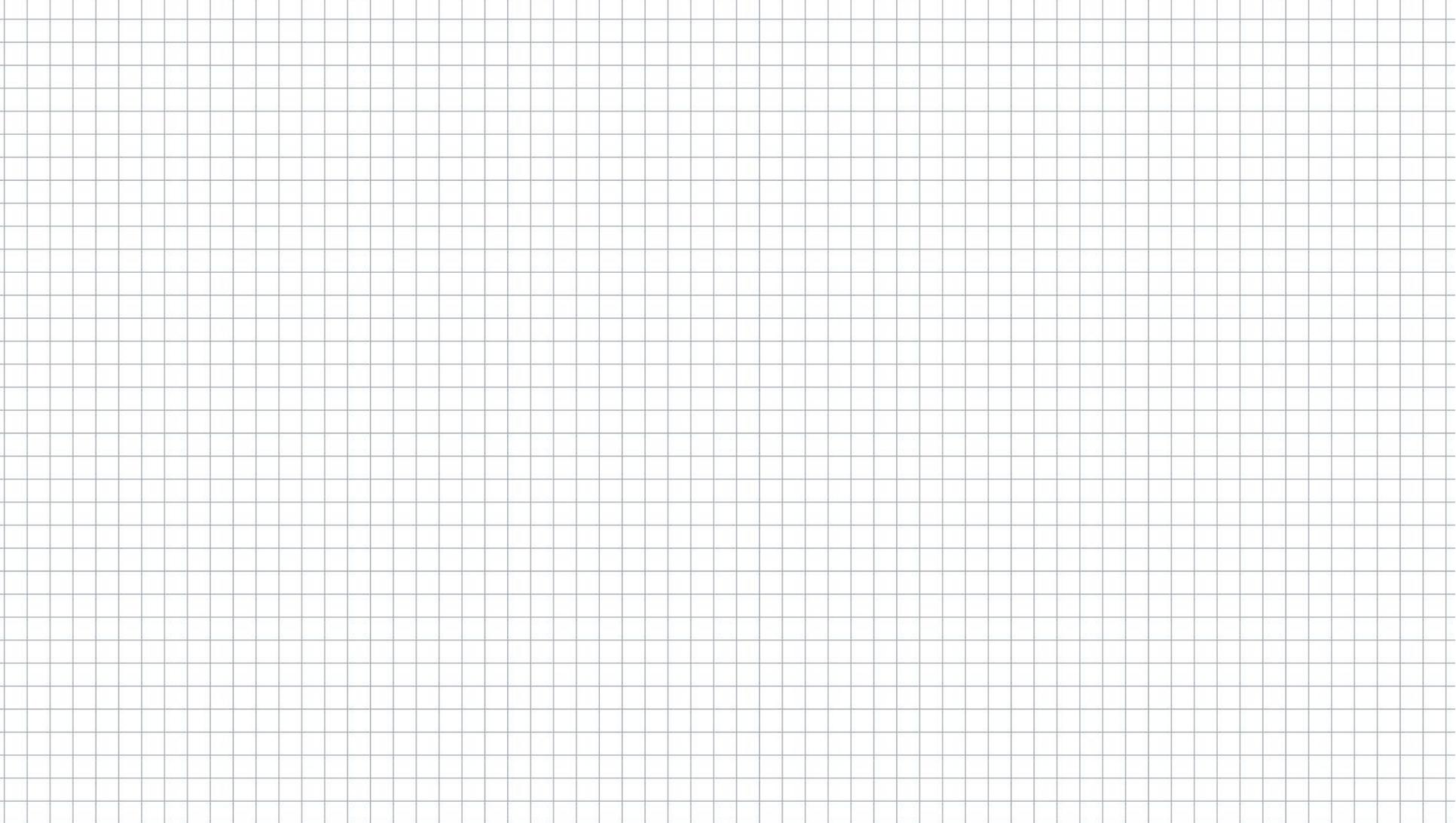
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

- Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
- Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .









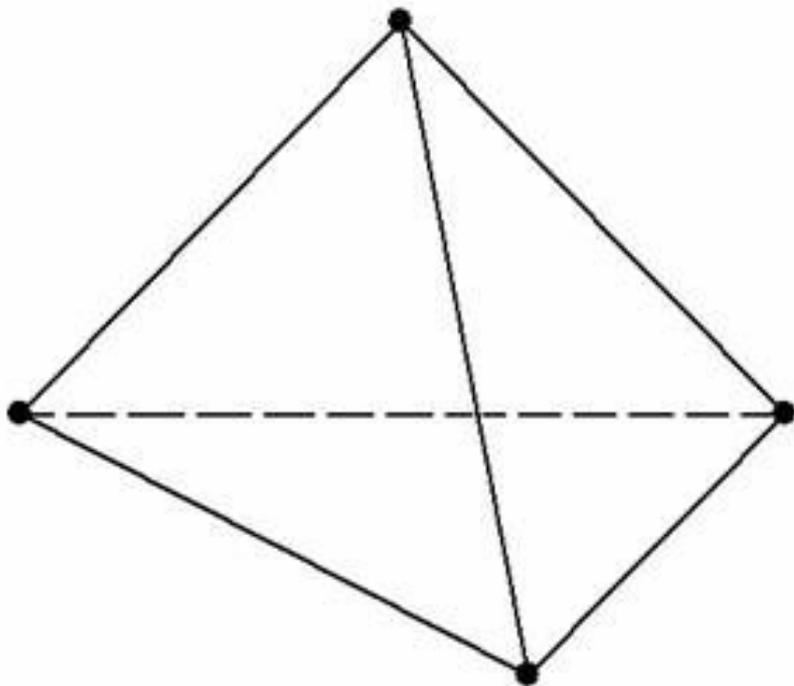
План занятия

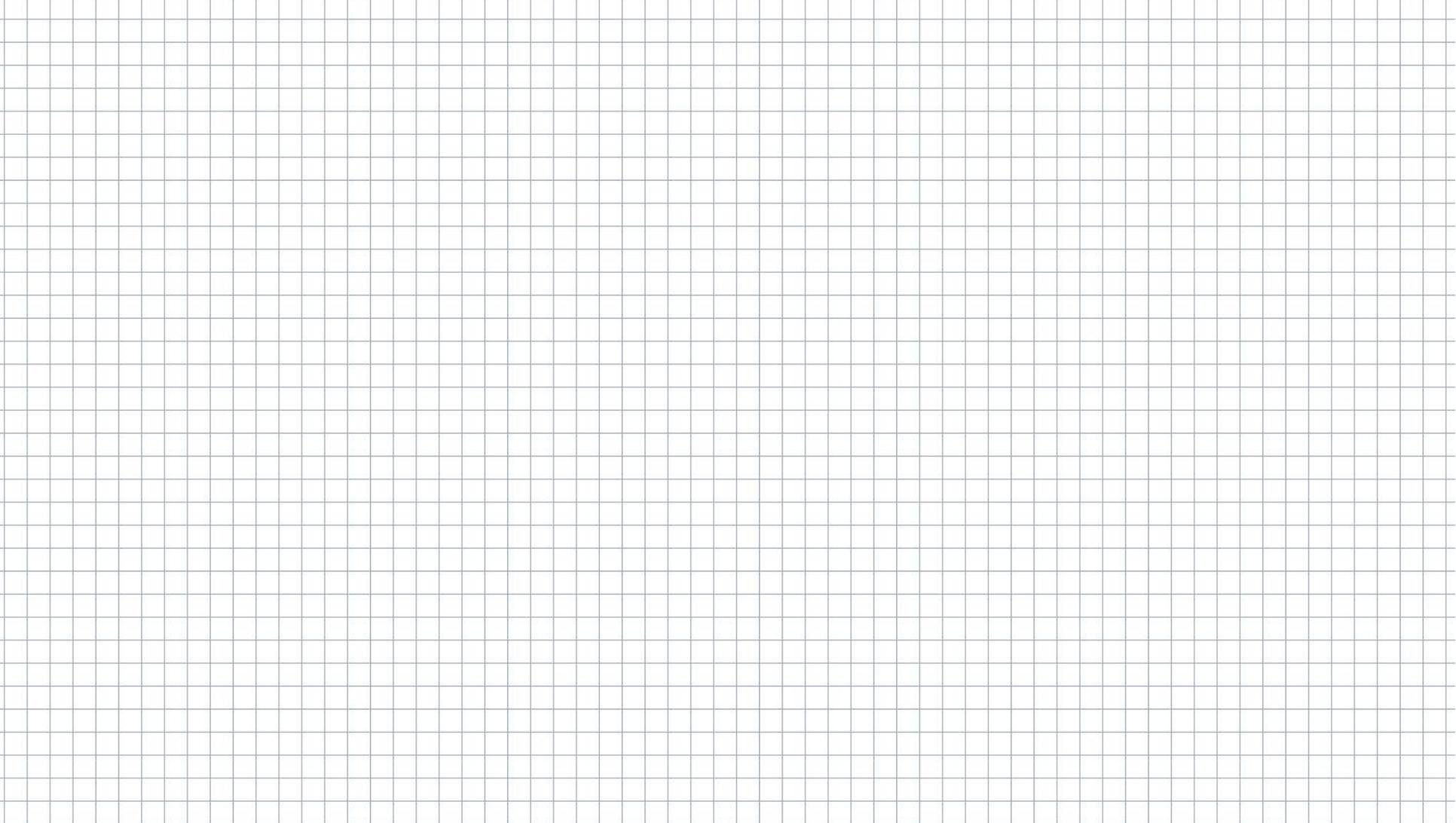
- Основные факты стереометрии
- Расстояние между прямыми и плоскостями
- Расстояние от точки до прямой и до плоскости
- Задача из досрочного ЕГЭ 2019

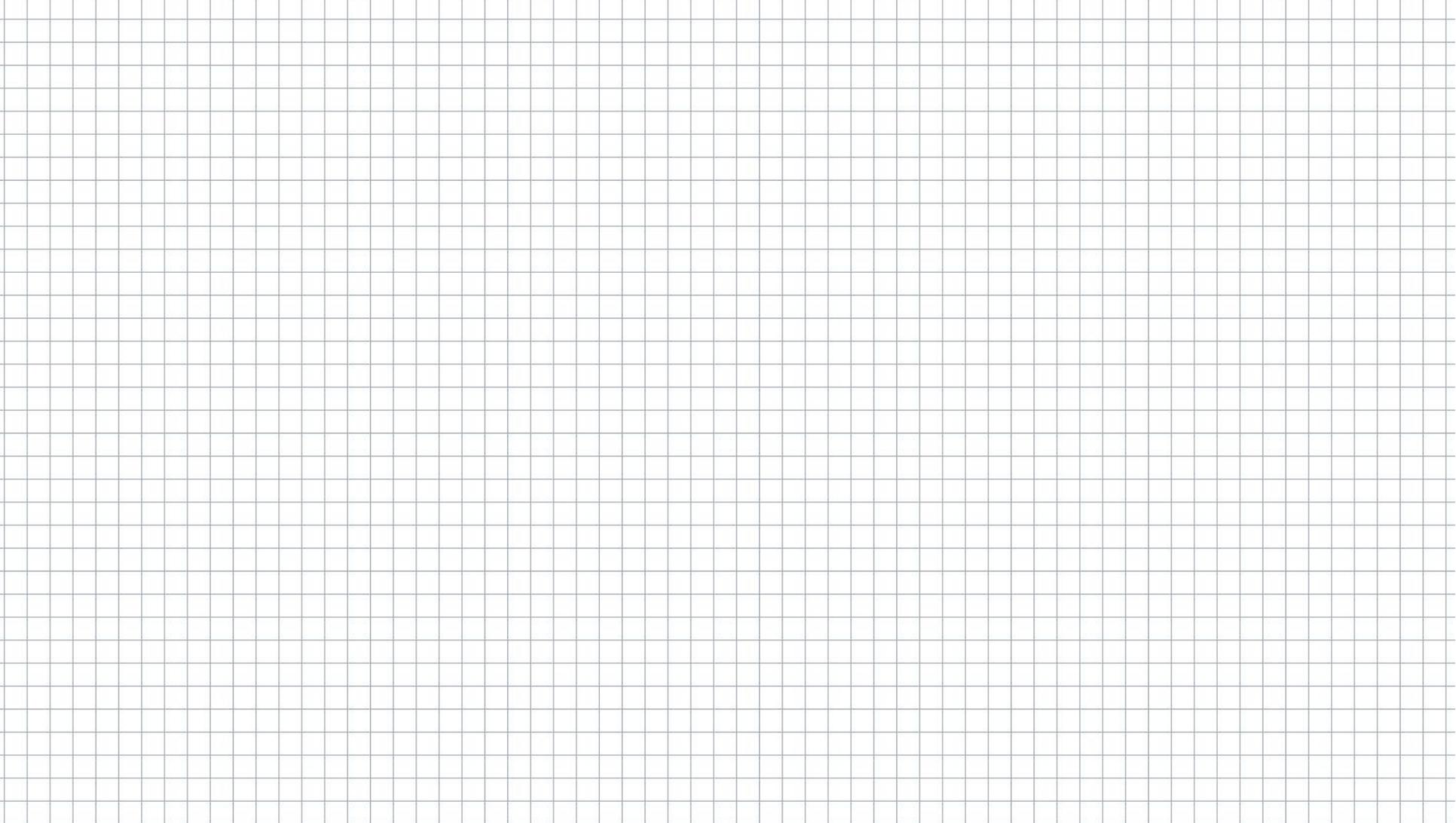
Задание №6 (досрочное ЕГЭ 2019)

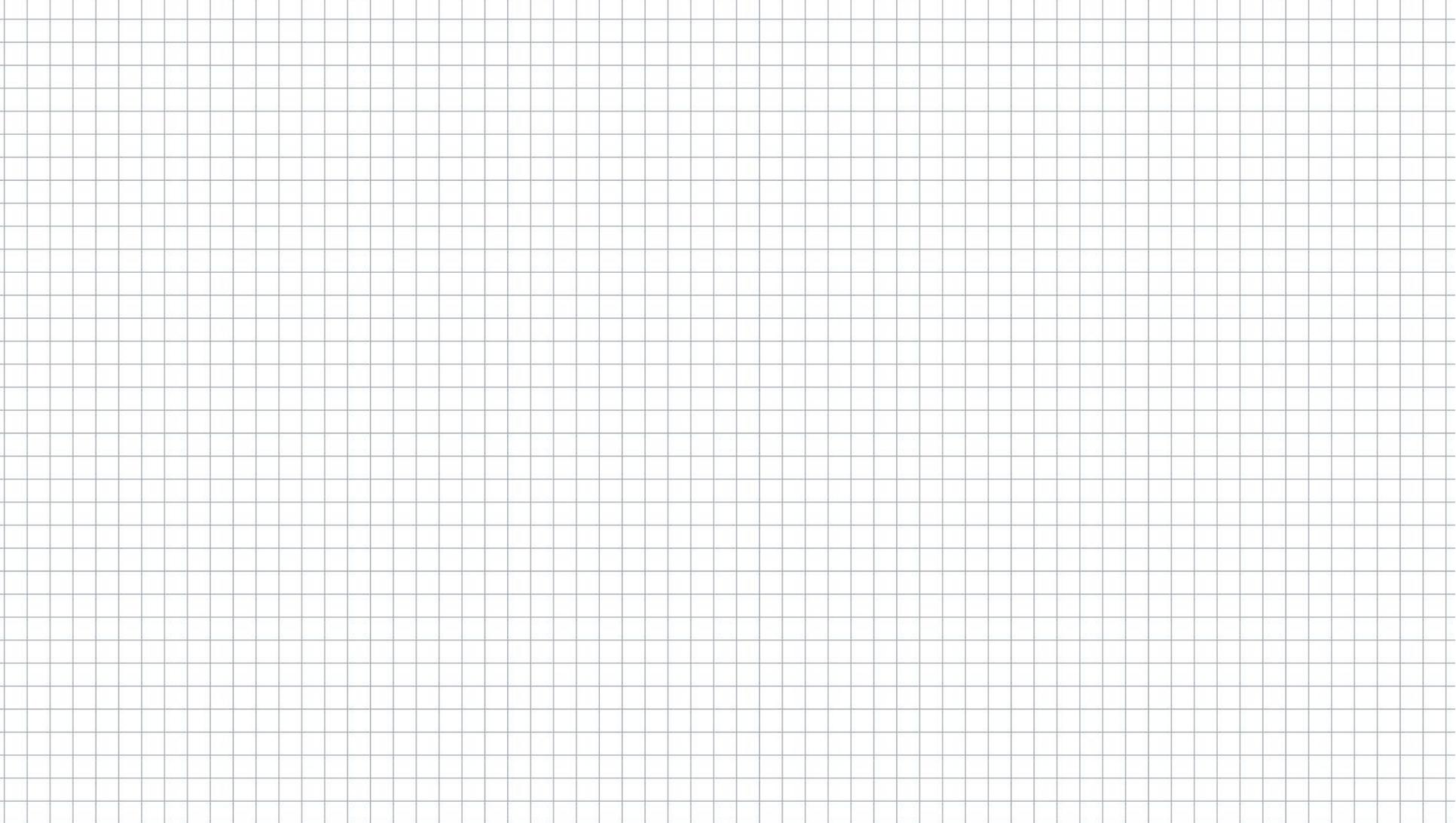
Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

- Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC .
- Найдите расстояние между ребрами BC и SA .









План занятия

- Основные факты стереометрии
- Расстояние между прямыми и плоскостями
- Расстояние от точки до прямой и до плоскости
- Задача из досрочного ЕГЭ 2019

Спасибо за внимание

1 НЕДЕЛЯ(01.04-07.04)

Разбор варианта. Часть 1.

02.04 ВТ 19:00

Разбор варианта. Часть 2.

04.04 ЧТ 19:00

Разбор варианта досрочной волны.

07.04 ВС 19:00

2 НЕДЕЛЯ(08.04-14.04)

19 задание. Делимость целых чисел.

09.04 ВТ 19:00

7 задание. Производная и первообразная.

11.04 ЧТ 19:00

17 задания. Оптимальный выбор.

14.04 ВС 19:00

3 НЕДЕЛЯ(15.04-21.04)

14 задание. Расстояния.

16.04 ВТ 19:00

15 задание. Смешанные неравенства.

18.04 ЧТ 19:00

3 и 6 задание. Планиметрия.

21.04 ВС 19:00

4 НЕДЕЛЯ(22.04-28.04)

13 задание. Смешанные уравнения.

23.04 ВТ 19:00

1 и 11 задание. Текстовые задачи.

25.04 ЧТ 19:00

19 задание. Десятичная запись числа. Сравнения.

28.04 ВС 19:00

5 НЕДЕЛЯ(29.04-30.04)

14 задание. Угол между плоскостями.

30.04 ВТ 19:00