

ЛЕКЦИЯ №3

ГРАФЫ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Понятие графа

Определение: Упорядоченная пара (V, E) , где V произвольное непустое множество, а E подмножество множества V^2 , называется *графом*.

Если $|V| = n$, то число n называется *порядком графа*.

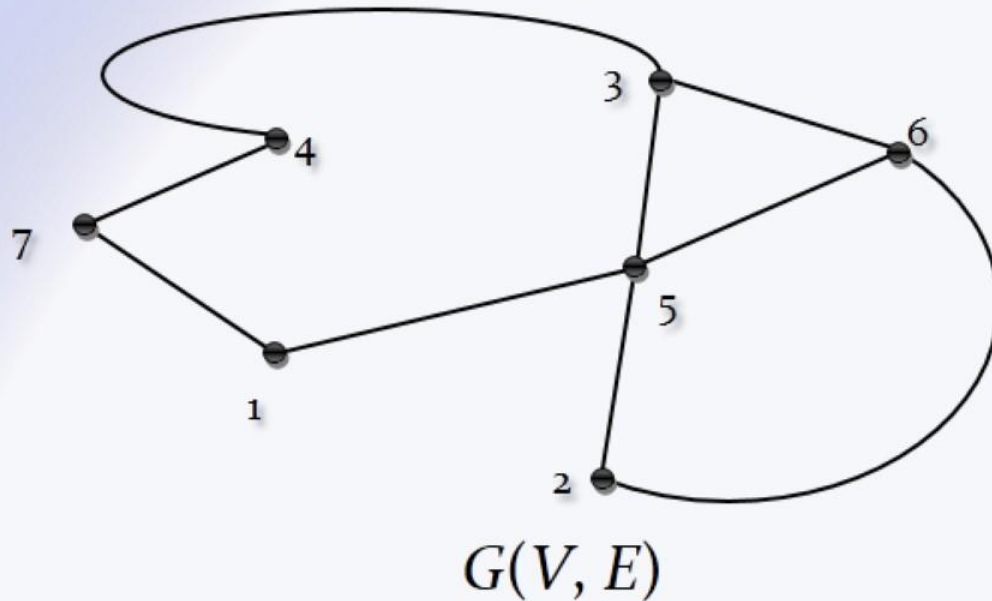
Если $|V| = n$ и $|E| = m$, то граф называется (n, m) -графом.

Обозначение: $G(V, E)$ – граф G ,

$V(G)$ – множество вершин графа G ,

$E(G)$ – множество ребер графа G .

Геометрическая интерпретация

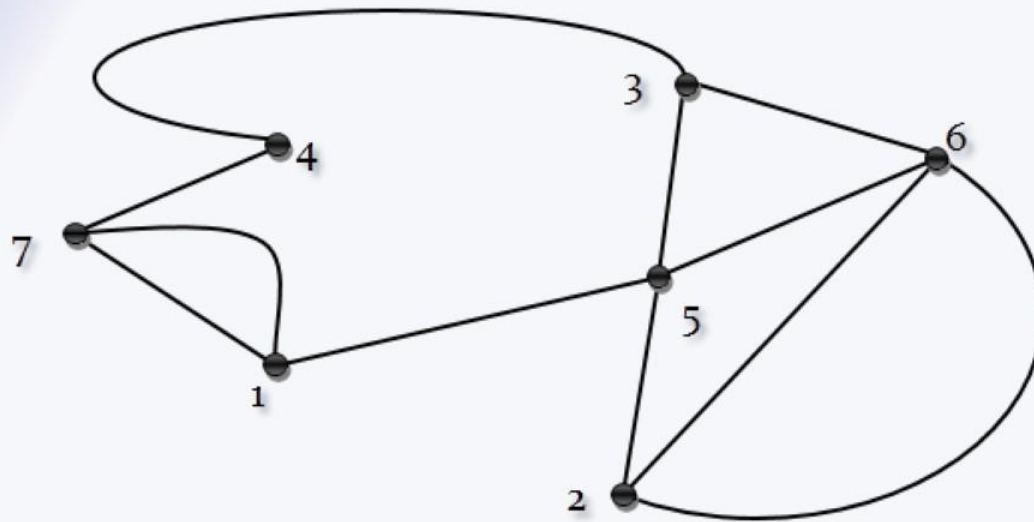


$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$E(G) = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 6)\}$$

Мультиграф

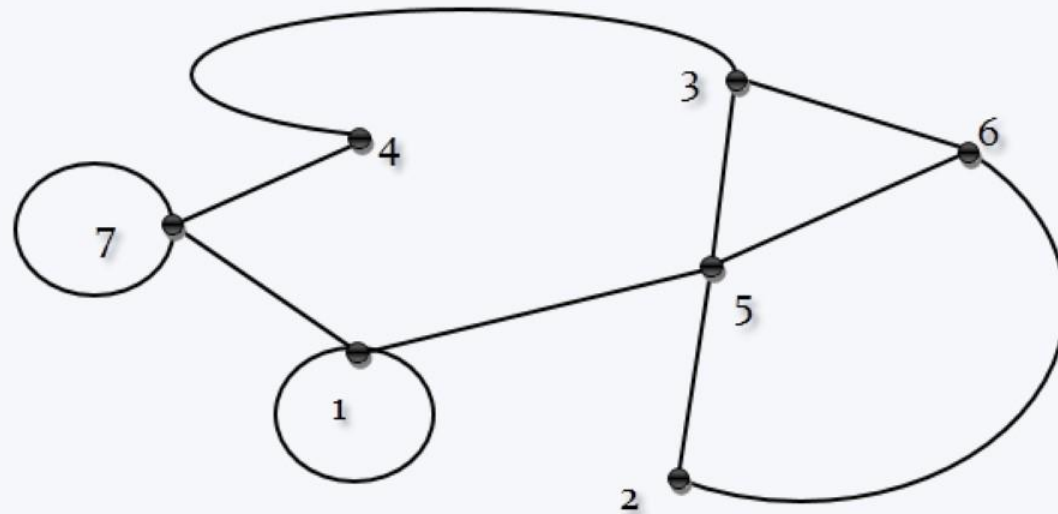
Определение: граф, в котором допускается существование кратных (повторяющихся) ребер, называется *мультиграфом*.



$$E(G) = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 2), (7, 1)\}$$

Псевдограф

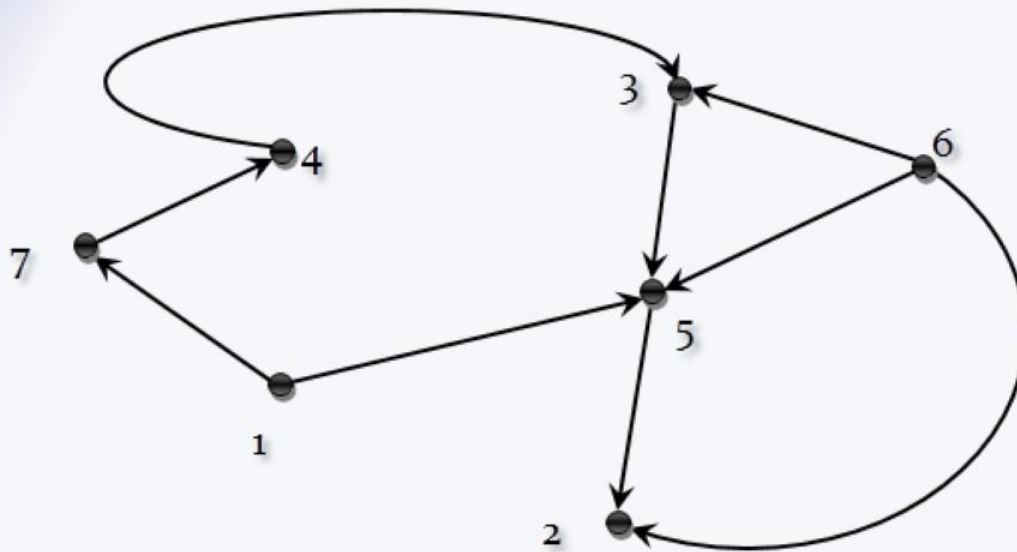
Определение: граф, в котором допускается существование петель (ребро, соединяющее вершину саму с собой), называется *псевдографом*.



$$E(G) = \{(1, 1), (1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 6), (7, 7)\}$$

Ориентированный граф

Определение: граф $G(V, E)$, где E является подмножеством $V \times V$, называется *орграфом* (ориентированным графом).

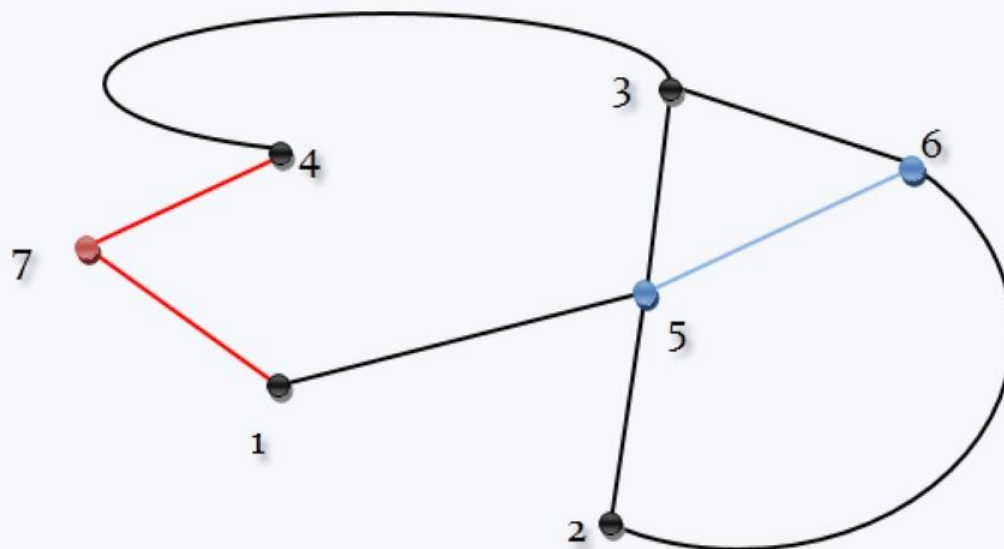


$$E(G) = \{(1, 5), (1, 7), (3, 5), (4, 3), (5, 2), (6, 2), (6, 3), (6, 5), (7, 4)\}$$

Понятие смежности

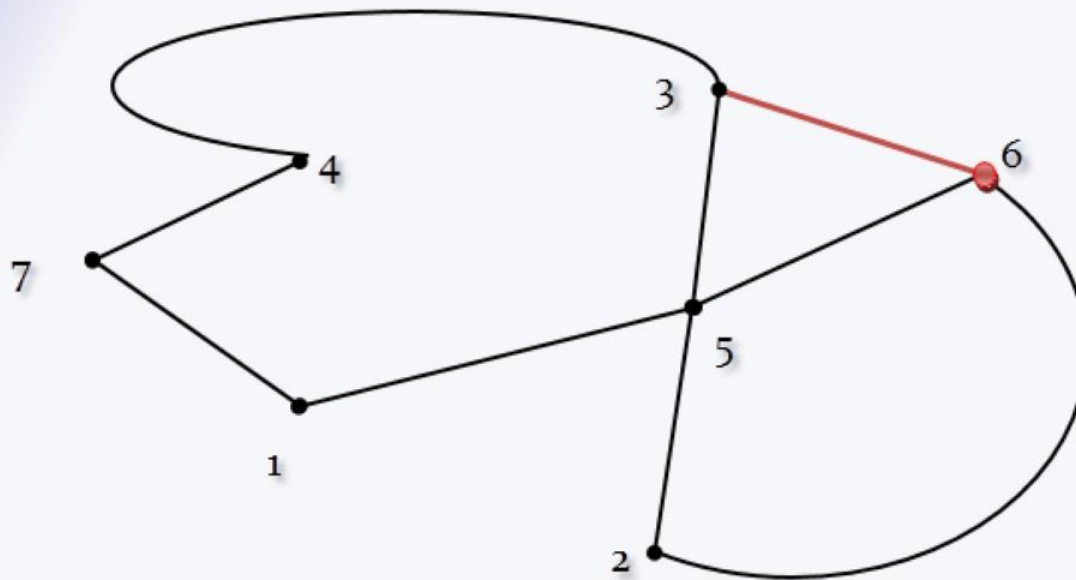
Определение: две вершины графа называются *смежными*, если они соединены ребром.

Определение: два ребра графа называются *смежными*, если они выходят из одной вершины.



Понятие инцидентности

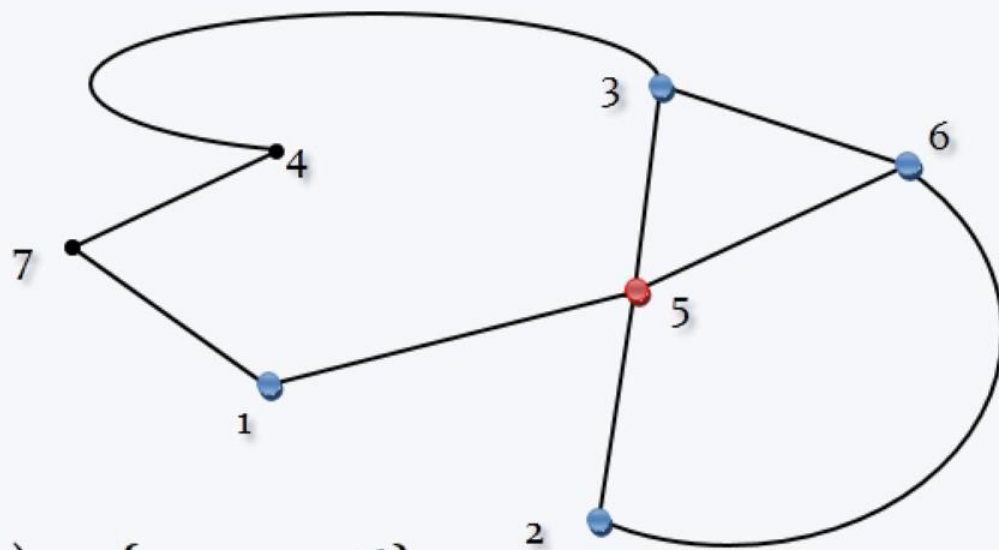
Определение: ребро и вершина называются *инцидентными*, если данная вершина является концом данного ребра.



Окружение вершины

Определение: окружением вершины v в графе G , называется множество смежных с ней вершин графа G .

Обозначение: $N(v)$, $N_G(v)$.

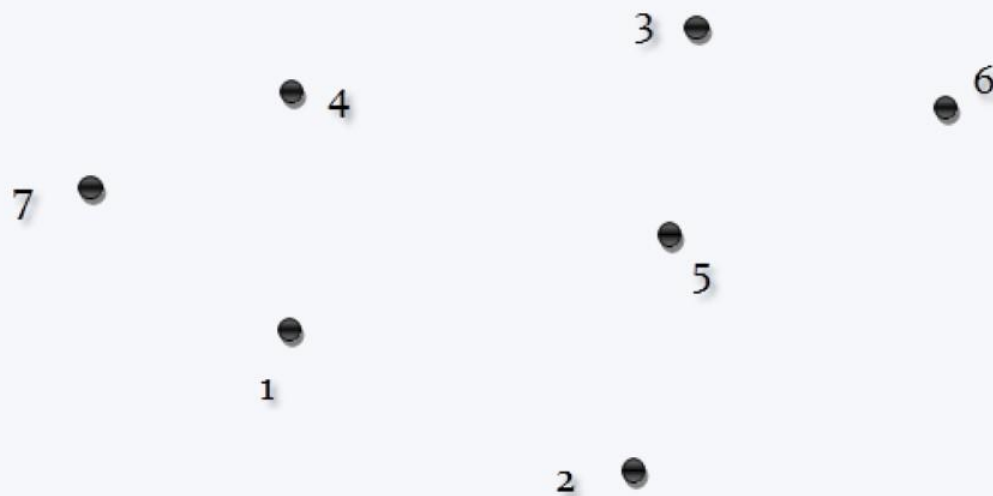


$$N(5) = \{1, 2, 3, 6\}$$

Пустой граф

Определение: Граф называется *пустым*, если он не содержит ни одного ребра, то есть $E = \emptyset$.

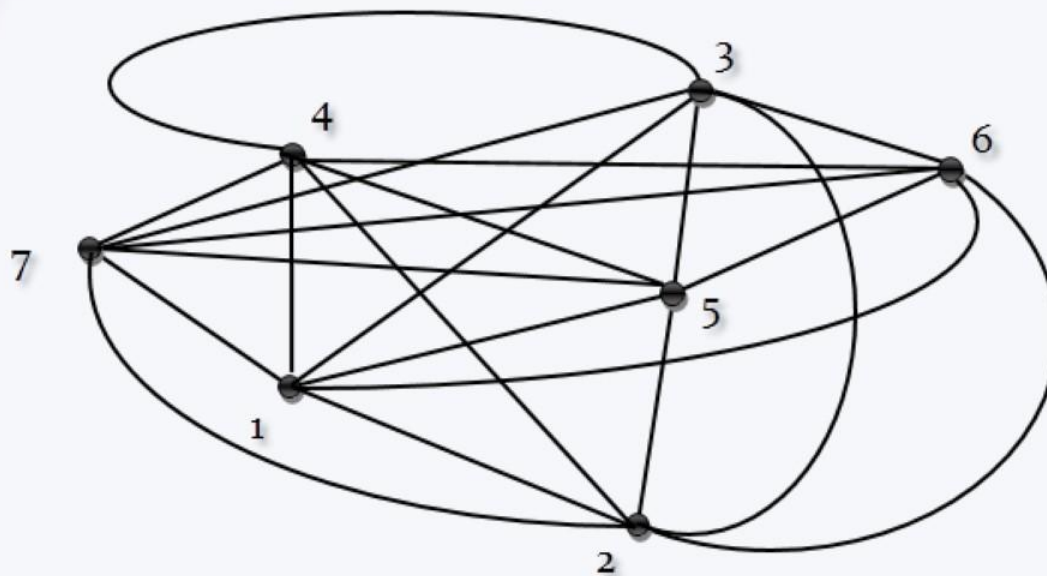
Обозначение: O_n – пустой граф порядка n .



Полный граф

Определение: граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром.

Обозначение: K_n – полный граф порядка n .



Полный граф

Теорема:

Число ребер в полном графе равно $\frac{n(n-1)}{2}$

Доказательство:

Всего в графе n вершин. Из каждой из них выходит $(n-1)$ ребро.

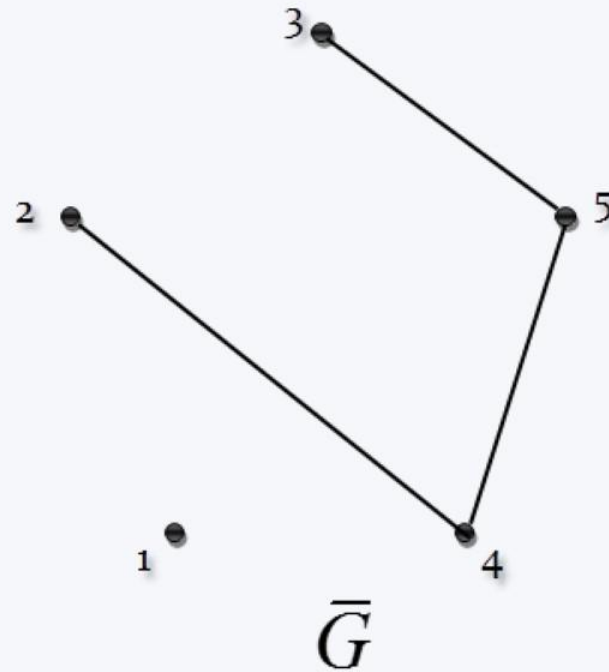
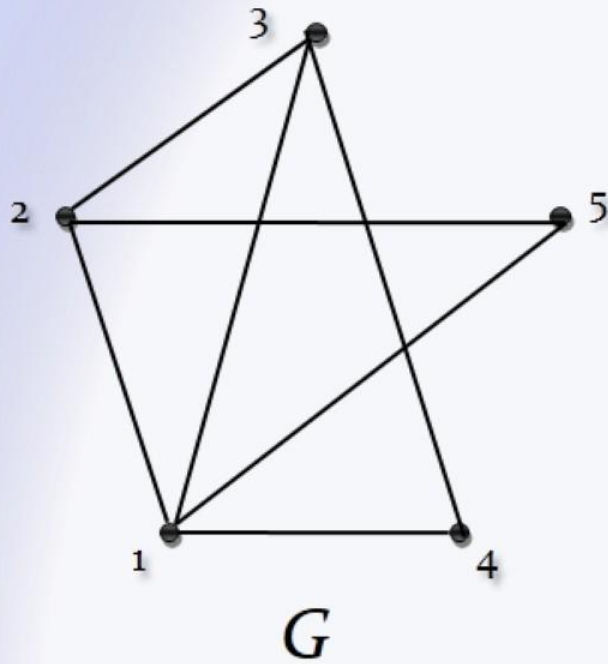
Таким образом, получим $n(n-1)$ ребро.

Так как каждое ребро относится к двум вершинам, при таком подсчете оно будет учитываться дважды. Следует поделить на 2, получим:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Дополнительный граф

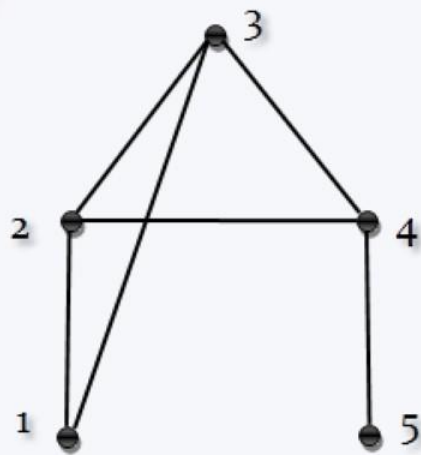
Определение: дополнением графа $G(V, E)$ или дополнительным графом к графу G , называется граф $\bar{G}(V, \bar{E})$.



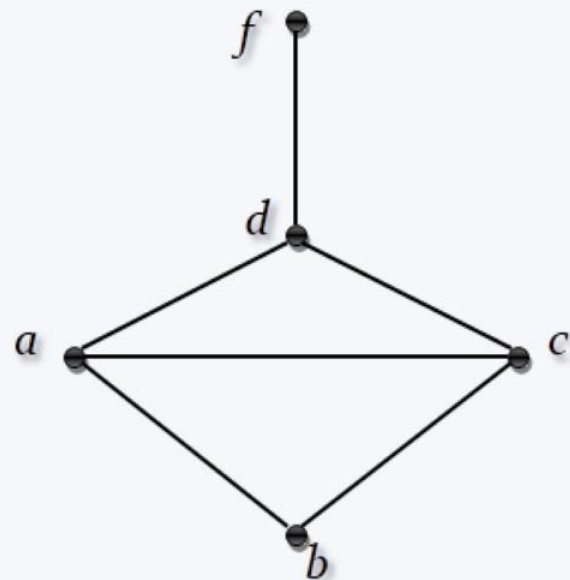
Изоморфизм графов

Определение: Два графа называются изоморфными, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая отношение смежности.

Обозначение: $G \cong H$.



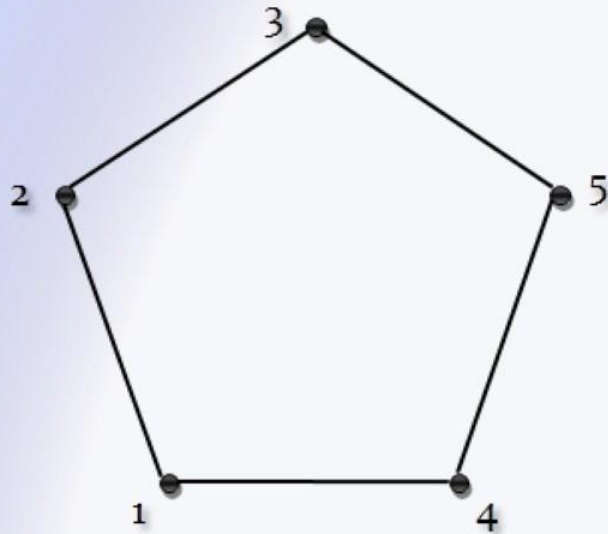
G



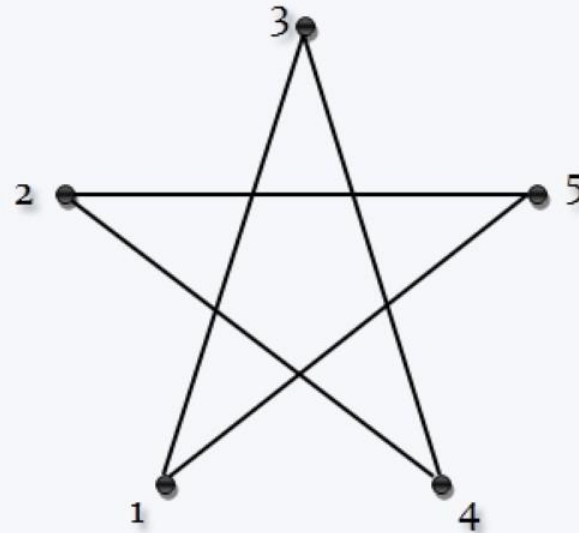
H

Самодополнительный граф

Определение: если граф изоморфен своему дополнению, то он называется *самодополнительным*.



G



\bar{G}

Маршрут. Расстояние между вершинами

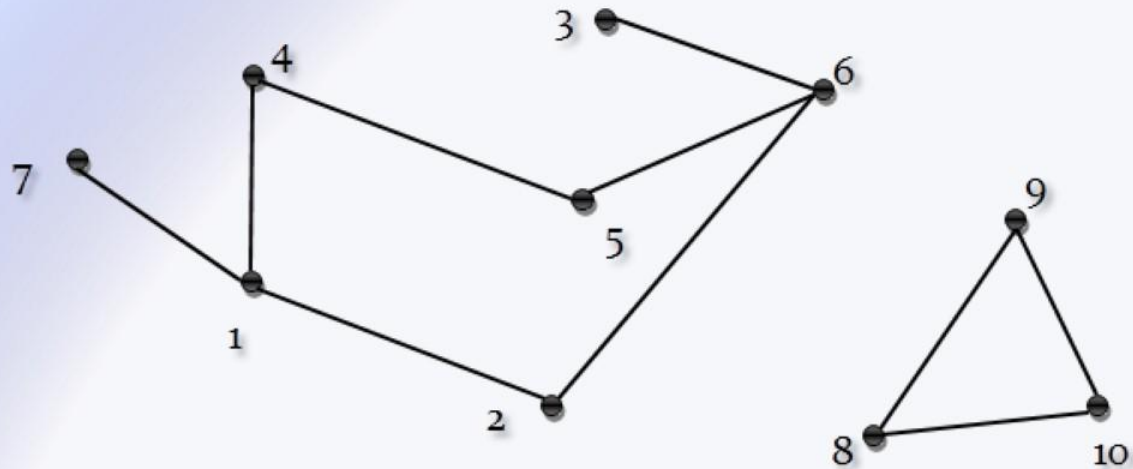
Определение: последовательность вершин и ребер графа вида $v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_3)v_3 \dots v_{n-1}(v_{n-1}, v_n)v_n$ называется *маршрутом*, соединяющим вершины v_1 и v_n .

Определение: *длиной маршрута* называется число входящих в него ребер.

Определение: *расстоянием* между вершинами u и v называется длина кратчайшего маршрута между ними.

Обозначение: $d(u, v)$.

Пример:



Из 1 в 6 существует 2 маршрута:

1(1, 2)2(2, 6)6 и 1(1, 4)4(4, 5)5(5, 6)6

$$d(1, 6) = 2$$

Из 1 в 10 нет маршрута.

$$d(1, 10) = \infty$$

Метрические характеристики

Определение: расстояние до наиболее удаленной от вершины u вершины графа называется *эксцентриситетом* вершины u .

$$e(u) = \max_{x \in V(G)} d(u, x)$$

Определение: *радиусом* графа называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.

$$r(G) = \min_{u \in V(G)} e(u)$$

Метрические характеристики

Определение: *диаметром графа* называется наибольший из эксцентриситетов его вершин.

$$d(G) = \max_{u \in V(G)} e(u)$$

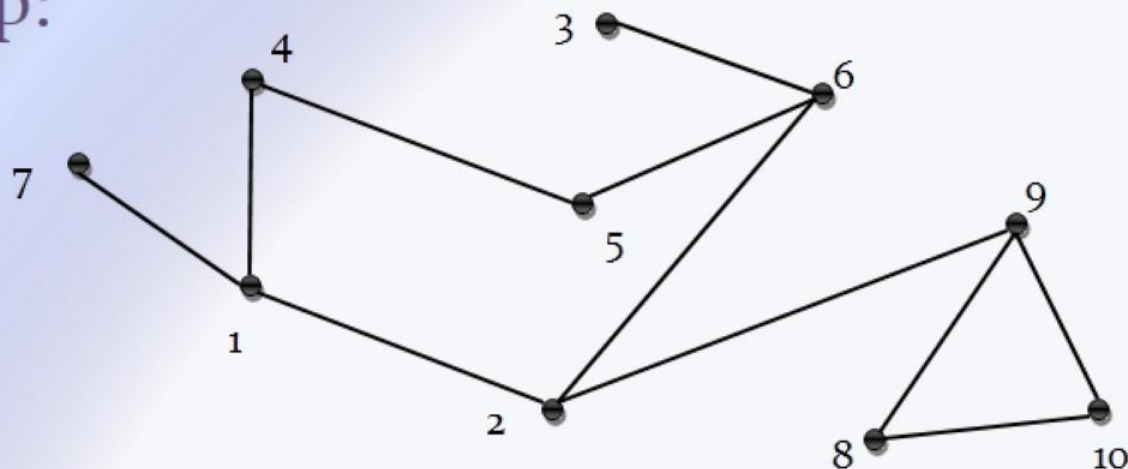
Определение: множество вершин графа с наименьшими эксцентриситетами называется *центром графа*.

$$Z(G) = \{u \in V(G) \mid e(u) = r(G)\}$$

Определение: вершины с наибольшими эксцентриситетами называются *диаметральными* или *периферийными*.

$$D(G) = \{u \in V(G) \mid e(u) = d(G)\}$$

Пример:



$$e(1) = 3, e(2) = 2, e(3) = 4, e(4) = 4, e(5) = 4, e(6) = 3, \\ e(7) = 4, e(8) = 4, e(9) = 3, e(10) = 4.$$

$$r(G) = 2, d(G) = 4.$$

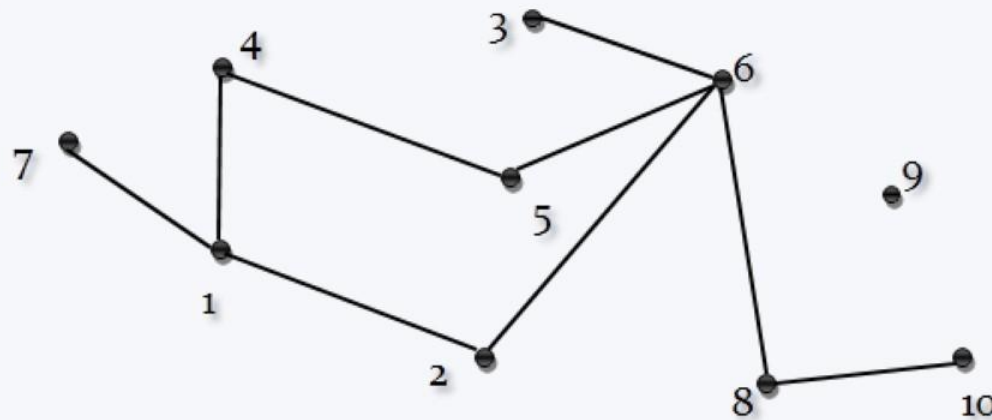
$$Z(G) = \{2\}, D(G) = \{3, 4, 5, 7, 8, 10\}.$$

Степени вершин графа

Определение: *степенью вершины* u графа G называется количество инцидентных ей ребер.

Обозначение: $\deg(u)$.

Пример:

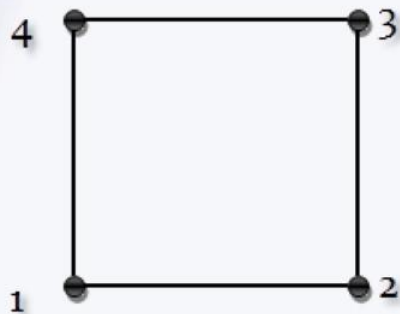


$\deg(1)=3$, $\deg(6)=4$, $\deg(2)=\deg(4)=\deg(5)=\deg(8)=2$,
 $\deg(3)=\deg(7)=\deg(10)=1$ – висячие вершины.
 $\deg(9)=0$ – изолированная вершина.

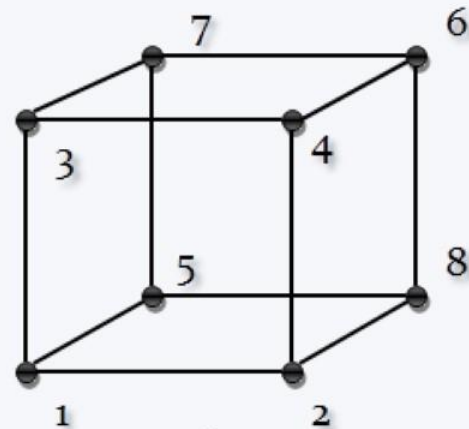
Однородные графы

Определение: граф называется *однородным*, если степени всех его вершин равны. Число, которому равны все степени графа, называется *степенью* однородного графа.

Обозначение: R_n^k , где k – степень каждой вершины, n – порядок графа.



$$R_4^2$$



$$R_8^3$$

Степени вершин графа

Утверждение: сумма всех степеней вершин графа есть четное число, равное удвоенному количеству ребер.

Утверждение: число вершин нечетной степени в любом графе четно.

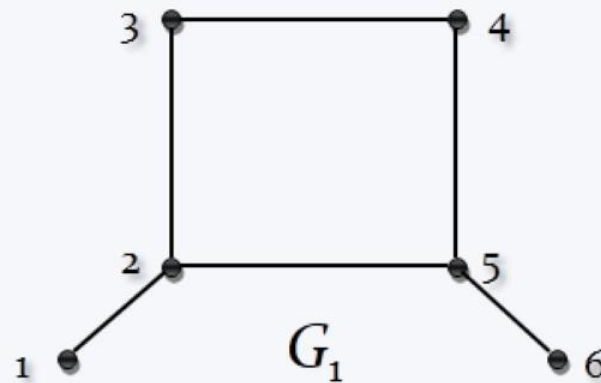
Утверждение: в любом графе обязательно найдутся две вершины, имеющие одинаковую степень.

Утверждение: в любом однородном графе либо его порядок, либо степень его вершин есть четное число.

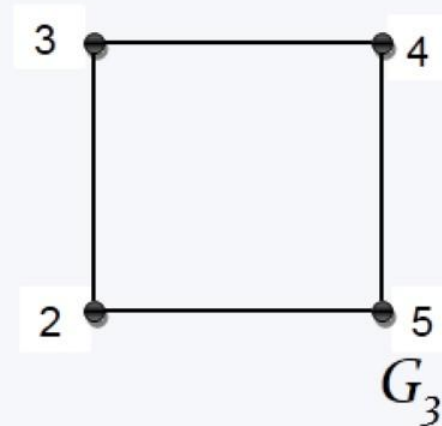
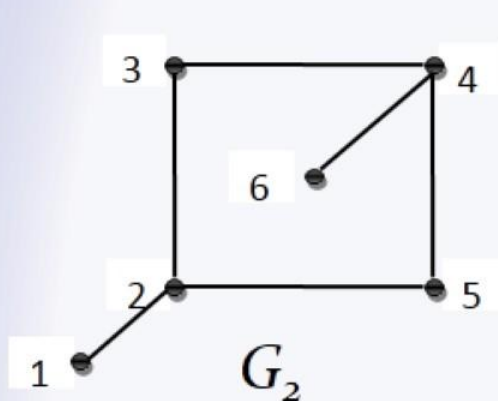
Степенная последовательность

Определение: последовательность всех степеней вершин графа называется *степенной последовательностью графа*.

Пример:

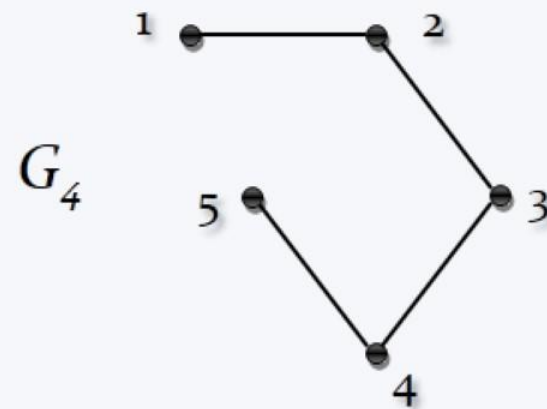
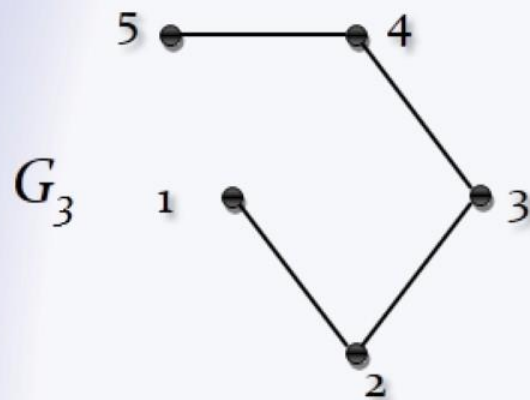
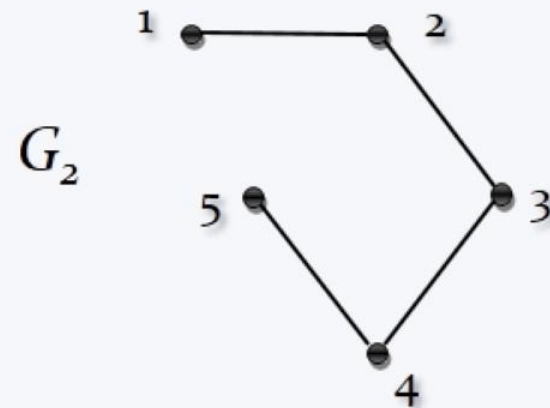
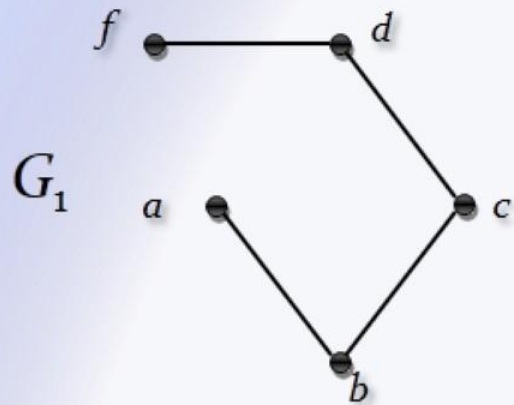


1, 1, 2, 2, 3, 3



Помеченные графы

Определение: граф порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые имена.



Подграфы

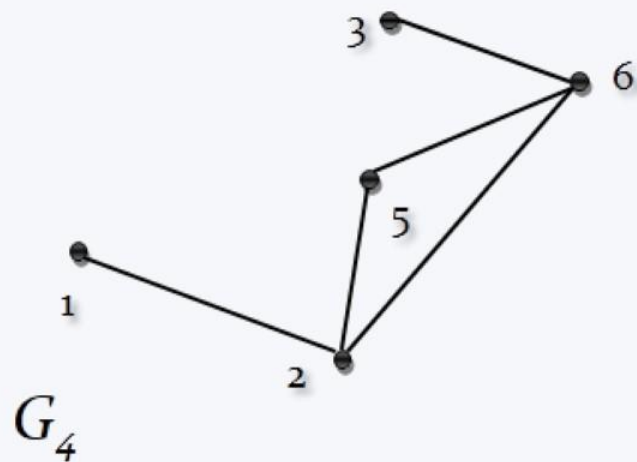
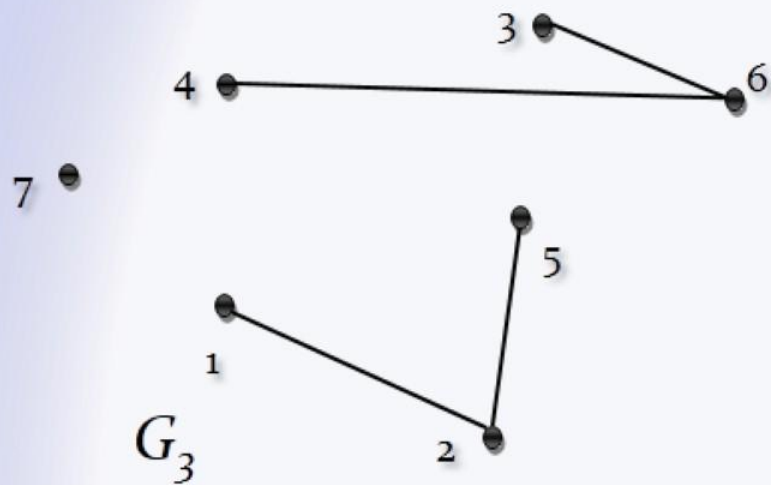
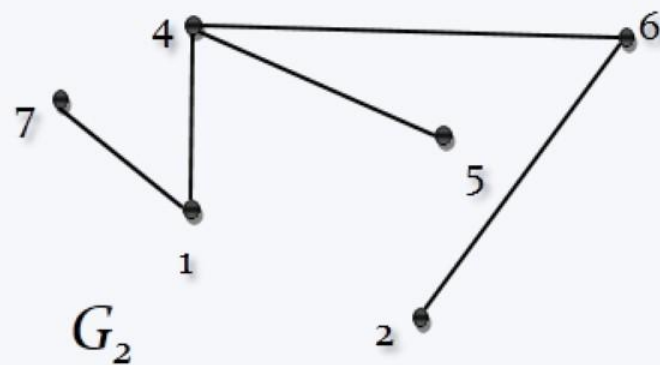
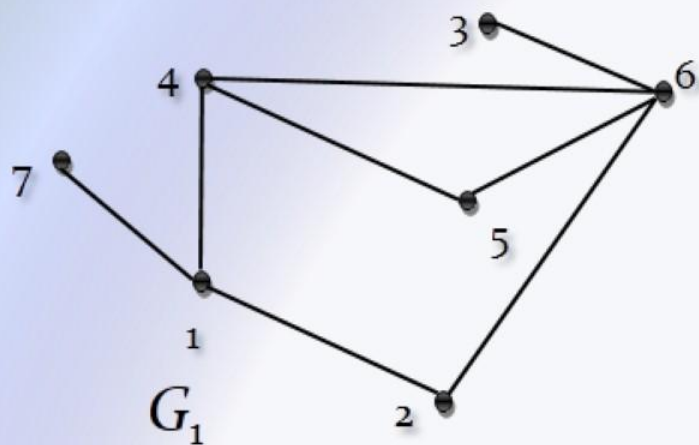
Определение: граф $G_1(V_1, E_1)$ называется *подграфом* графа $G(V, E)$, если $V_1 \subseteq V$, а $E_1 \subseteq E$.

Определение: подграф $G_1(V_1, E_1)$ графа $G(V, E)$ называется *остовным*, если $V_1 = V$, а $E_1 \subseteq E$.

Определение: подграф $G_1(V_1, E_1)$ графа $G(V, E)$ называется *порожденным*, если для любых вершин $u, v \in V$ верно, что $(u, v) \in E$ тогда и только тогда, когда $(u, v) \in E_1$.

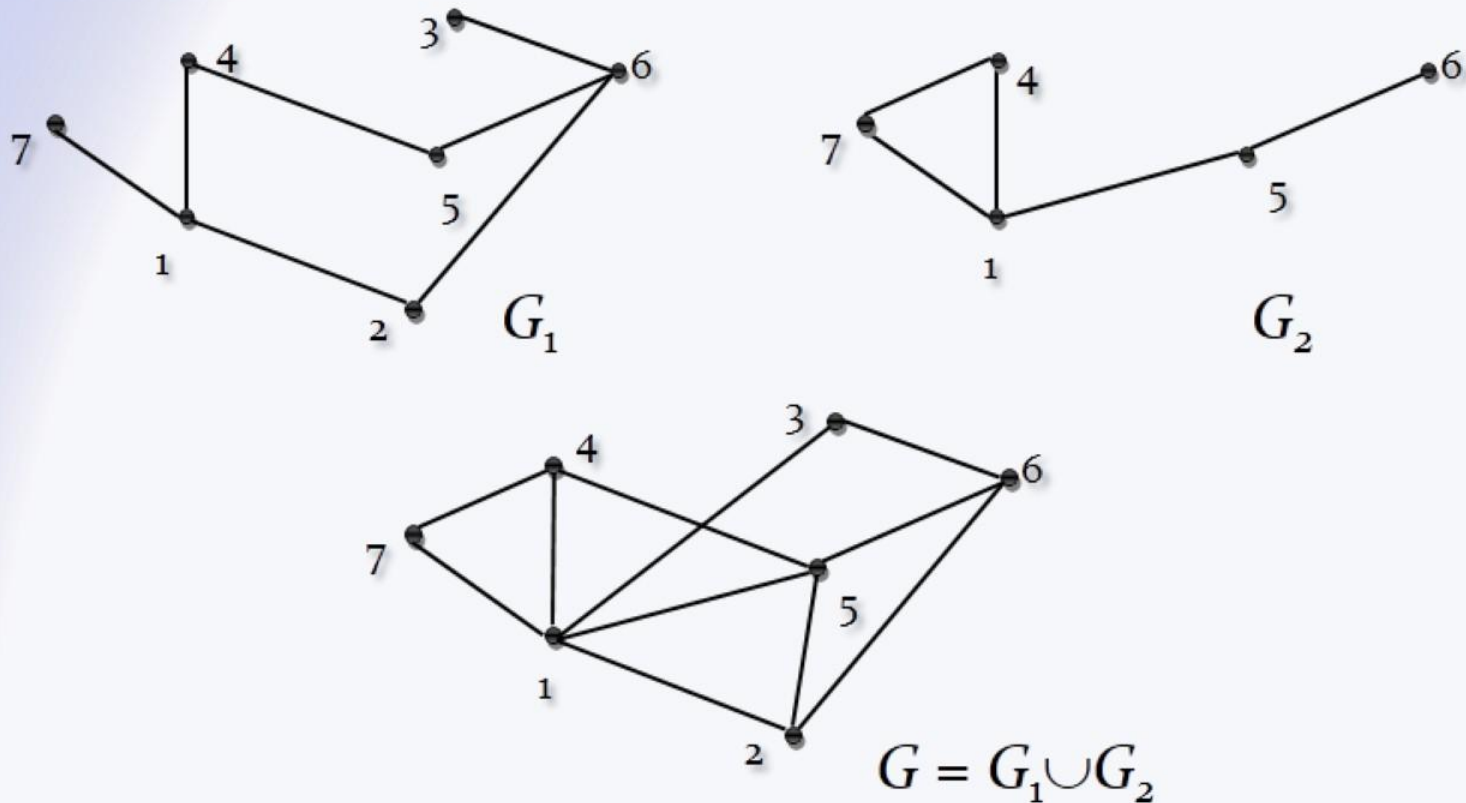
Подграфы

Пример:



Операция объединения

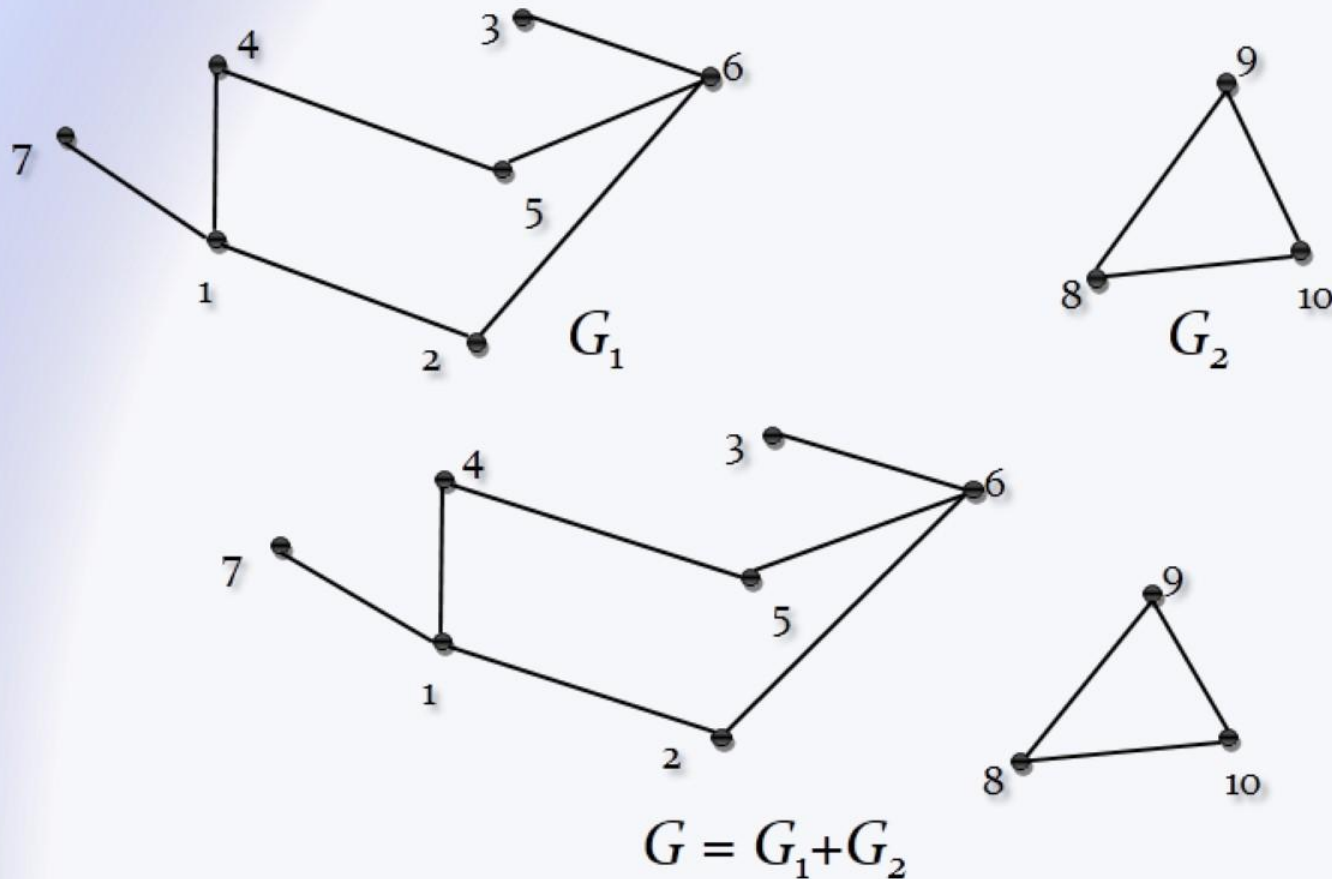
Определение: объединением двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 \cup G_2$, такой что $V = V_1 \cup V_2$, а $E = E_1 \cup E_2$.



Дизъюнктное объединение

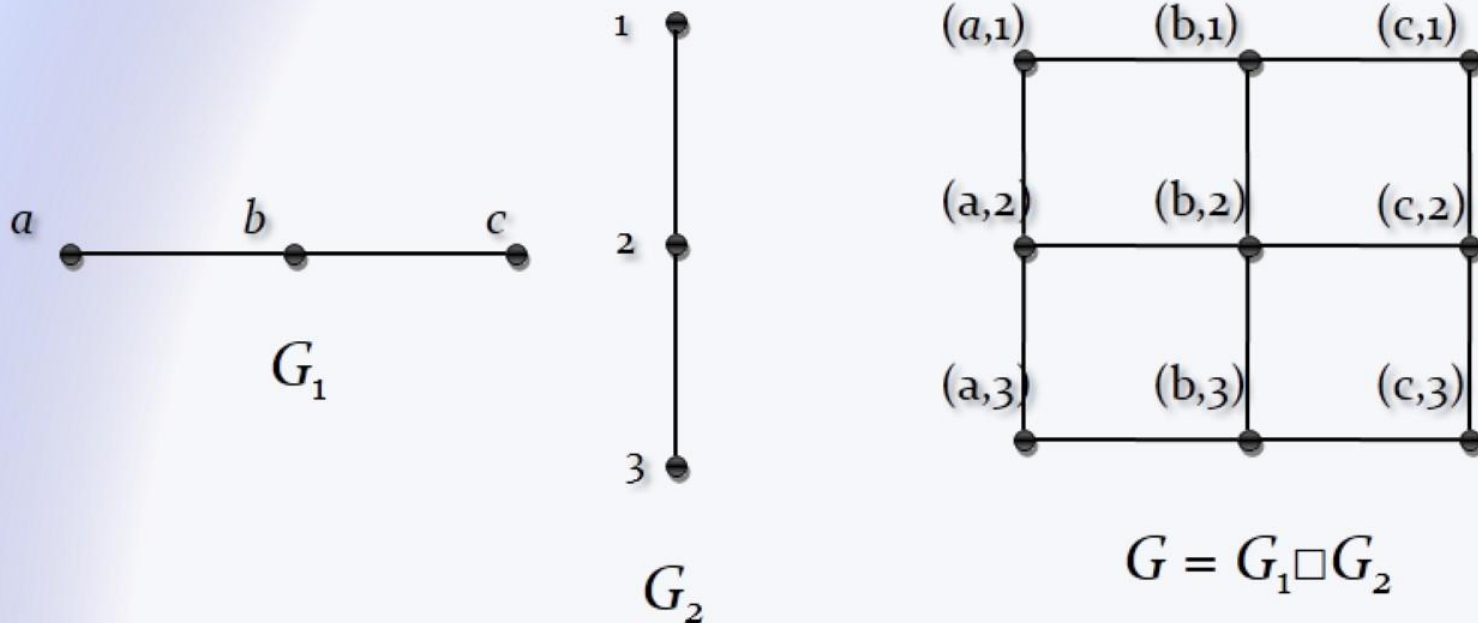
Определение: Объединение графов называется *дизъюнктным*, если $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Обозначение: $G(V, E) = G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2)$.



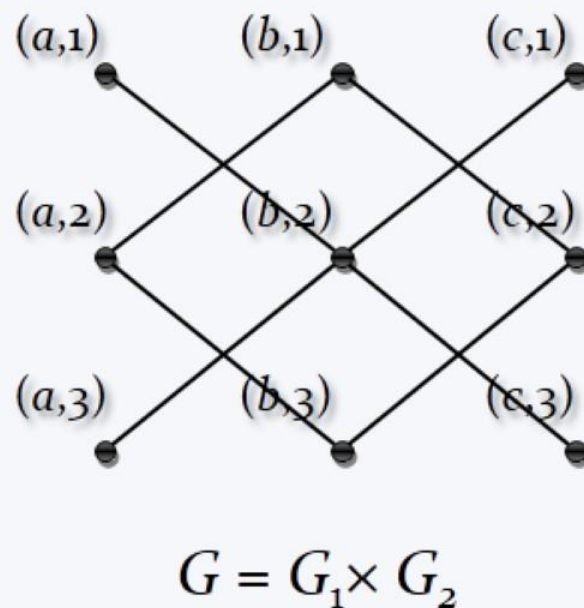
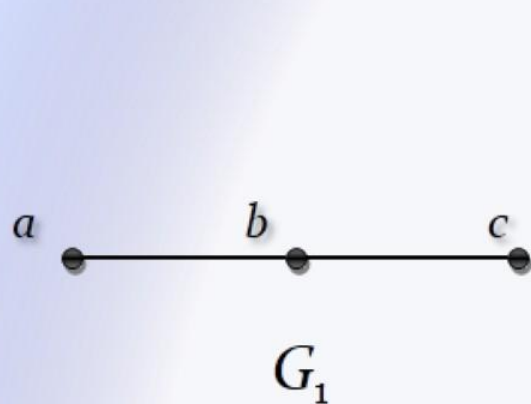
Декартово произведение

Определение: декартовым произведением двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 \square G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 = v_1$, а $u_2 \sim v_2$ или $u_2 = v_2$, а $u_1 \sim v_1$.



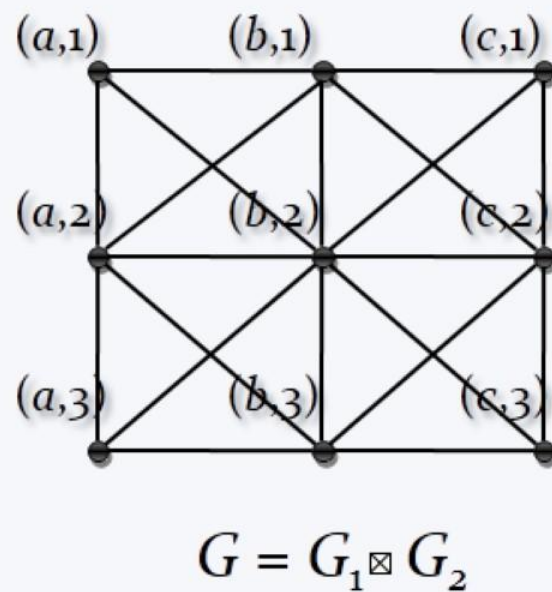
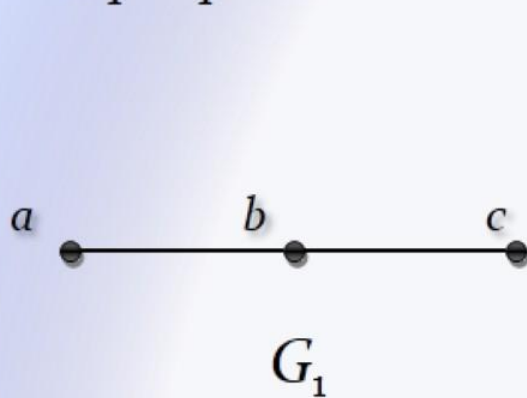
Тензорное произведение

Определение: тензорным произведением двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 \times G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ и $u_2 \sim v_2$.



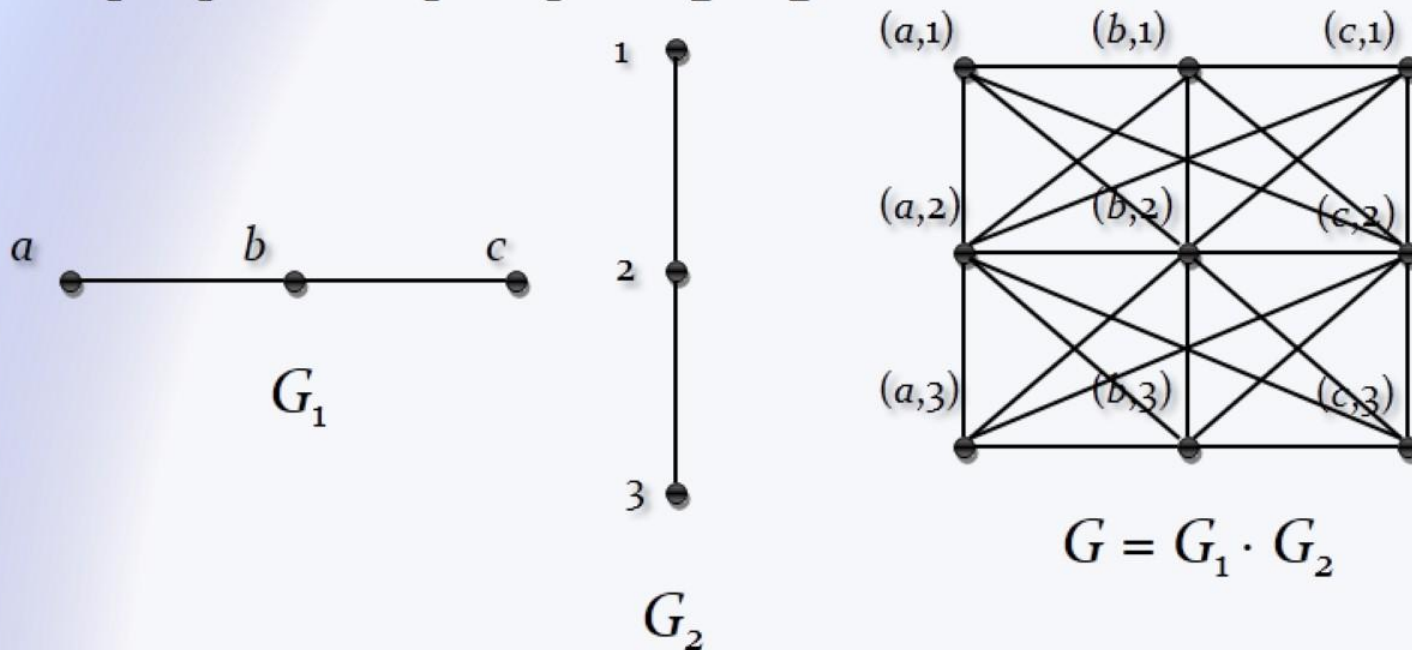
Сильное произведение

Определение: *сильным произведением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 \boxtimes G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ и $u_2 \sim v_2$ или $u_1 = v_1$, а $u_2 \sim v_2$, или $u_2 = v_2$, а $u_1 \sim v_1$.



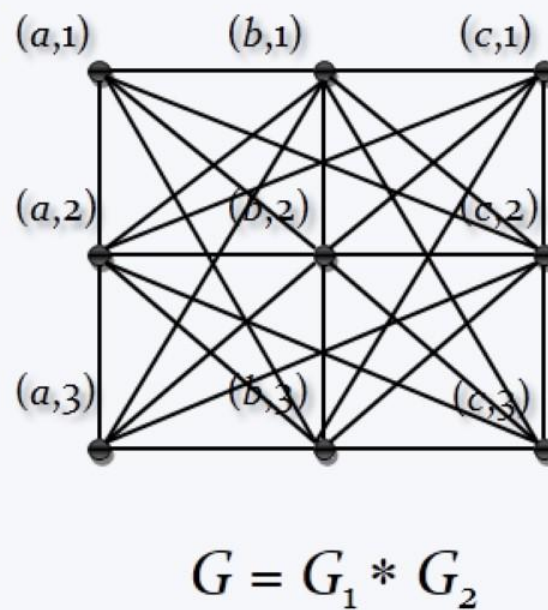
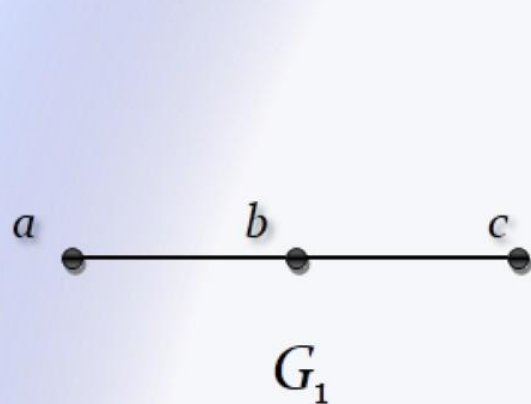
Лексикографическое произведение

Определение: декартовым произведением двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 \cdot G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ или $u_1 = v_1$, а $u_2 \sim v_2$.



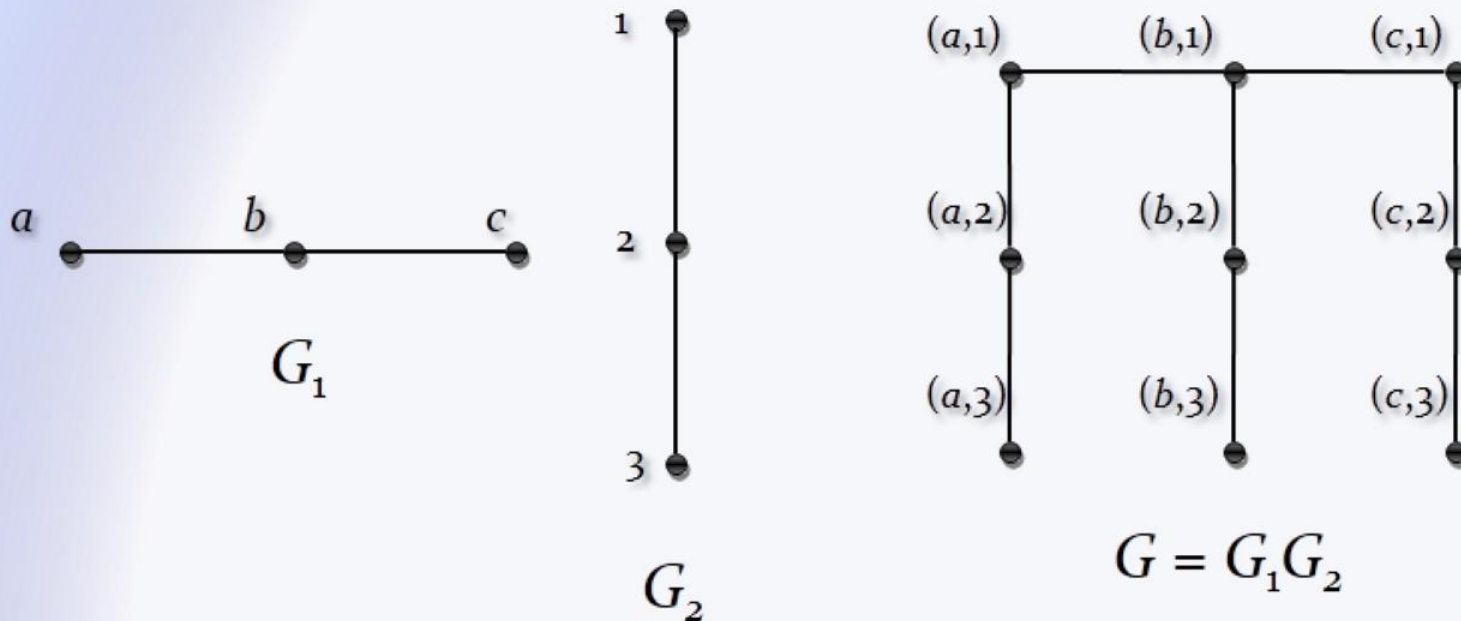
Дизъюнктивное произведение

Определение: дизъюнктивным произведением двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 * G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ или $u_2 \sim v_2$.



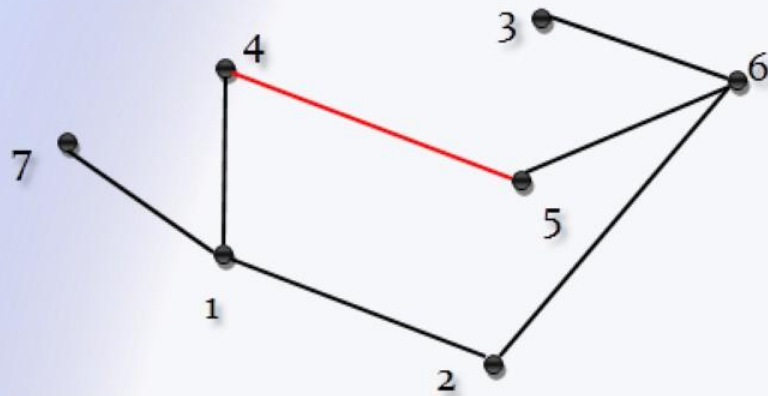
Корневое произведение

Определение: *корневым произведением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а ребра в E образуются по принципу $E_1 + E_2 V_1$.

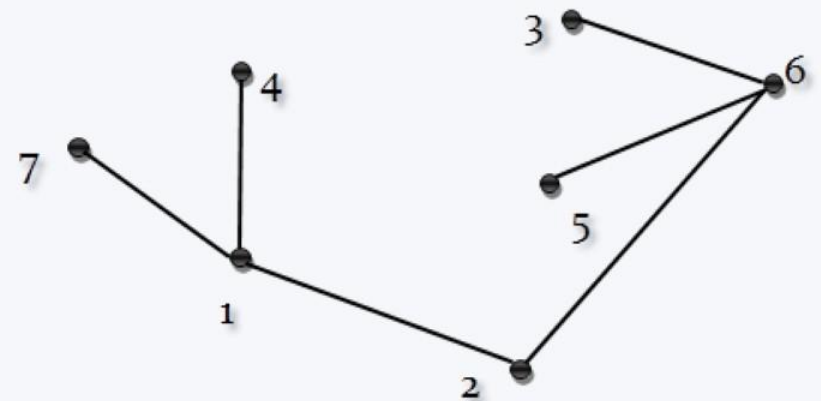


Операция удаления ребра

Определение: граф $G_{(u,v)}(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ в результате удаления ребра (u,v) , если $V_1 = V$, а $E_1 = E \setminus \{(u,v)\}$.



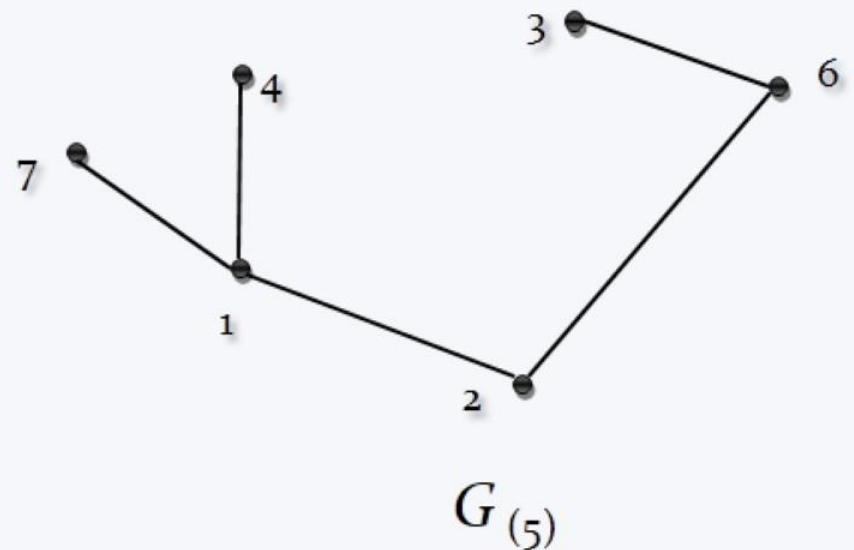
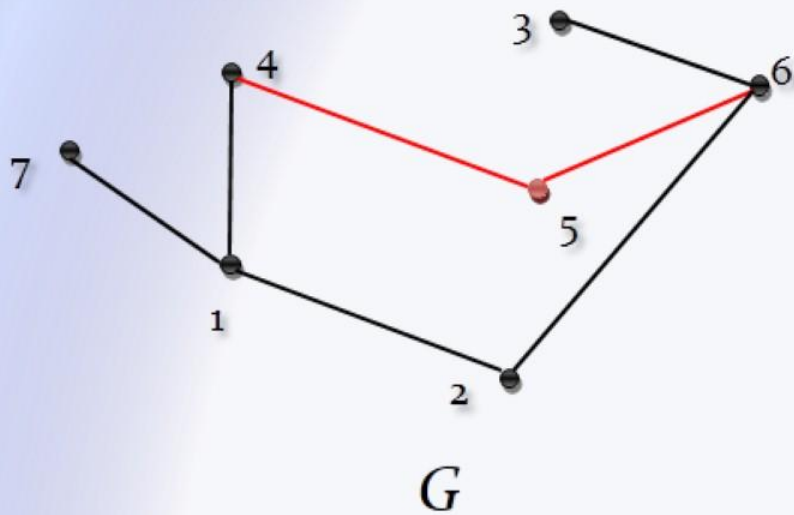
G



$G_{(4,5)}$

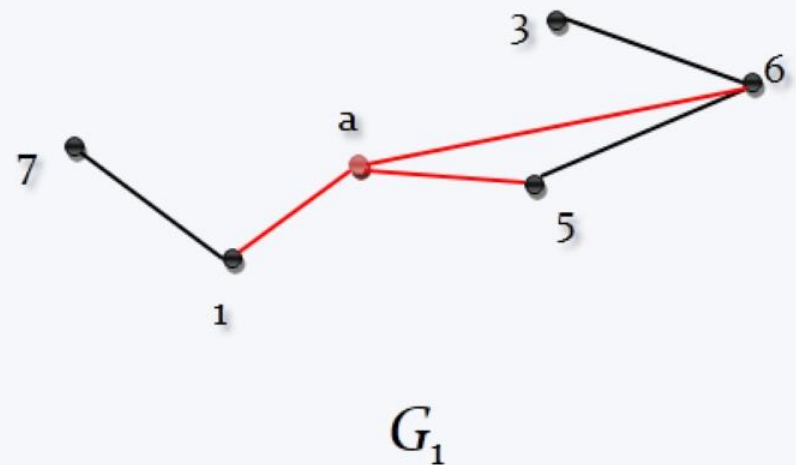
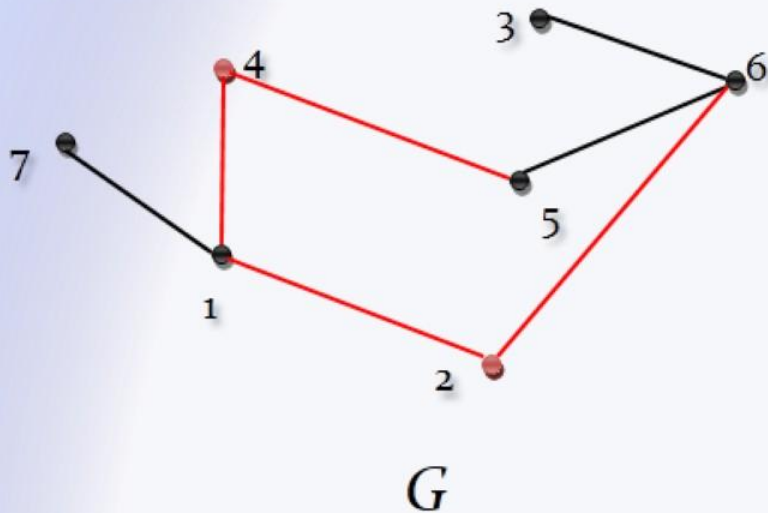
Операция удаления вершины

Определение: граф $G_{(v)}(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ в результате удаления вершины v , если $V_1 = V \setminus \{v\}$, а $E_1 = E \setminus \{(v, u) \mid u \in V\}$.



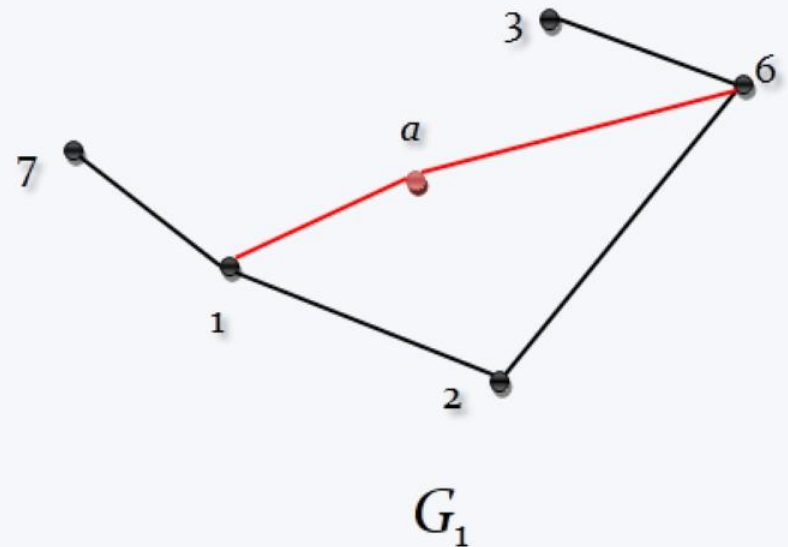
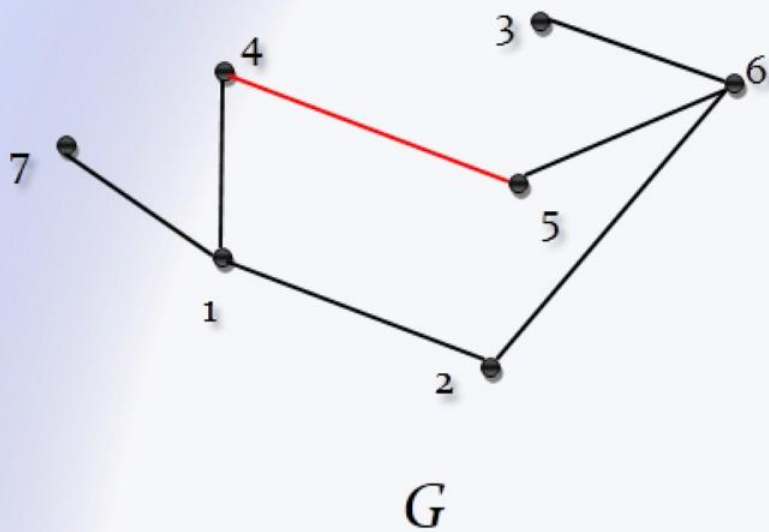
Операция отождествления вершин

Определение: граф $G_1(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ в результате отождествления вершин u и v , если $V_1 = V \cup \{a\} \setminus \{u, v\}$, а $E_1 = E \cup \{(a, y) \mid y \in N(u) \cup N(v)\} \setminus \{(v, u)\}$.



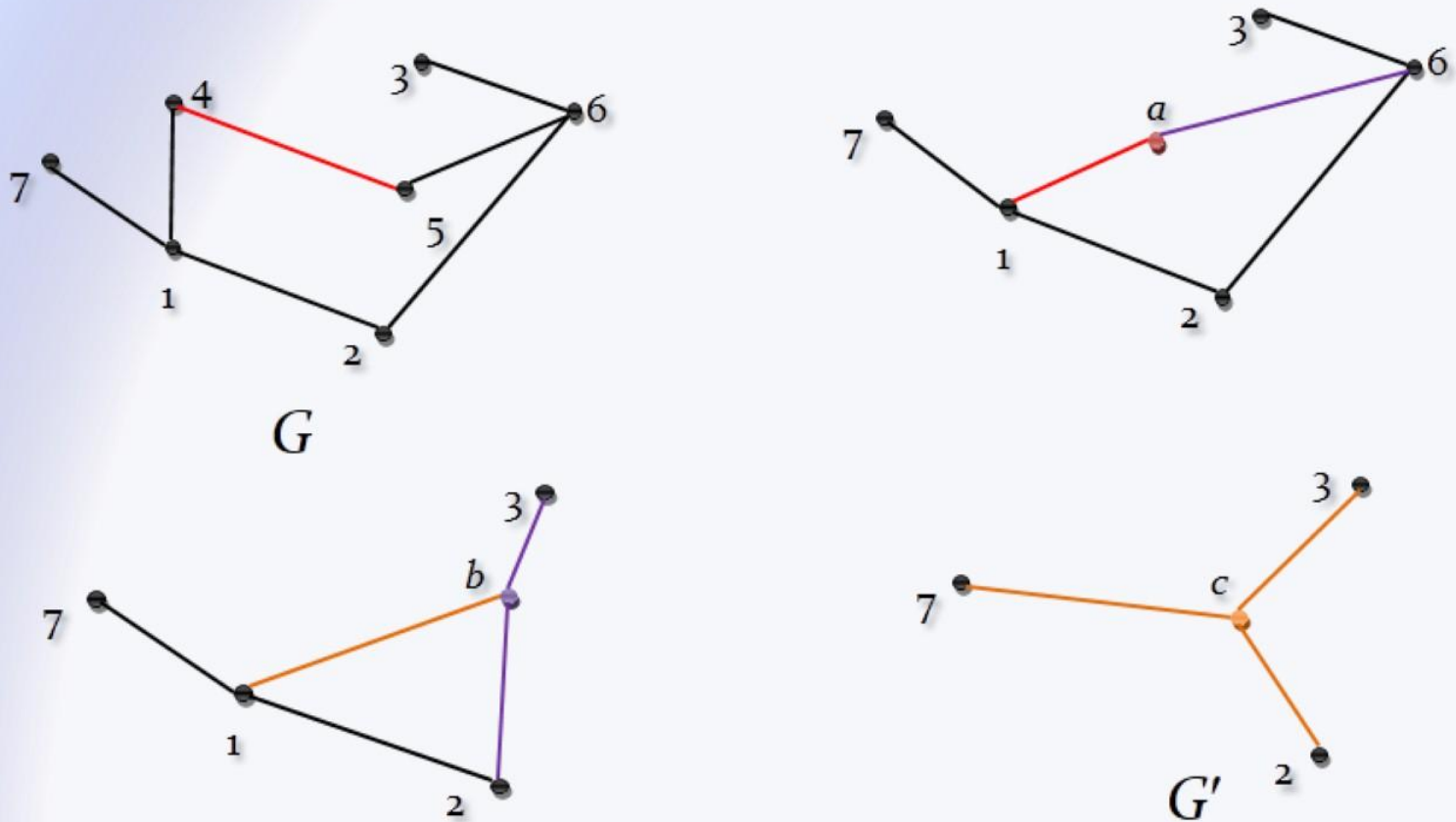
Операция стягивания ребра

Определение: отождествление вершин u и v называется *стягиванием ребра* (u, v) , если $(u, v) \in E(G)$.



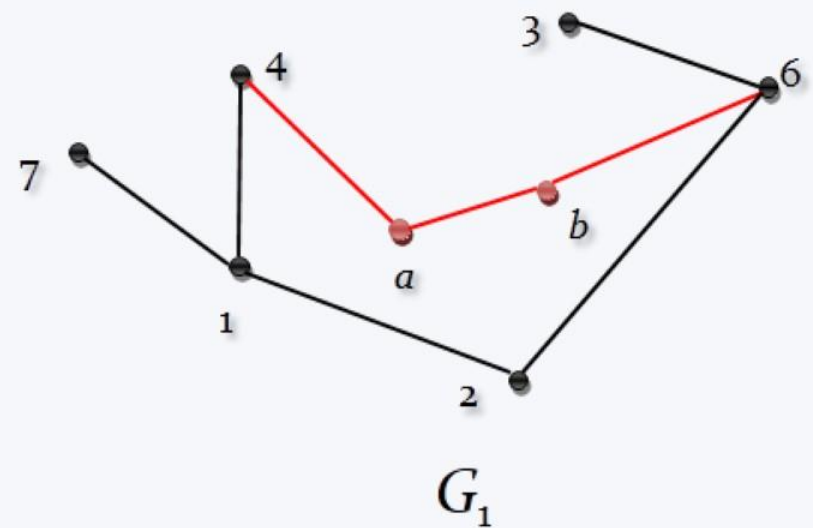
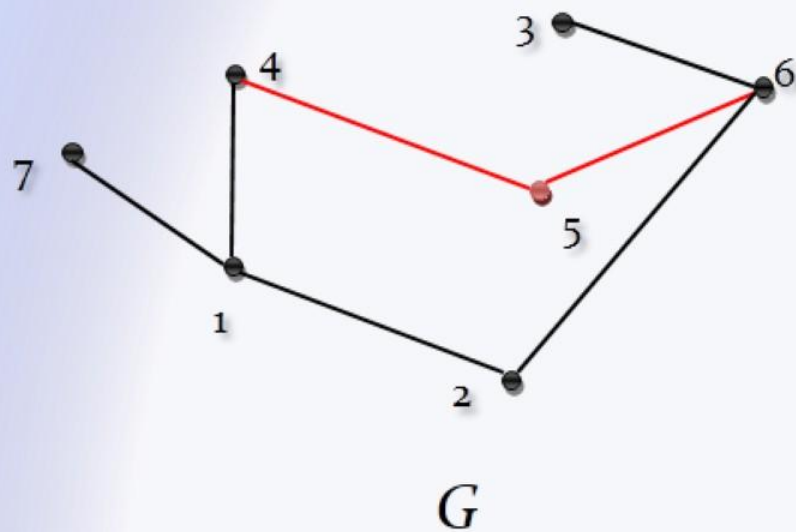
Стягиваемый граф

Определение: граф G называется *стягиваемым* к графу G' , если G' получается из G в результате некоторой последовательности стягивания его ребер.



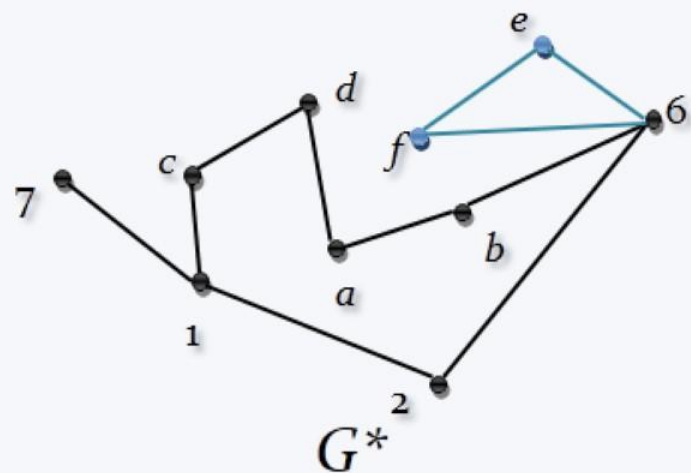
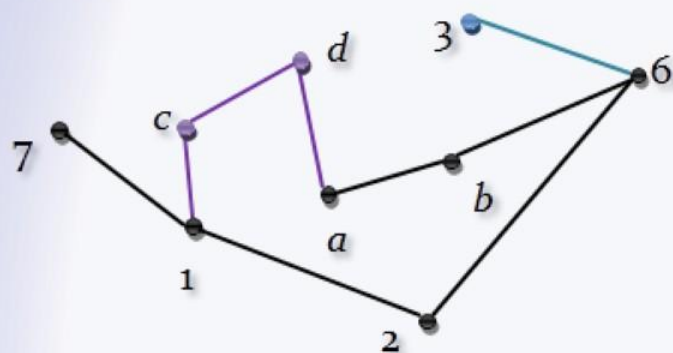
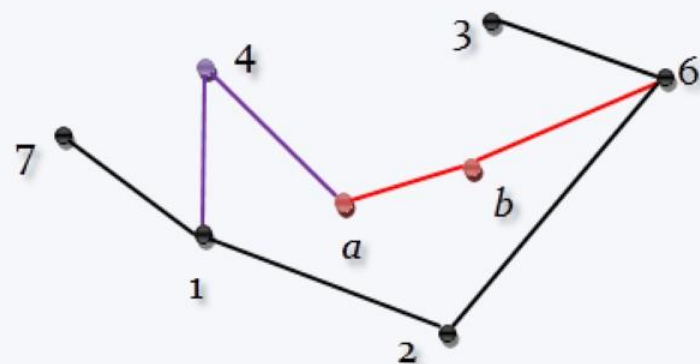
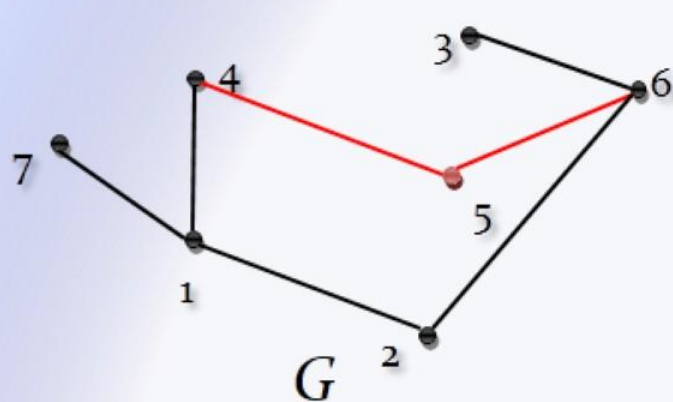
Операция расщепления вершины

Определение: граф $G_1(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ расщеплением вершины v , если $V_1 = V \cup \{v_1, v_2\} \setminus \{v\}$, а $E_1 = E \cup X \cup Y \setminus \{(v_1, v_2)\}$, где $X = \{(v_1, x) \mid x \in N_1(v), N_1(v) \subseteq N(v)\}$, а $Y = \{(v_2, y) \mid y \in N_2(v), N_2(v) \subseteq N(v)\}$.



Расщепление графа

Определение: граф G^* называется *расщеплением* графа G , если G^* получается из G в результате некоторой последовательности расщепления его вершин.



Операция подразбиения ребра

Определение: граф $G_1(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ в подразбиении ребра (u, v) , если $V_1 = V \cup \{a\}$, а $E_1 = E \cup \{(a, u), (a, v)\} \setminus \{(v, u)\}$.

