Лекция №3

Графы.
Общие понятия

Понятие графа

Определение: Упорядоченная пара (V, E), где V произвольное непустое множество, а E подмножество множества V^2, называется *графом*.

Если $|V| = n$, то число n называется *порядком графа*.

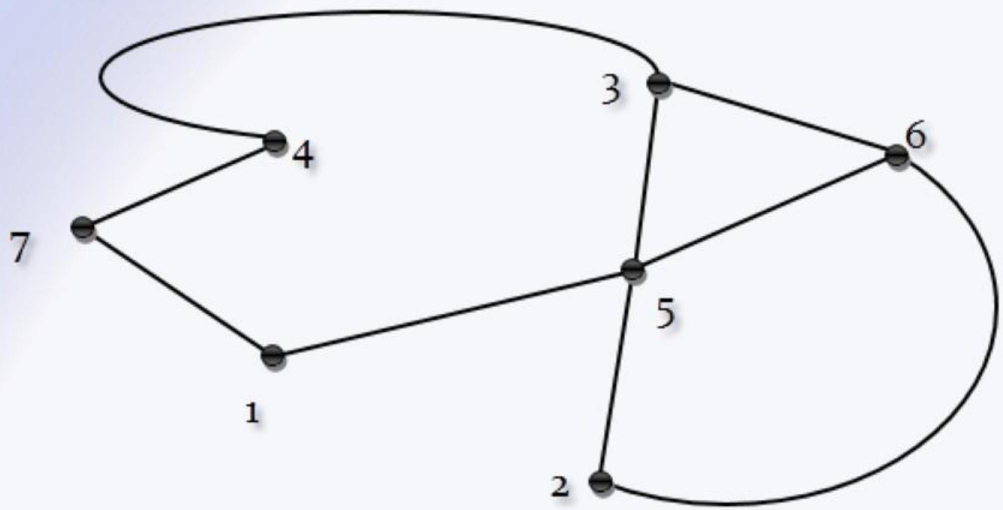
Если $|V| = n$ и $|E| = n$, то граф называется (n, m)-графом.

Обозначение: $G(V, E)$ – граф G,

$V(G)$ – множество вершин графа G,

$E(G)$ – множество ребер графа G.

Геометрическая интерпретация



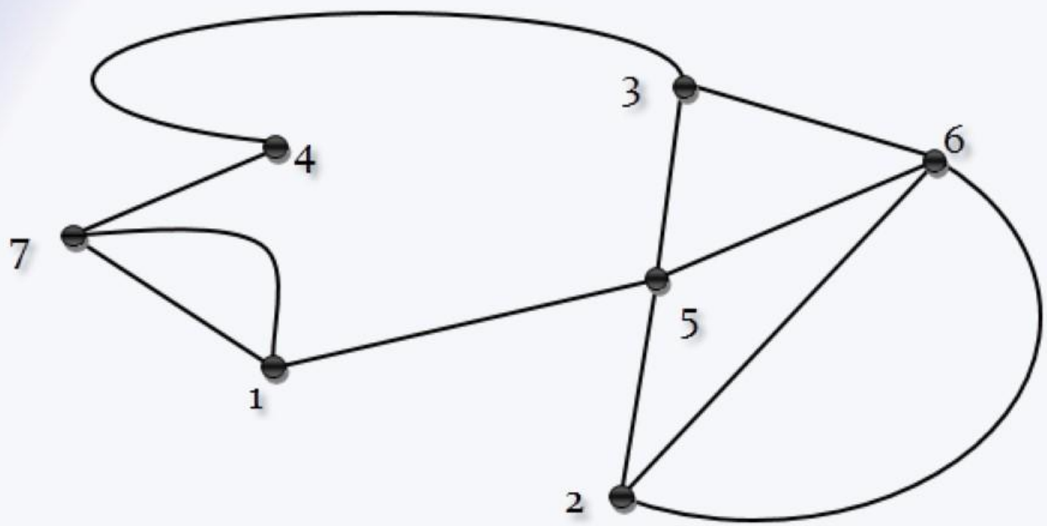
$G(V, E)$

$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$E(G) = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 6)\}$

Мультиграф

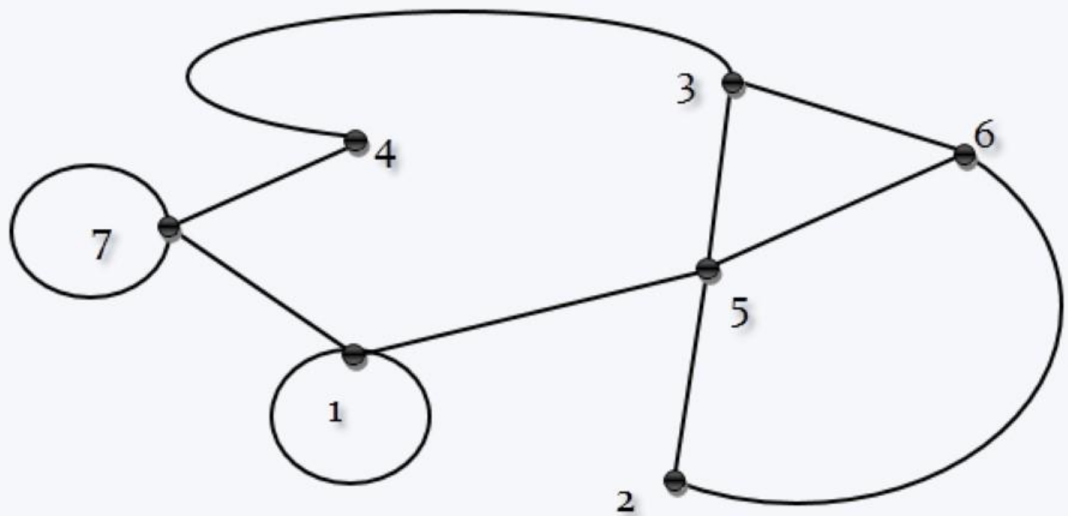
Определение: граф, в котором допускается существование кратных (повторяющихся) ребер, называется *мультиграфом*.



$E(G) = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 2), (7, 1)\}$

Псевдограф

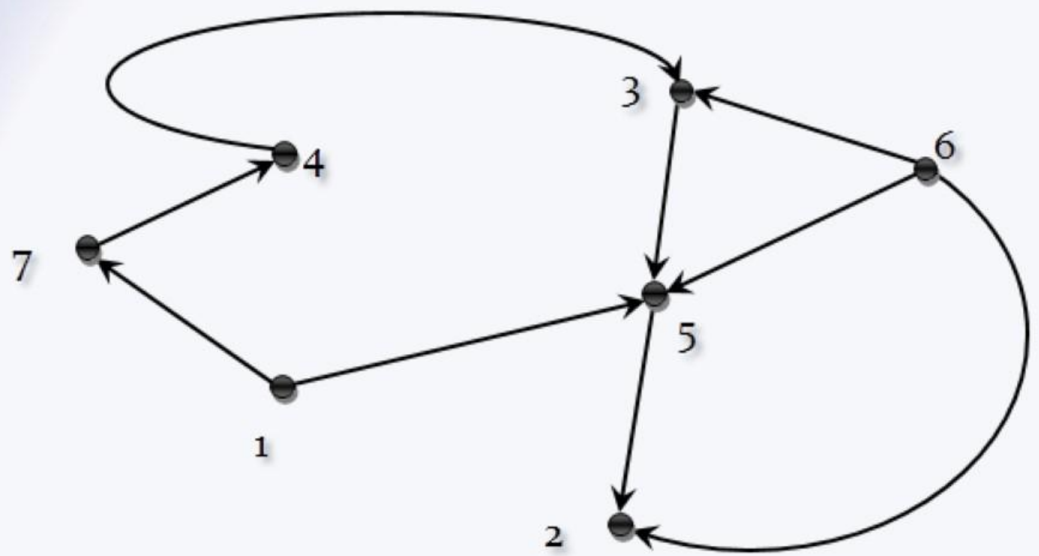
Определение: граф, в котором допускается существование петель (ребро, соединяющее вершину саму с собой), называется *псевдографом*.



$E(G) = \{(1, 1), (1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 6), (7, 7)\}$

Ориентированный граф

Определение: граф $G(V, E)$, где E является подмножеством $V \times V$, называется *орграфом (ориентированным графом).*

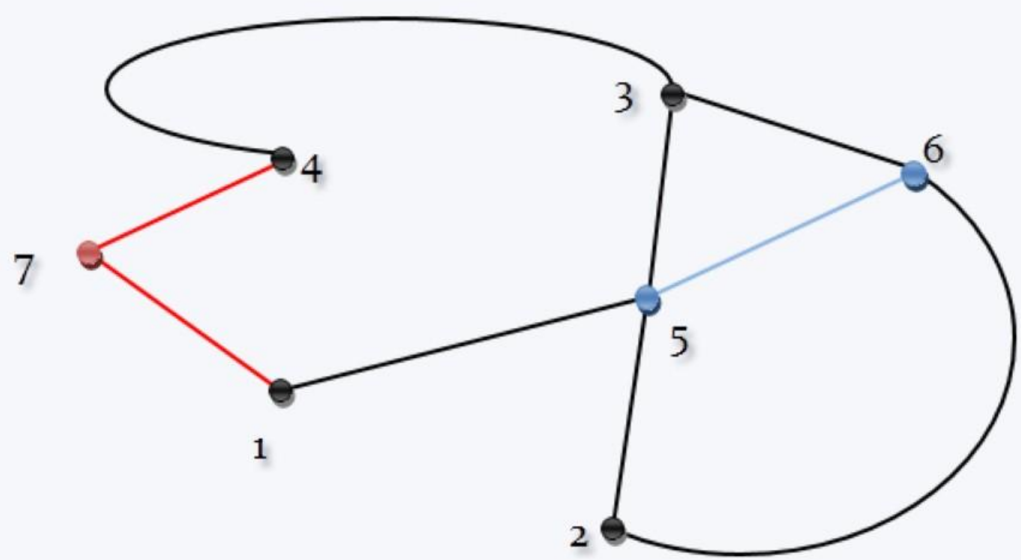


$E(G) = \{(1, 5), (1, 7), (3, 5), (4, 3), (5, 2), (6, 2), (6, 3), (6, 5), (7, 4)\}$

Понятие смежности

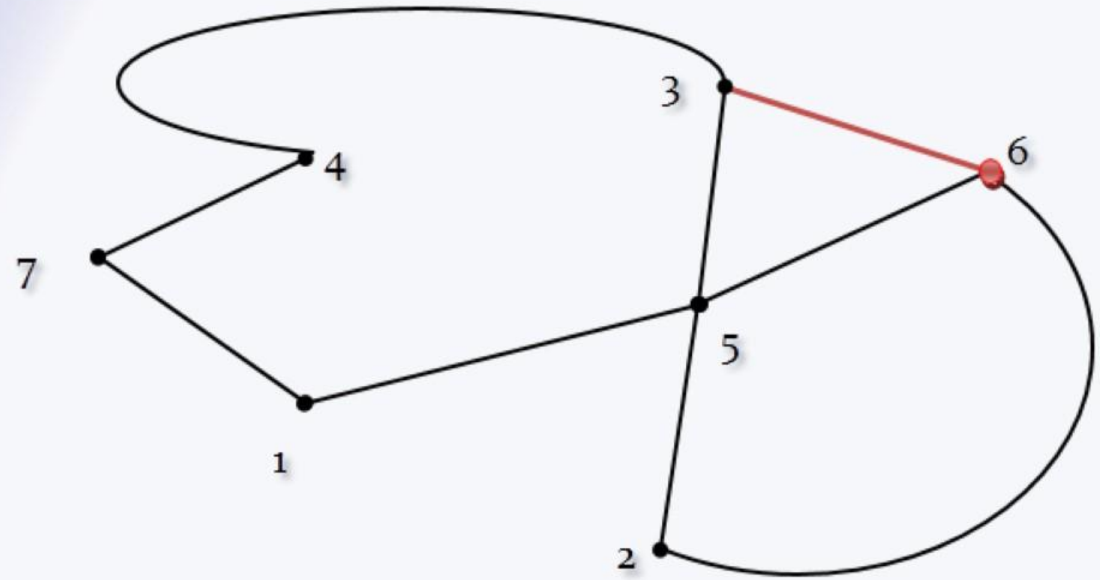
Определение: две вершины графа называются *смежными*, если они соединены ребром.

Определение: два ребра графа называются *смежными*, если они выходят из одной вершины.



Понятие инцидентности

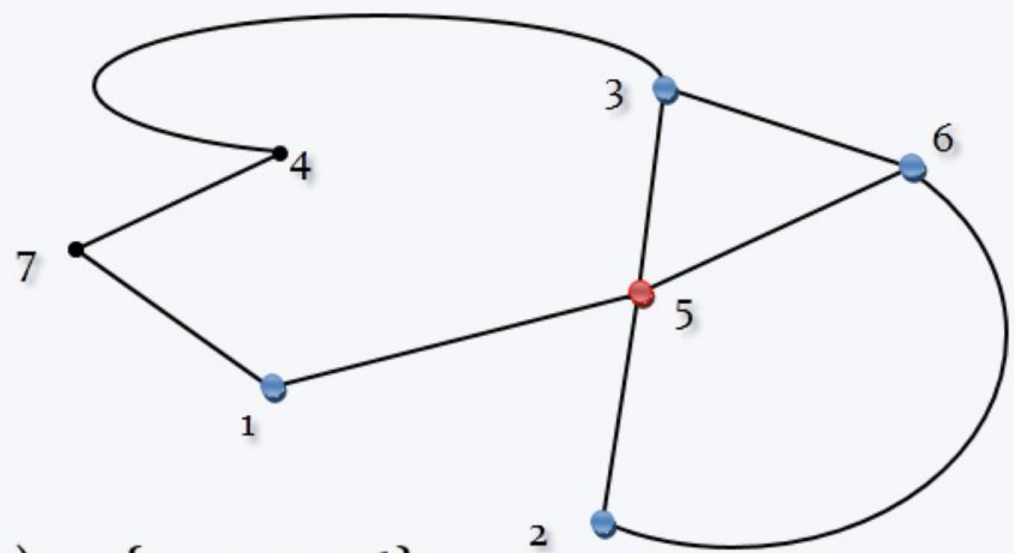
Определение: ребро и вершина называются *инцидентными*, если данная вершина является концом данного ребра.



Окружение вершины

Определение: *окружением вершины v* в графе G, называется множество смежных с ней вершин графа G.

Обозначение: $N(v)$, $N_G(v)$.

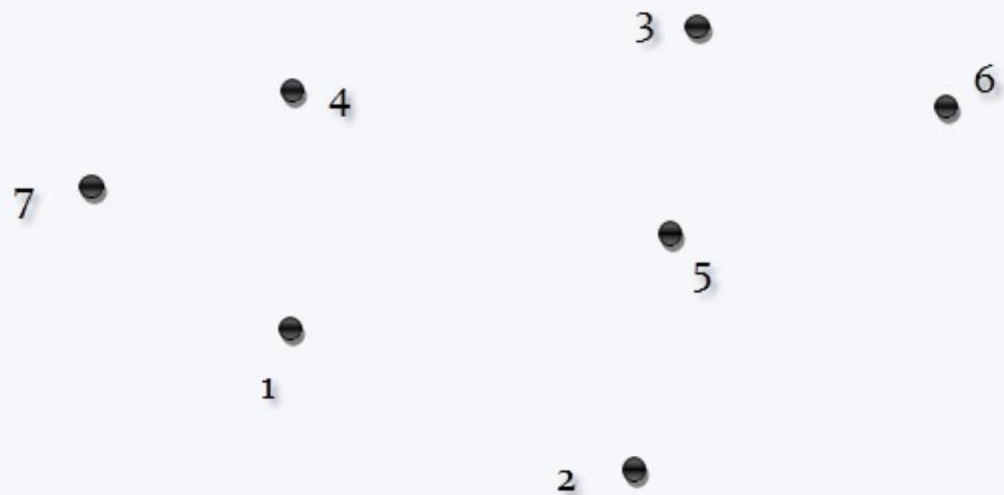


$N(5) = \{1, 2, 3, 6\}$

Пустой граф

Определение: Граф называется *пустым*, если он не содержит ни одного ребра, то есть $E = \varnothing$.

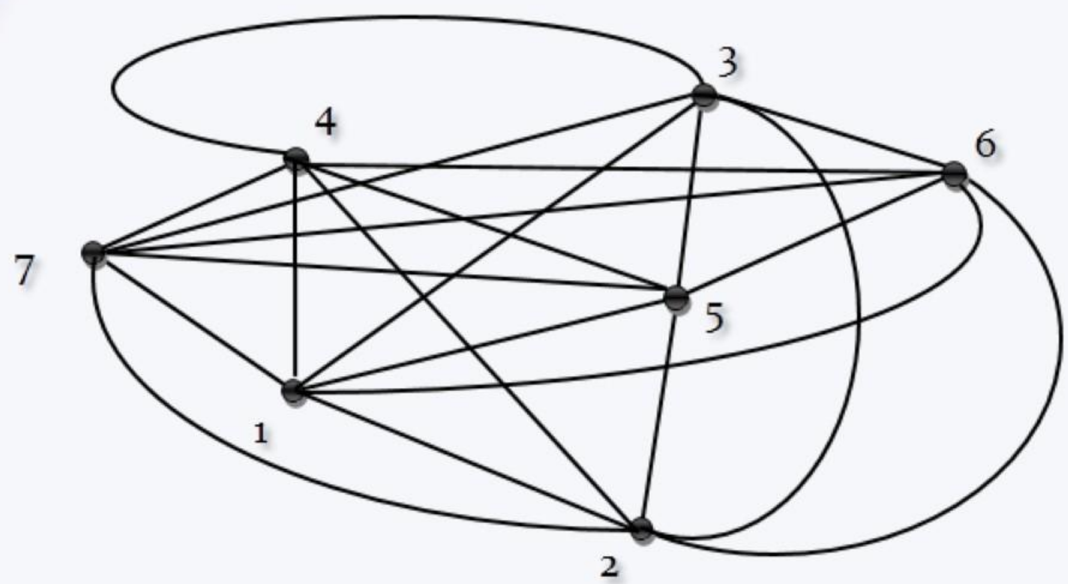
Обозначение: O_n – пустой граф порядка n.



Полный граф

Определение: граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром.

Обозначение: K_n – полный граф порядка n.



Полный граф

Теорема:

Число ребер в полном графе равно $\frac{n(n-1)}{2}$

Доказательство:

Всего в графе n вершин. Из каждой из них выходит $(n\text{-}1)$ ребро.

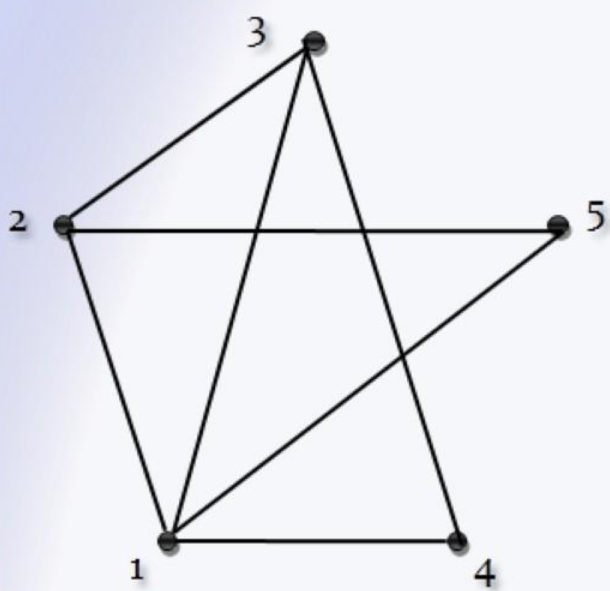
Таким образом, получим $n(n\text{-}1)$ ребро.

Так как каждое ребро относится к двум вершинам, при таком подсчете оно будет учитываться дважды. Следует поделить на 2, получим:

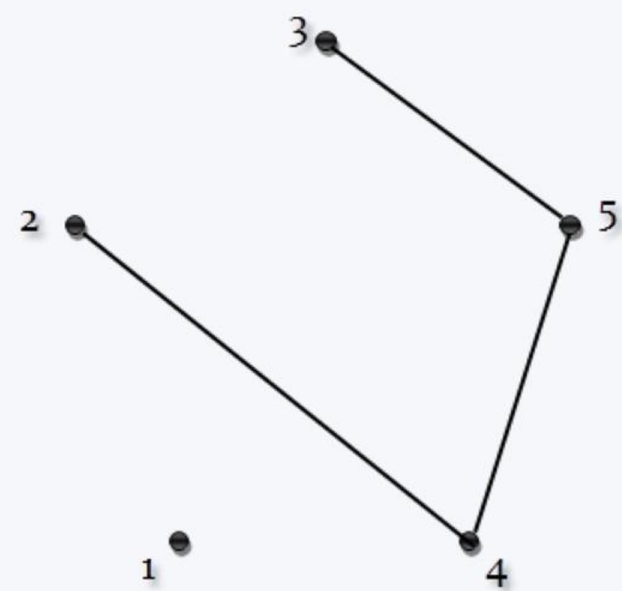
$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Дополнительный граф

Определение: *дополнением графа* $G(V, E)$ или дополнительным графом к графу G, называется граф $\overline{G}(V, \overline{E})$.



G

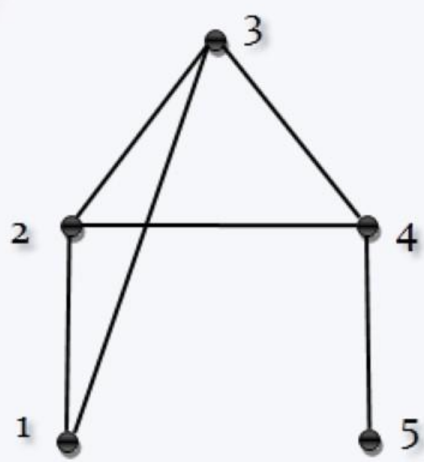


$\overline{G}$

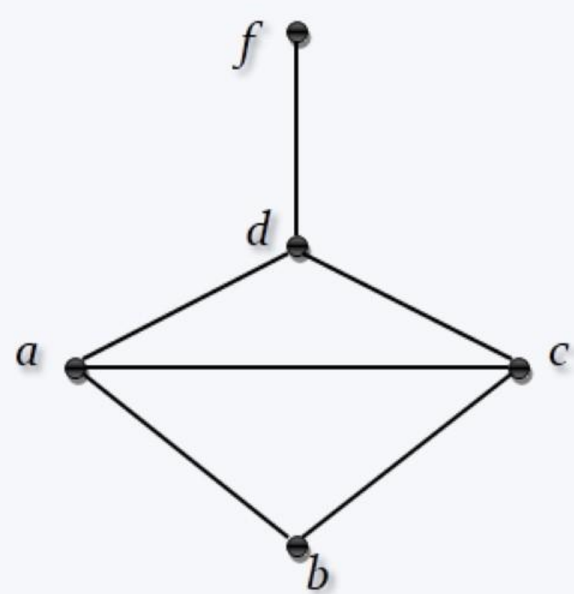
Изоморфизм графов

Определение: Два графа называются изоморфными, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющее отношение смежности.

Обозначение: $G \cong H$.



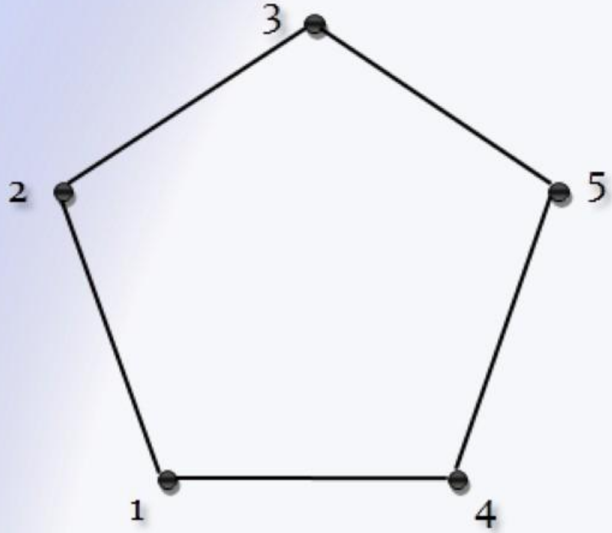
G



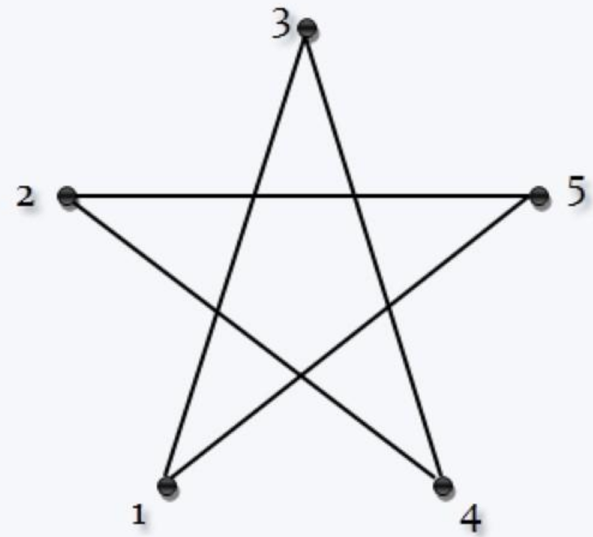
H

Самодополнительный граф

Определение: если граф изоморфен своему дополнению, то он называется *самодополнительным*.



G



$\overline{G}$

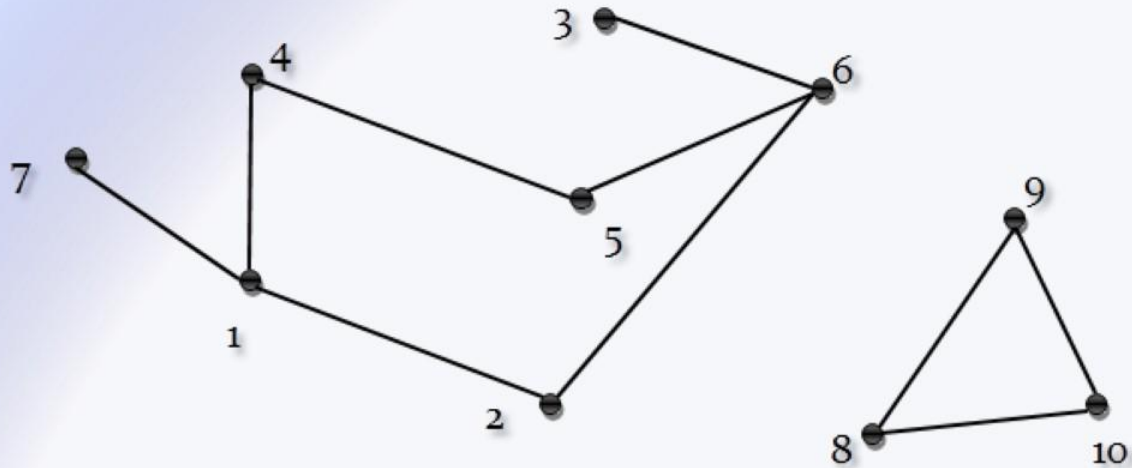
Маршрут. Расстояние между вершинами

Определение: последовательность вершин и ребер графа вида $v_1(v_1,v_2)v_2(v_2,v_3)v_3 \ldots v_{n-1}(v_{n-1},v_n)v_n$ называется *маршрутом*, соединяющим вершины v_1 и v_n.

Определение: *длиной маршрута* называется число входящих в него ребер.

Определение: *расстоянием* между вершинами u и v называется длина кратчайшего маршрута между ними.
Обозначение: $d(u, v)$.

Пример:



Из 1 в 6 существует 2 маршрута:
1(1, 2)2(2, 6)6 и 1(1, 4)4(4, 5)5(5, 6)6
$d(1, 6) = 2$

Из 1 в 10 нет маршрута.
$d(1, 10) = \infty$

Метрические характеристики

Определение: расстояние до наиболее удаленной от вершины *u* вершины графа называется *эксцентриситетом вершины u*.

$$e(u) = \max_{x \in V(G)} d(u, x)$$

Определение: *радиусом графа* называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.

$$r(G) = \min_{u \in V(G)} e(u)$$

Метрические характеристики

Определение: *диаметром графа* называется наибольший из эксцентриситетов его вершин.

$$d(G) = \max_{u \in V(G)} e(u)$$

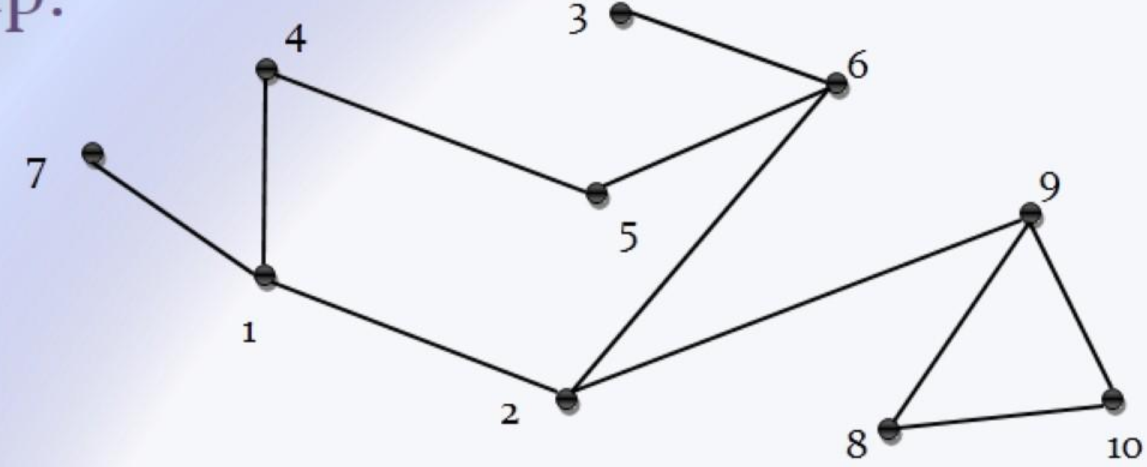
Определение: множество вершин графа с наименьшими эксцентриситетами называется *центром графа*.

$$Z(G) = \{u \in V(G) \mid e(u) = r(G)\}$$

Определение: вершины с наибольшими эксцентриситетами называются *диаметральными* или *переферийными*.

$$D(G) = \{u \in V(G) \mid e(u) = d(G)\}$$

Пример:



$e(1) = 3$, $e(2) = 2$, $e(3) = 4$, $e(4) = 4$, $e(5) = 4$, $e(6) = 3$,
$e(7) = 4$, $e(8) = 4$, $e(9) = 3$, $e(10) = 4$.

$r(G) = 2$, $d(G) = 4$.

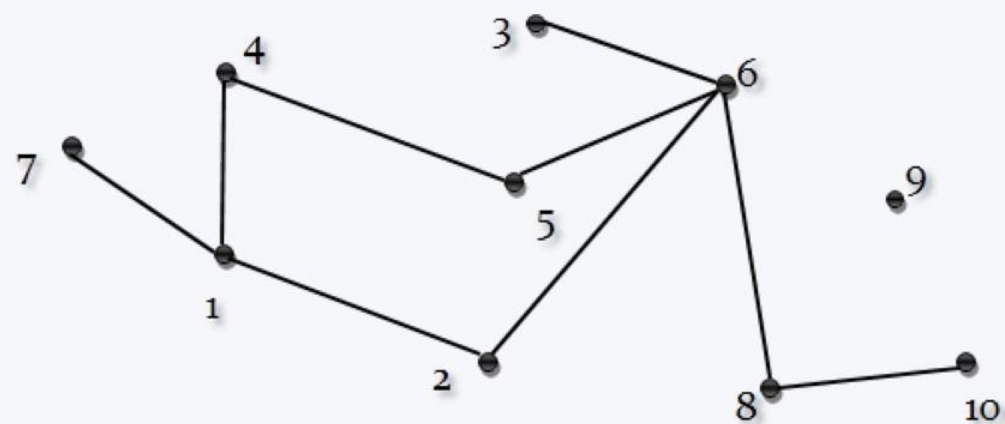
$Z(G) = \{2\}$, $D(G) = \{3, 4, 5, 7, 8, 10\}$.

Степени вершин графа

Определение: *степенью вершины u* графа *G* называется количество инцидентных ей ребер.

Обозначение: $\deg(u)$.

Пример:

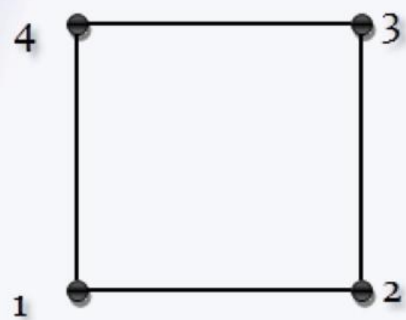


$\deg(1)=3$, $\deg(6)=4$, $\deg(2)=\deg(4)=\deg(5)=\deg(8)=2$,
$\deg(3)= \deg(7)=\deg(10)=1$ – висячие вершины.
$\deg(9)=0$ – изолированная вершина.

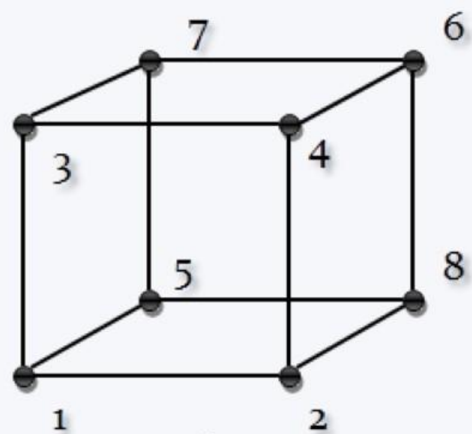
Однородные графы

Определение: граф называется *однородным*, если степени всех его вершин равны. Число, которому равны все степени графа, называется степенью однородного графа.

Обозначение: R_n^k, где k – степень каждой вершины, n – порядок графа.



R_4^2



R_8^3

Степени вершин графа

Утверждение: сумма всех степеней вершин графа есть четное число, равное удвоенному количеству ребер.

Утверждение: число вершин нечетной степени в любом графе четно.

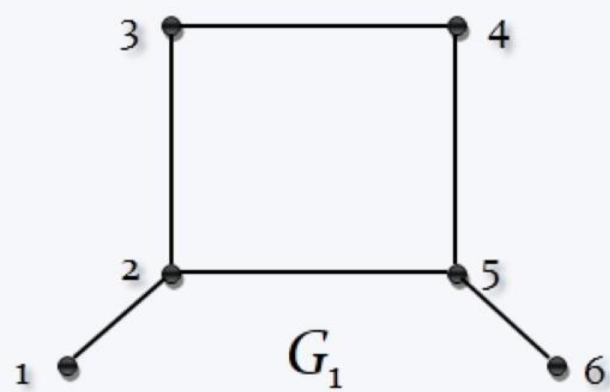
Утверждение: в любом графе обязательно найдутся две вершины, имеющие одинаковую степень.

Утверждение: в любом однородном графе либо его порядок, либо степень его вершин есть четное число.

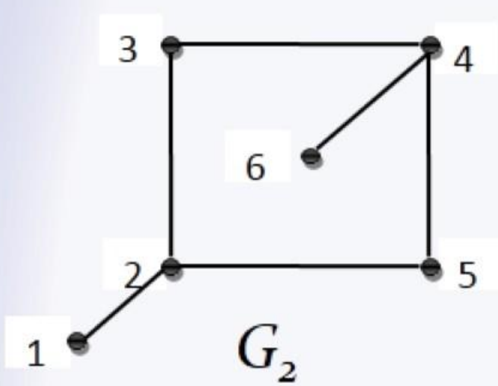
Степенная последовательность

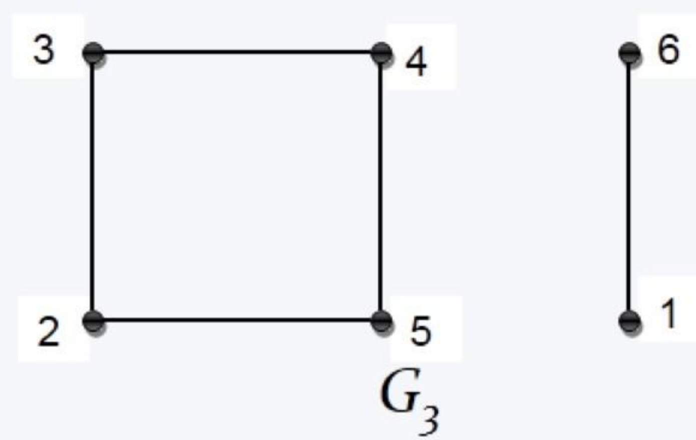
Определение: последовательность всех степеней вершин графа называется *степенной последовательностью графа*.

Пример:



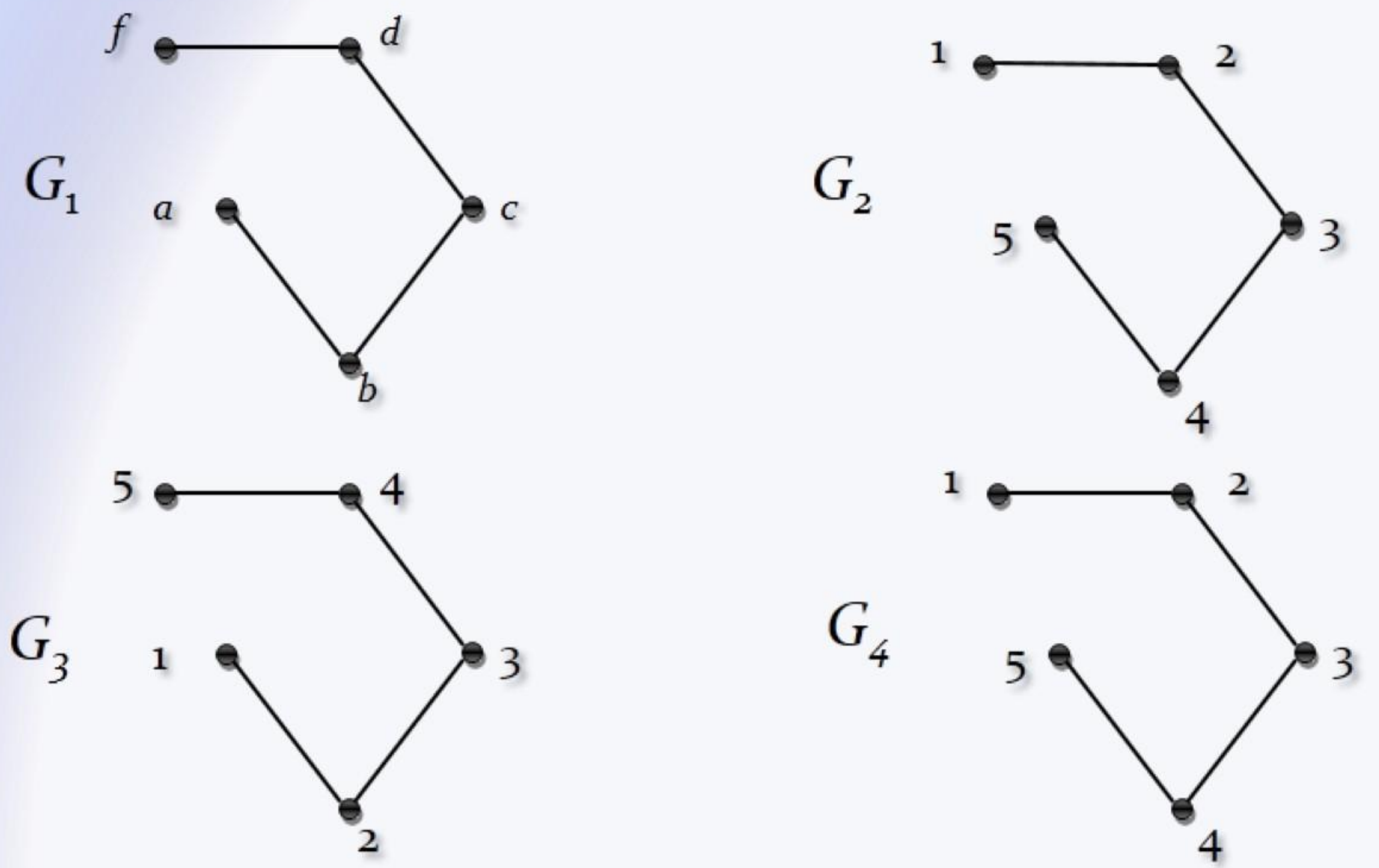
1, 1, 2, 2, 3, 3





Помеченные графы

Определение: граф порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые имена.



Подграфы

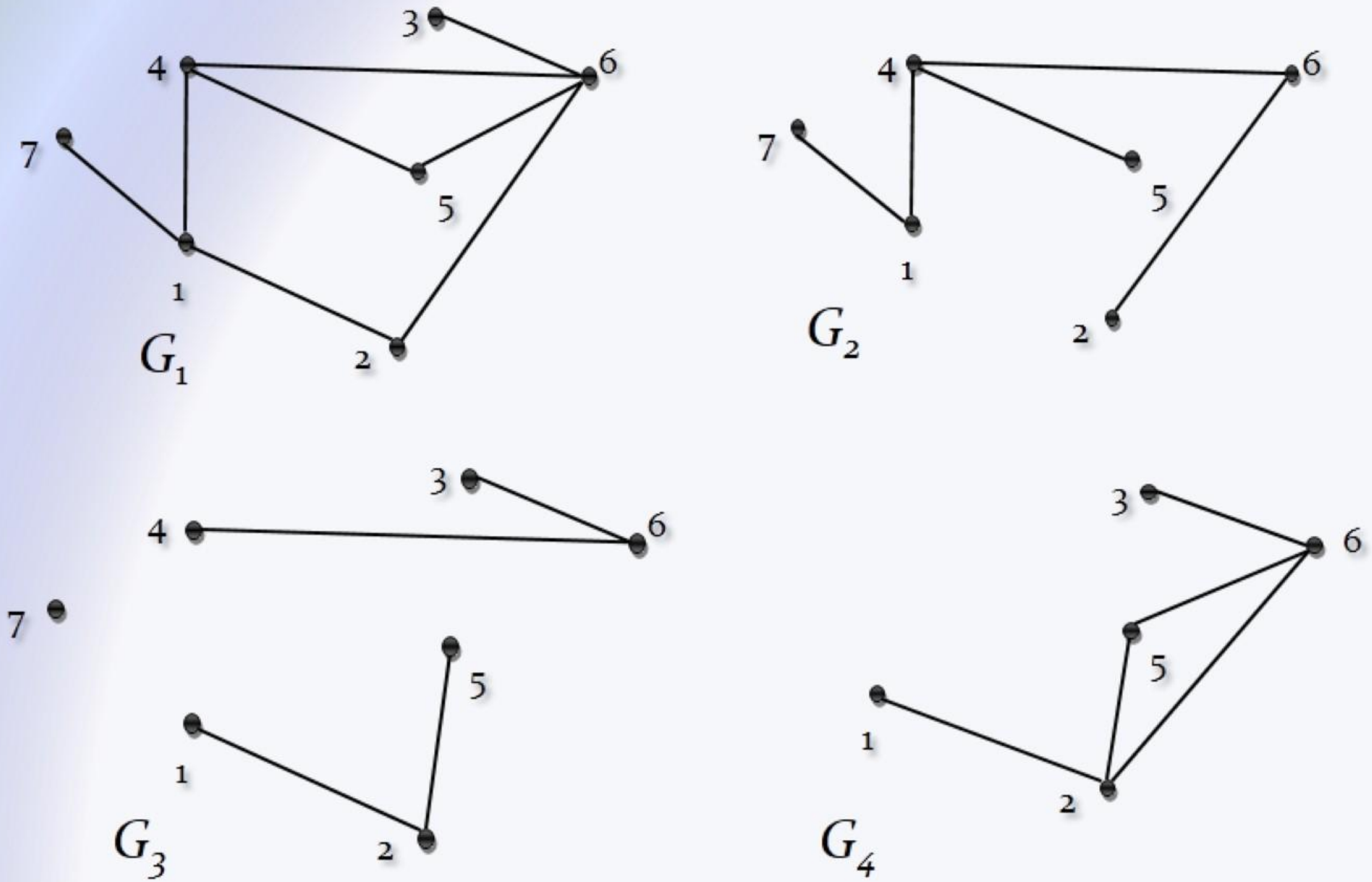
Определение: граф $G_1(V_1, E_1)$ называется *подграфом* графа $G(V, E)$, если $V_1 \subseteq V$, а $E_1 \subseteq E$.

Определение: подграф $G_1(V_1, E_1)$ графа $G(V, E)$ называется *остовным*, если $V_1 = V$, а $E_1 \subseteq E$.

Определение: подграф $G_1(V_1, E_1)$ графа $G(V, E)$ называется *порожденным*, если для любых вершин $u,v \in V$ верно, что $(u,v) \in E$ тогда и только тогда, когда $(u, v) \in E_1$.

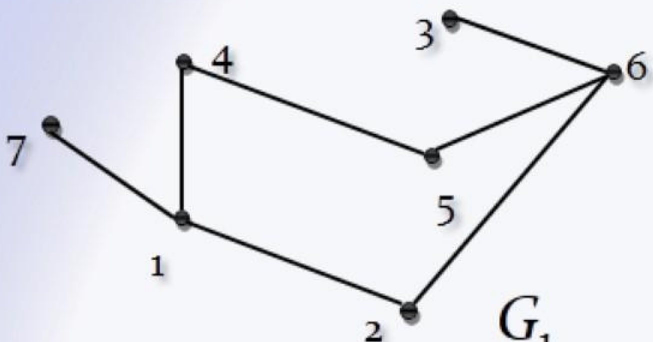
Подграфы

Пример:



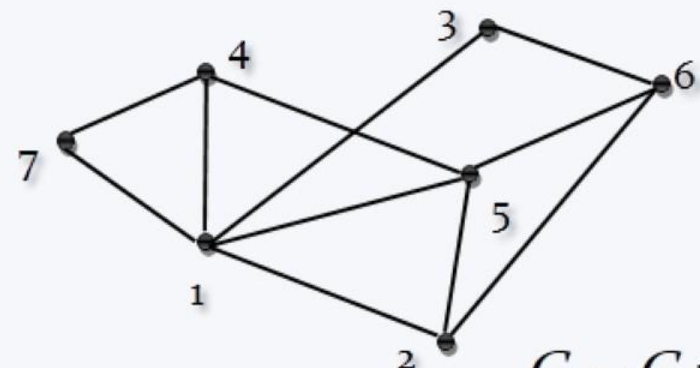
Операция объединения

Определение: *объединением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V,E) = G_1 \cup G_2$, такой что $V = V_1 \cup V_2$, а $E = E_1 \cup E_2$.



G_1

G_2

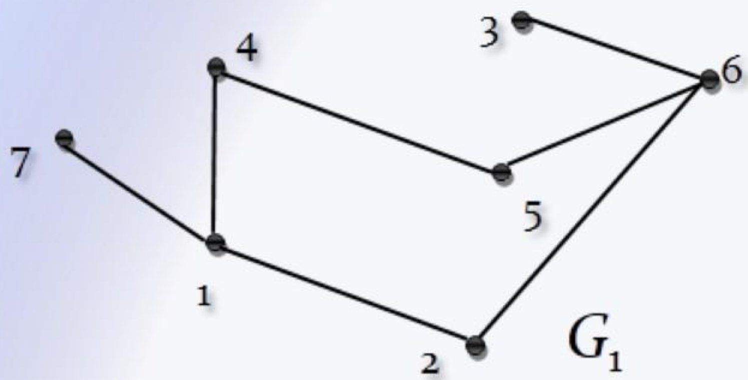


$G = G_1 \cup G_2$

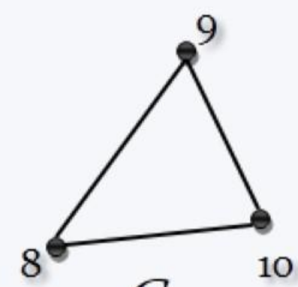
Дизъюнктное объединение

Определение: Объединение графов называется *дизъюнктным*, если $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

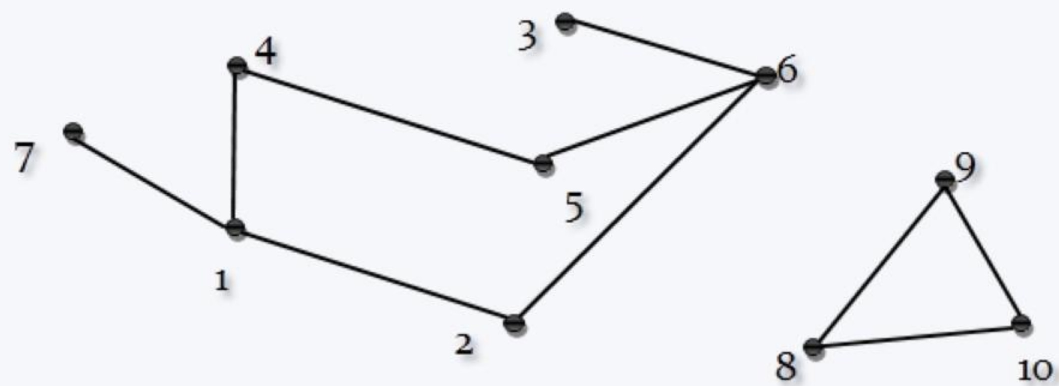
Обозначение: $G(V,E) = G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2)$.



G_1



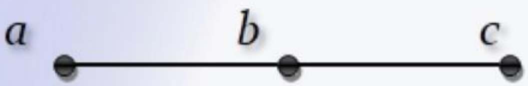
G_2



$G = G_1 + G_2$

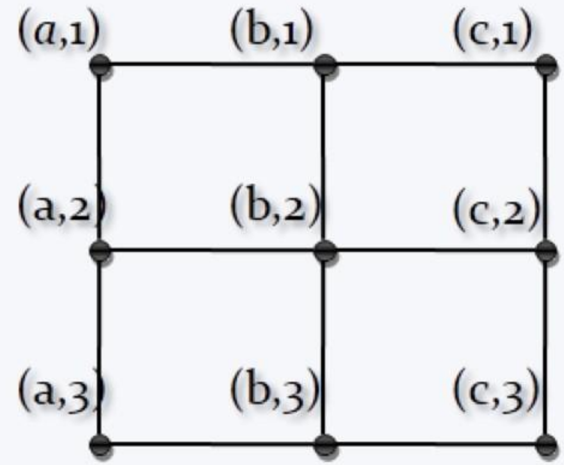
Декартово произведение

Определение: *декартовым произведением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V,E) = G_1 \square G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1,v_1), (u_2,v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 = v_1$, а $u_2 \sim v_2$ или $u_2 = v_2$, а $u_1 \sim v_1$.



G_1

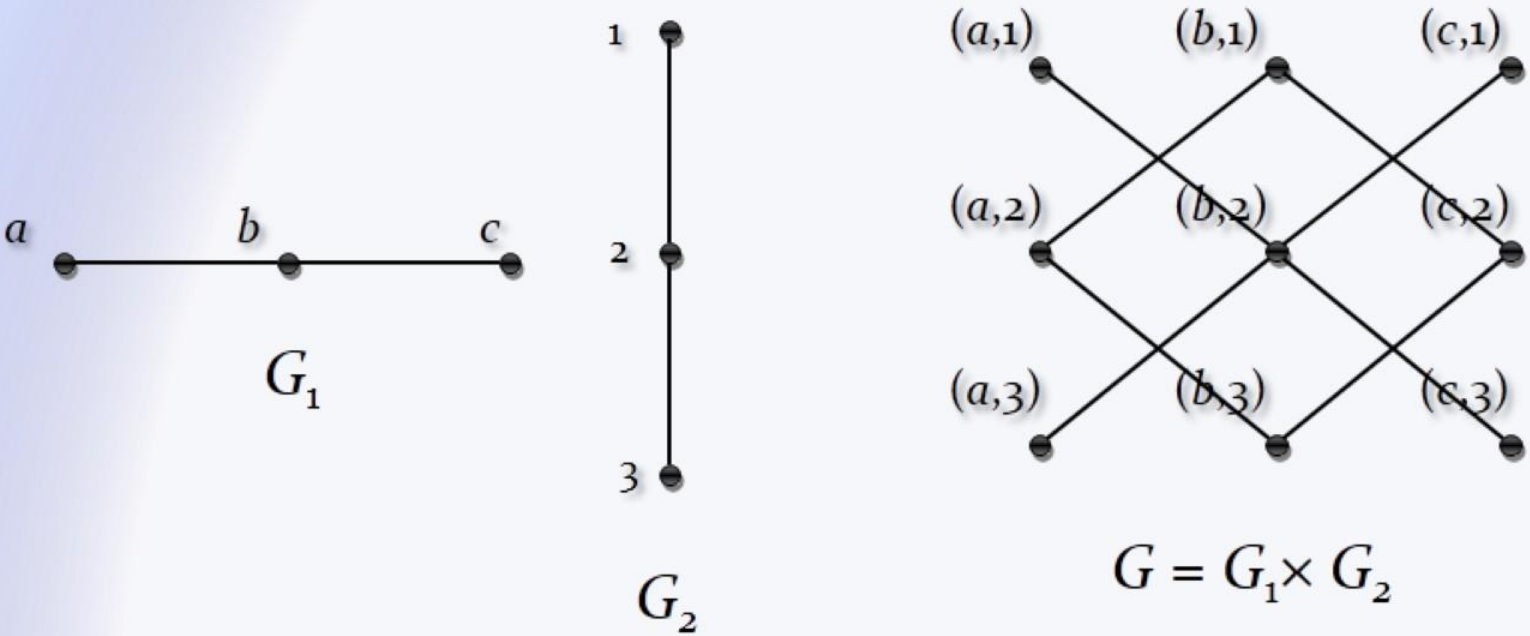
G_2



$G = G_1 \square G_2$

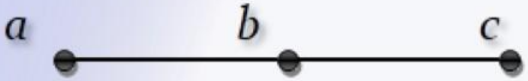
Тензорное произведение

Определение: *тензорным произведением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V,E) = G_1 \times G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1,v_1), (u_2,v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ и $u_2 \sim v_2$.



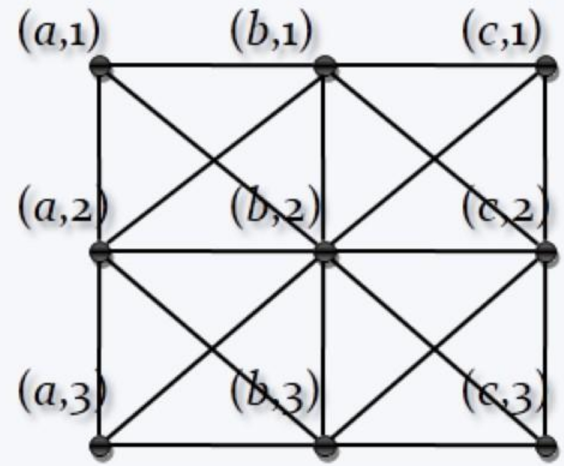
Сильное произведение

Определение: *сильным произведением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V,E) = G_1 \boxtimes G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1,v_1), (u_2,v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ и $u_2 \sim v_2$ или $u_1 = v_1$, а $u_2 \sim v_2$, или $u_2 = v_2$, а $u_1 \sim v_1$.



G_1

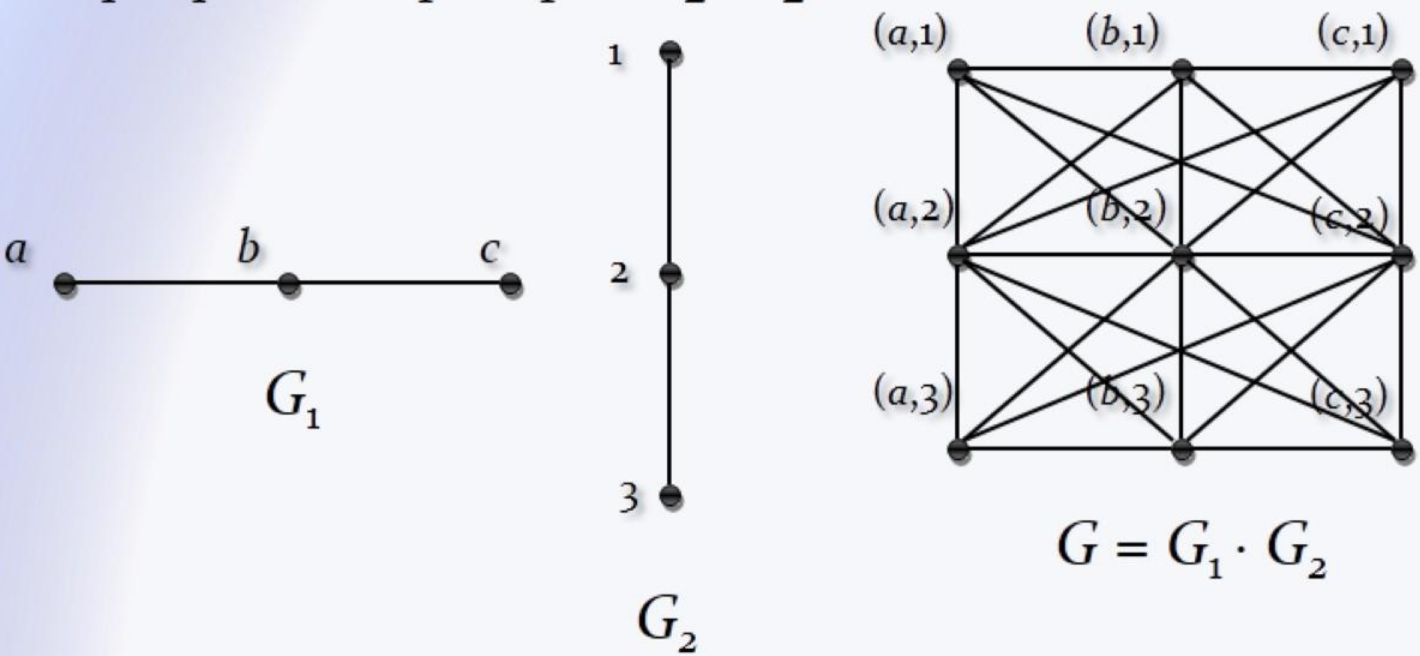
G_2



$G = G_1 \boxtimes G_2$

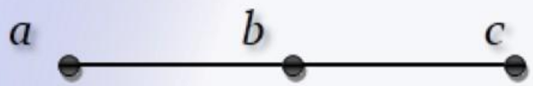
Лексикографическое произведение

Определение: *декартовым произведением* двух графов $G_1(V_1,\ E_1)$ и $G_2(V_2,\ E_2)$ называется граф $G(V,E) = G_1 \cdot G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1,v_1),\ (u_2,v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ или $u_1 = v_1$, а $u_2 \sim v_2$.



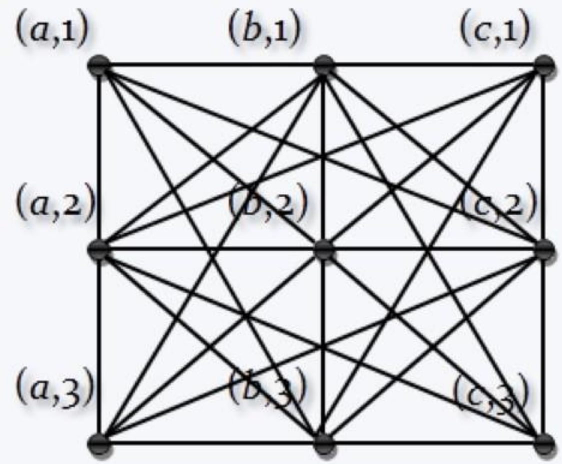
Дизъюнктное произведение

Определение: *дизъюнктным произведением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V,E) = G_1 * G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а $((u_1,v_1), (u_2,v_2)) \in E$ тогда и только тогда, когда $u_1 \sim v_1$ или $u_2 \sim v_2$.



G_1

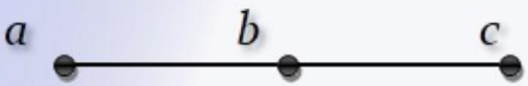
G_2



$G = G_1 * G_2$

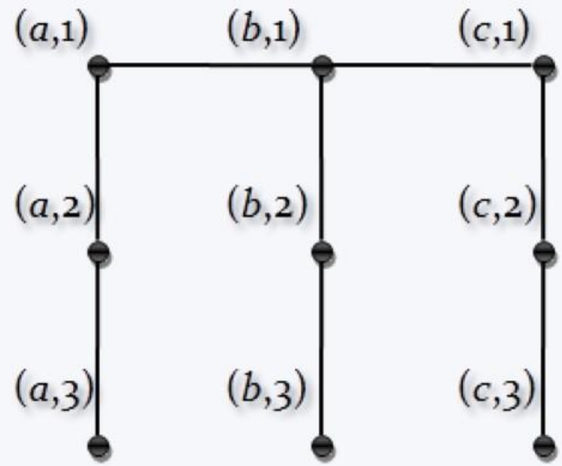
Корневое произведение

Определение: *корневым произведением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V,E) = G_1 G_2$, такой что $V = V_1 \times V_2$, а ребра в E образуются по принципу $E_1 + E_2 V_1$.



G_1

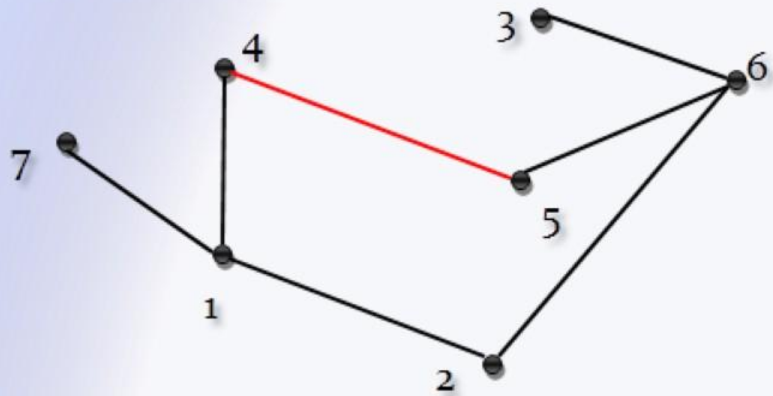
G_2



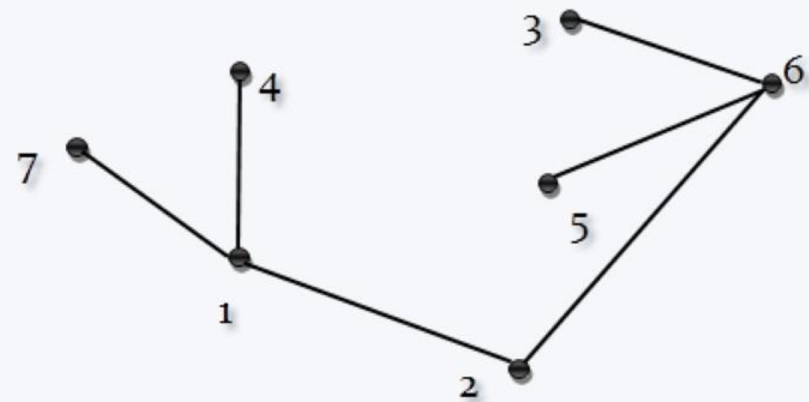
$G = G_1 G_2$

Операция удаления ребра

Определение: граф $G_{(u,v)}(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ в результате *удаления ребра* (u,v), если $V_1 = V$, *а* $E_1 = E \setminus \{(u,v)\}$.



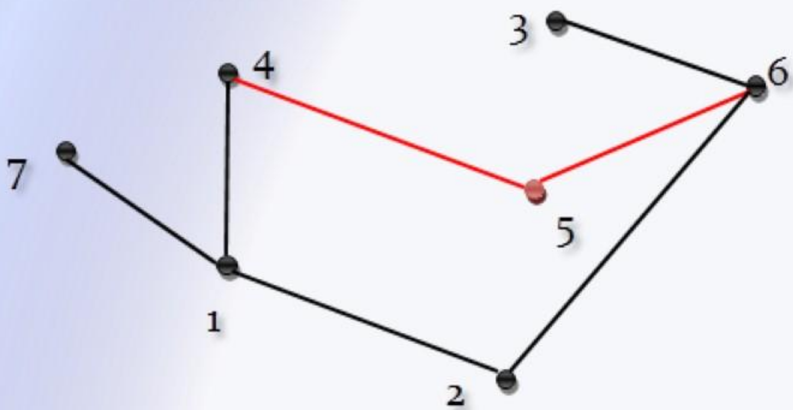
G



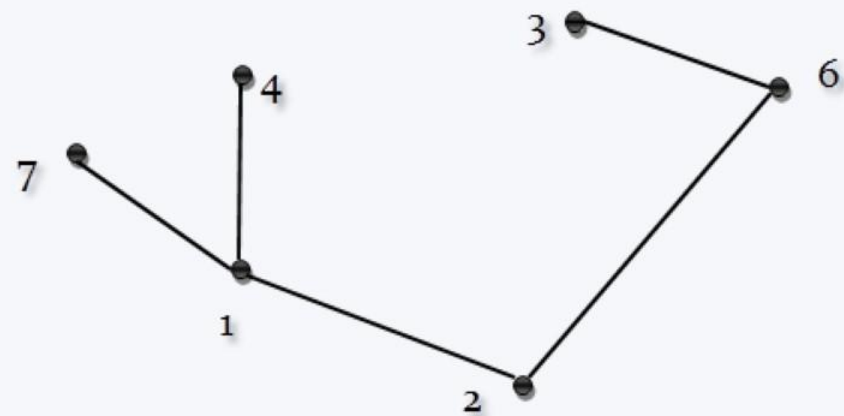
$G_{(4, 5)}$

Операция удаления вершины

Определение: граф $G_{(v)}(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ в результате *удаления вершины v*, если $V_1 = V \setminus \{v\}$, а $E_1 = E \setminus \{(v, u) \mid u \in V\}$.



G

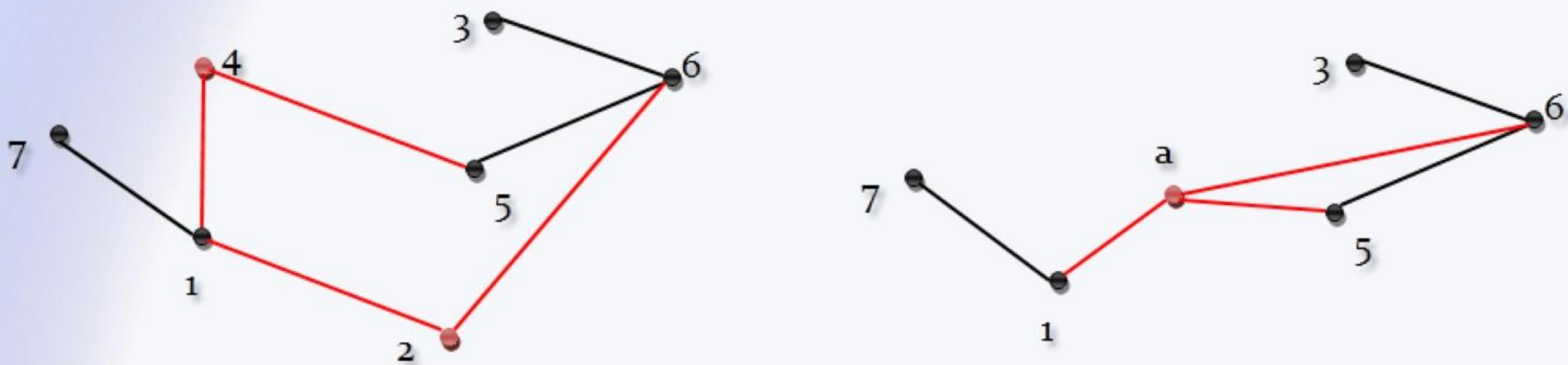


$G_{(5)}$

Операция отождествления вершин

Определение: граф $G_1(V_1,\ E_1)$ получается из графа $G(V,\ E)$ в результате *отождествления вершин* u и v, если $V_1 = V\cup\{a\}\setminus\{u,v\}$, а

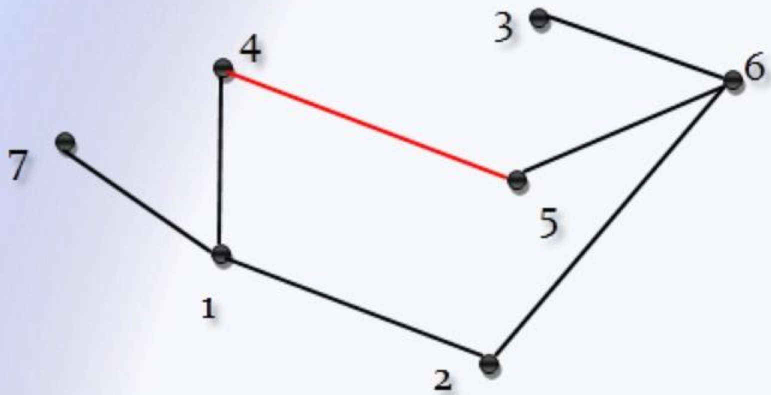
$$E_1 = E\cup\{(a,\ y)\mid\ y \in N(u)\cup N(v)\}\setminus\{(v,\ u)\}.$$



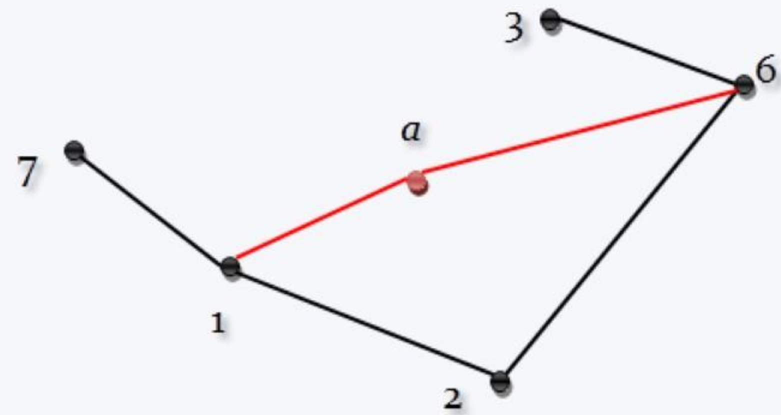
G $\qquad\qquad$ G_1

Операция стягивания ребра

Определение: отождествление вершин u и v называется *стягиванием ребра* (u, v), если $(u, v) \in E(G)$.



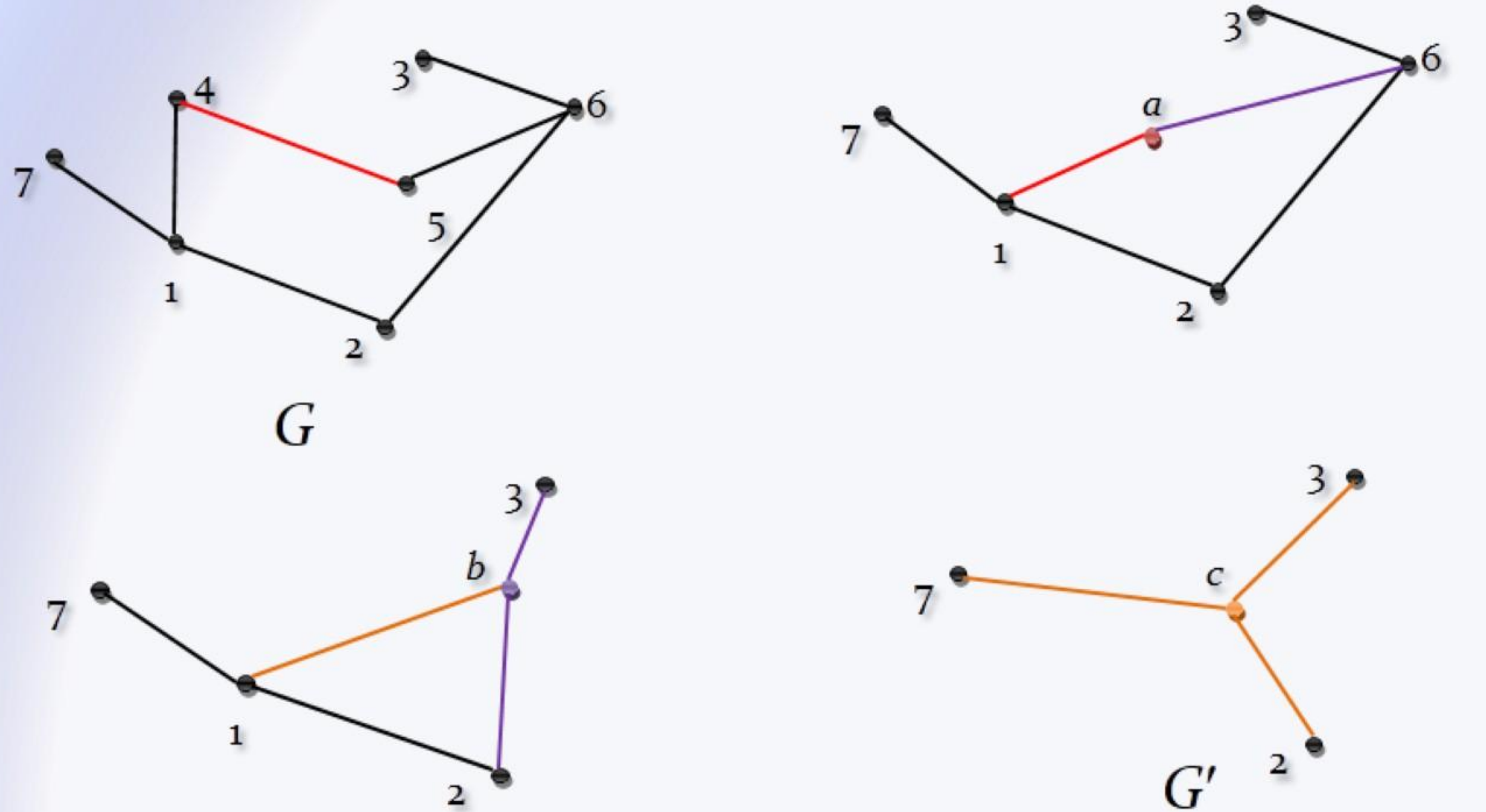
G



G_1

Стягиваемый граф

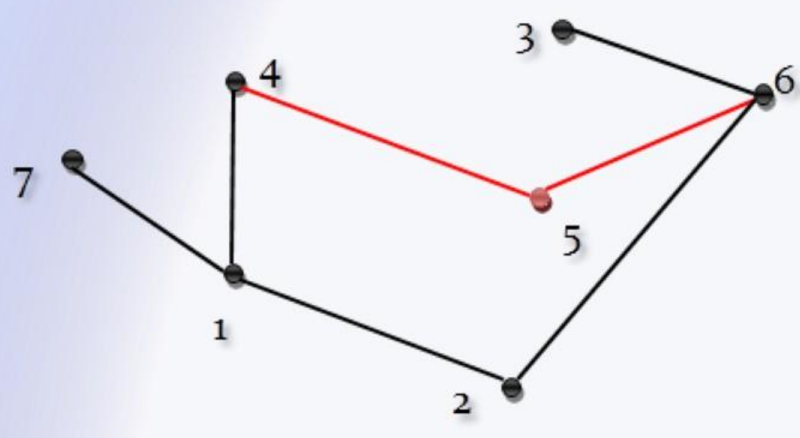
Определение: граф G называется *стягиваемым* к графу G', если G' получается из G в результате некоторой последовательности стягивания его ребер.



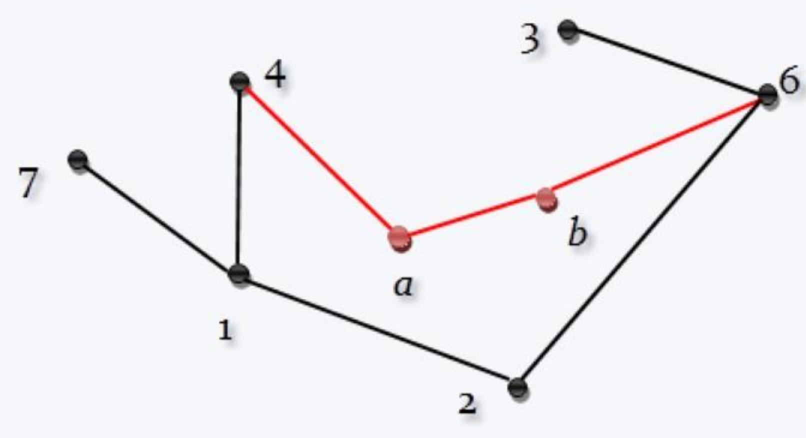
Операция расщепления вершины

Определение: граф $G_1(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ *расщеплением вершины* v, если $V_1 = V \cup \{v_1, v_2\} \setminus \{v\}$, а $E_1 = E \cup X \cup Y \setminus \{(v_1, v_2)\}$, где $X = \{(v_1, x) \mid x \in N_1(v), N_1(v) \subseteq N(v)\}$, а

$Y = \{(v_2, y) \mid y \in N_2(v), N_2(v) \subseteq N(v)\}$.



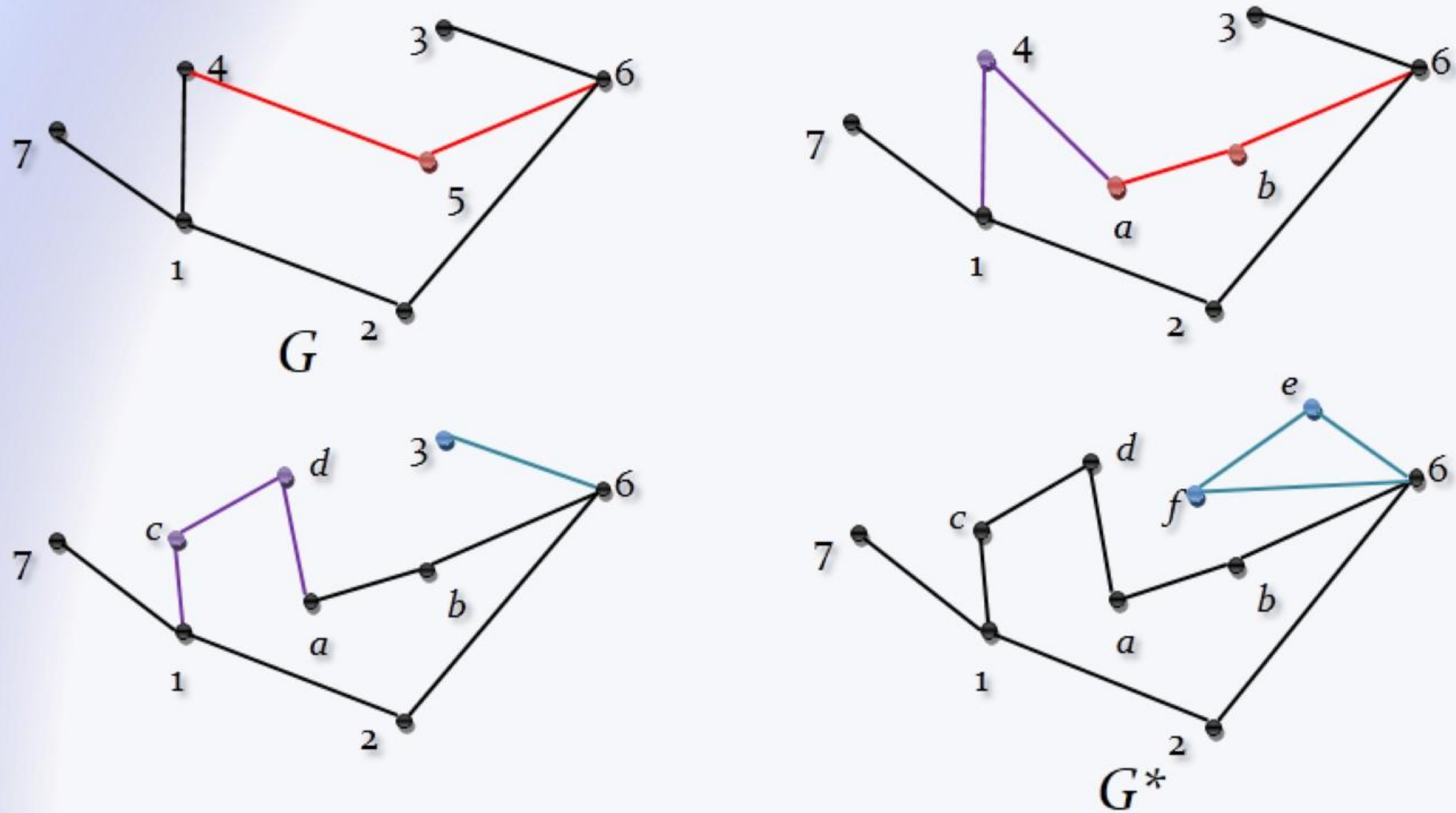
G



G_1

Расщепление графа

Определение: граф G^* называется *расщеплением* графа G, если G^* получается из G в результате некоторой последовательности расщепления его вершин.



Операция подразбиения ребра

Определение: граф $G_1(V_1, E_1)$ получается из графа $G(V, E)$ в *подразбиением ребра* (u, v), если $V_1 = V \cup \{a\}$, а $E_1 = E \cup \{(a, u), (a, v)\} \setminus \{(v, u)\}$.