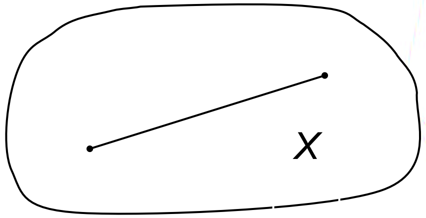
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Определение 1.2. Множество X называется выпуклым, если вместе с любыми двумя
точками, принадлежащими этому множеству, содержит и отрезок, соединяющий эти точки



Примеры выпуклых множеств:

1. гиперплоскость – это множество точек, удовлетворяющих Уравнению:
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \quad (1.15)$$

2. полуплоскость – это множество точек, удовлетворяющих неравенству:
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b. \quad (1.16)$$

Теорема 1.1. Пересечение любого числа выпуклых множеств – выпуклое множество.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Определение 1.3. Точка множества называется внутренней, если существует окрестность этой точки, состоящая только из точек данного множества.

Определение 1.4. Точка множества называется граничной, если любая окрестность этой точки содержит, как точки принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему.

Определение 1.5. Множество точек называется замкнутым, если оно включает в себя все свои граничные точки.

Примеры замкнутых множеств:

1) любой отрезок на числовой прямой;

2) числовая прямая, так как она включает в себя пустое множество своих граничных точек.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Определение 1.6. Точка множества называется **угловой** или крайней, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.

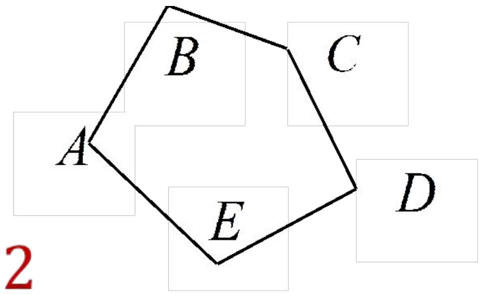


Рис. 1.2

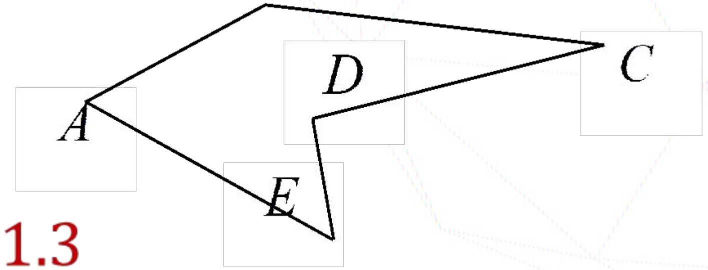


Рис. 1.3

Определение 1.7. Множество точек называется **ограниченным**, если **существует** шар (круг) радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество. В противном случае множество называется неограниченным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА

Определение 1.8. Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклым многогранником (многоугольником), если оно ограниченно и выпуклой многогранной (многоугольной) областью, если оно неограниченно.

Теорема 1.2. Множество решений совместной системы 1.17 является выпуклым многогранником или выпуклой многогранной областью в n− мерном пространстве.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\dots,m) \qquad (1.17)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БАЗИСНОГО РЕШЕНИЯ

Определение 1.9. Любые m переменных системы n линейных уравнений 1.18 называются базисными, если определитель матрицы коэффициентов при этих m переменных отличен от нуля. Остальные переменные системы называются свободными.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j = b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m), \qquad (1.18)$$

$$m \le n \quad .$$

Определение 1.10. Базисным решением системы 1.18 называется решение, в котором все свободные переменные равны нулю.

Определение 1.11. Решение системы 1.18 называется допустимым, если оно содержит только неотрицательные компоненты.

Теорема 1.3. Множество всех допустимых решений системы 1.18 является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n- мерном пространстве.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Рассмотрим графическое решение системы m линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \qquad (1.19)$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \qquad (1.20)$$

$$l_i: \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i. \qquad (1.21)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \qquad (i = 1,\dots,m) \qquad (1.22)$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Задача 1.4. Изобразить графически множество неотрицательных решений системы неравенств и определить координаты угловых точек области допустимых решений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 24, & (1.23) \\ x_1 - x_2 \geq -5, & (1.24) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 69, & (1.25) \\ 2x_1 + x_2 \geq 11, & (1.26) \\ x_2 \geq 3. & (1.27) \end{cases}$$

l_1: $3x_1 - x_2 = 24$; l_2: $x_1 - x_2 = -5$; l_3: $3x_1 + 4x_2 = 69$;

l_4: $2x_1 + x_2 = 11$; l_5: $x_2 = 3$.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Решение задач

$A = l_4 \cap l_5 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 11, \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow A(4;3)$ (1.28)

$D = l_1 \cap l_3 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 24, \\ 3x_1 + 4x_2 = 69 \end{cases} \Rightarrow D(11;9)$ (1.29)

$B(2;7)$

$C(7;12)$

$E(3;9)$

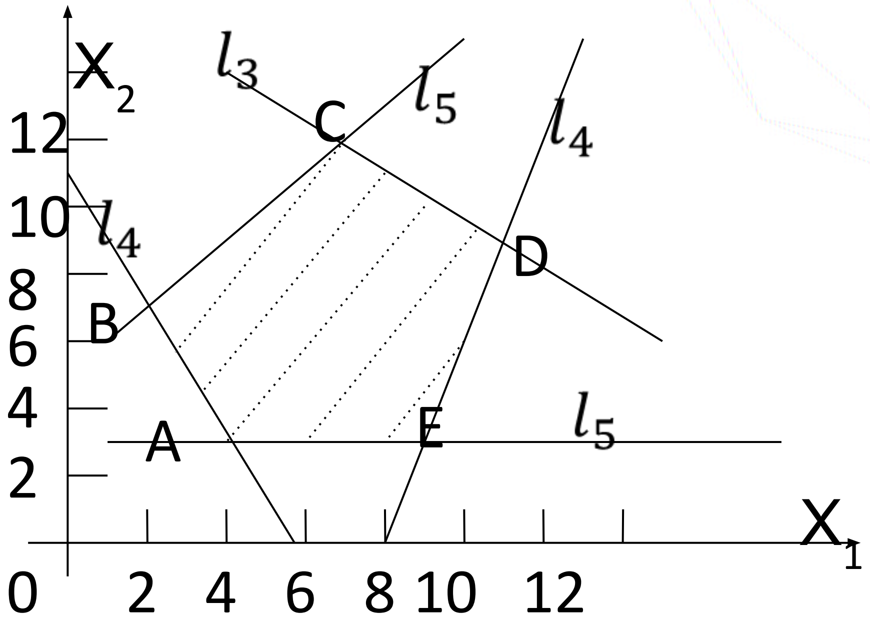


Рис. 1.4

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Задача 1.5. Найти область неотрицательных решений

системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq 12, \\ \qquad\quad x_2 \geq 6, \\ x_1 \qquad\quad \leq 4. \end{cases} \quad (1.30)$$

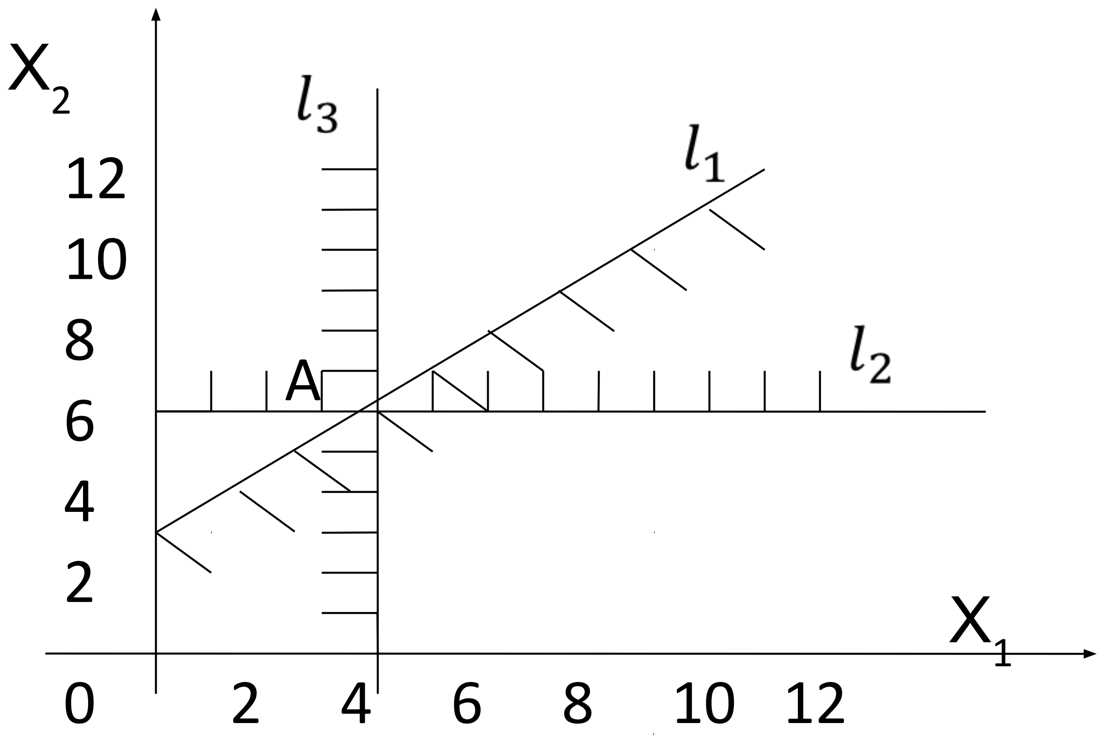


Рис. 1.5

Решением системы неравенств (1.30) является точка A(4;6), рисунок 1.5.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Задача 1.6. Найти область неотрицательных решений системы неравенств:

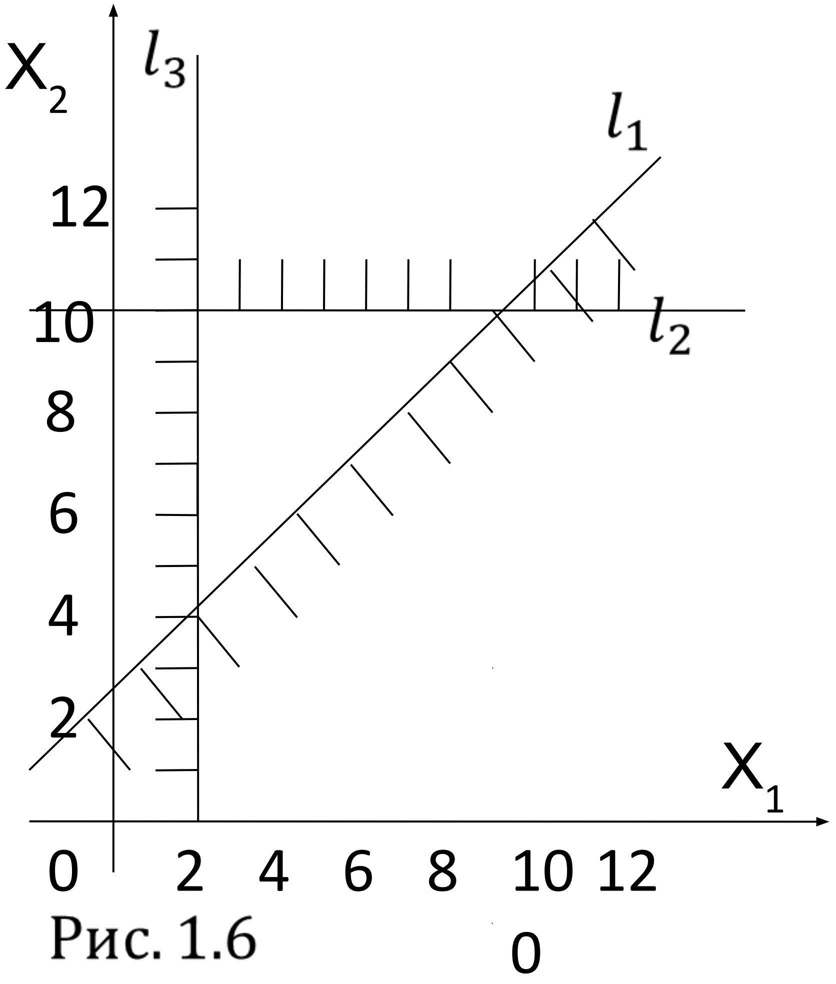


Рис. 1.6

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq -12, \\ \quad\quad\quad\; x_2 \geq 10, \\ x_1 \quad\quad\;\; \leq 2. \end{cases} \quad (1.31)$$

Система неравенств (1.31) не имеет решения рисунок 1.6.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \leq b_i \quad (i = 1,2,\dots,m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (2.1)$$

Определение 2.1. Решение задачи ЛП называется допустимым, если оно содержится в области допустимых решений системы ограничений задачи.

Определение 2.2. Допустимое базисное решение задачи ЛП называется опорным планом.

Определение 2.3. Целевая функция в задаче ЛП называется ограниченной, если в задаче на максимум целевая функция ограничена на допустимом множестве сверху, а в задаче на минимум – снизу.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛП

Теорема 2.1. Если в задаче ЛП допустимое множество не пусто и целевая функция ограничена, то существует хотя бы одно оптимальное решение.

Теорема 2.2. Между множествами опорных решений задачи ЛП и угловых точек области допустимых решений существует взаимно однозначное соответствие.

Теорема 2.3. Если в задаче ЛП все переменные имеют условие не отрицательности и целевая функция ограничена сверху (снизу) на допустимом множестве, то угловая точка, в которой целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение среди всех угловых точек множества допустимых решений, является оптимальным решением.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \ \rightarrow \ \max$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{aligned} \qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (2.2)$$

Уравнение нулевой линии уровня q_0:

$$c_1x_1 + c_2x_2 \ = 0 \quad (F(x) = 0). \qquad (2.3)$$

Вектор нормали: $\overline{n}(c_1; c_2) \perp q_0$

$$q_s: \quad c_1x_1 + c_2x_2 \ = s, \rightleftarrows \quad (s \in R, \quad q_s \| q_0). \qquad (2.4)$$

$$F(x) = \ c_1x_1 + c_2x_2 \ = s. \qquad (2.5)$$

ВЕКТОР ГРАДИЕНТ. СЛУЧАЙ АЛЬТЕРНАТИВНОГО РЕШЕНИЯ

Определение 2.4. Вектор, координаты которого являются частными производными функции $F(x)$ по соответствующим переменным, называется **вектором градиентом** и обозначается

$$\overline{gradF} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j}. \qquad (2.6)$$

Оптимальное решение x^*.

Случай альтернативного решения:

$$AB: \quad \frac{x_1 - x_{1A}}{x_{1B} - x_{1A}} = \frac{x_2 - x_{2A}}{x_{2B} - x_{2A}} = \lambda, \qquad A(x_{1A}; x_{2A}), \quad B(x_{1B}; x_{2B}) \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} x_1^* = \lambda(x_{1B} - x_{1A}) + x_{1A}; \\ x_2^* = \lambda(x_{2B} - x_{2A}) + x_{2A}, \end{cases} \qquad (0 \le \lambda \le 1). \qquad (2.8)$$

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Задача 2.3

Решить задачу 1.1 графически.

Экономико – математическая модель задачи 1.1:

$$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ 2x_1 + x_2 \leq 26, \\ \qquad 2x_2 \leq 16, \\ x_1 \qquad\quad \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

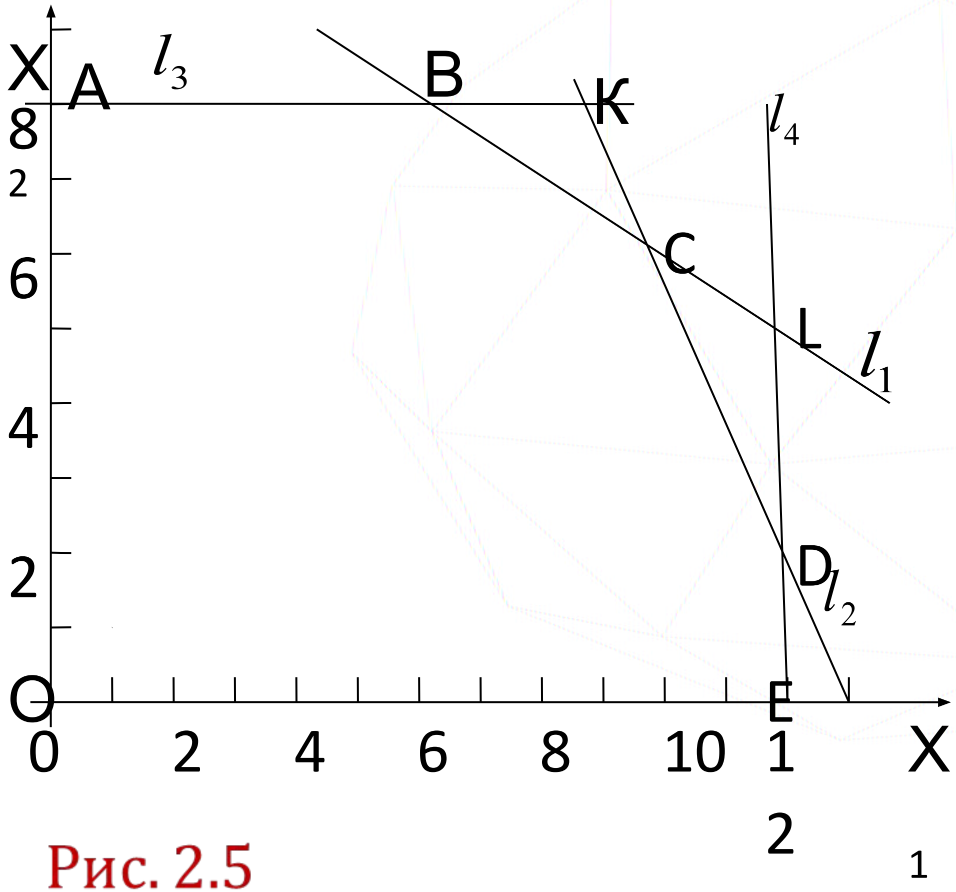


Рис. 2.5

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

$$\overline{gradF} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = \quad (2.15)$$

$$= 4\bar{i} + 3\bar{j};$$

q_0: $4x_1 + 3x_2 = 0$
$(F(x) = 0)$.

$$C = l_1 \cap l_3:$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 22, \\ 2x_1 + x_2 = 26. \end{cases}$$

$C(10; 6) \Rightarrow x*(10;6)$ q_0

$$F_{\max} = F(x^*) = 4\cdot 10 + 3\cdot 6 = 58$$

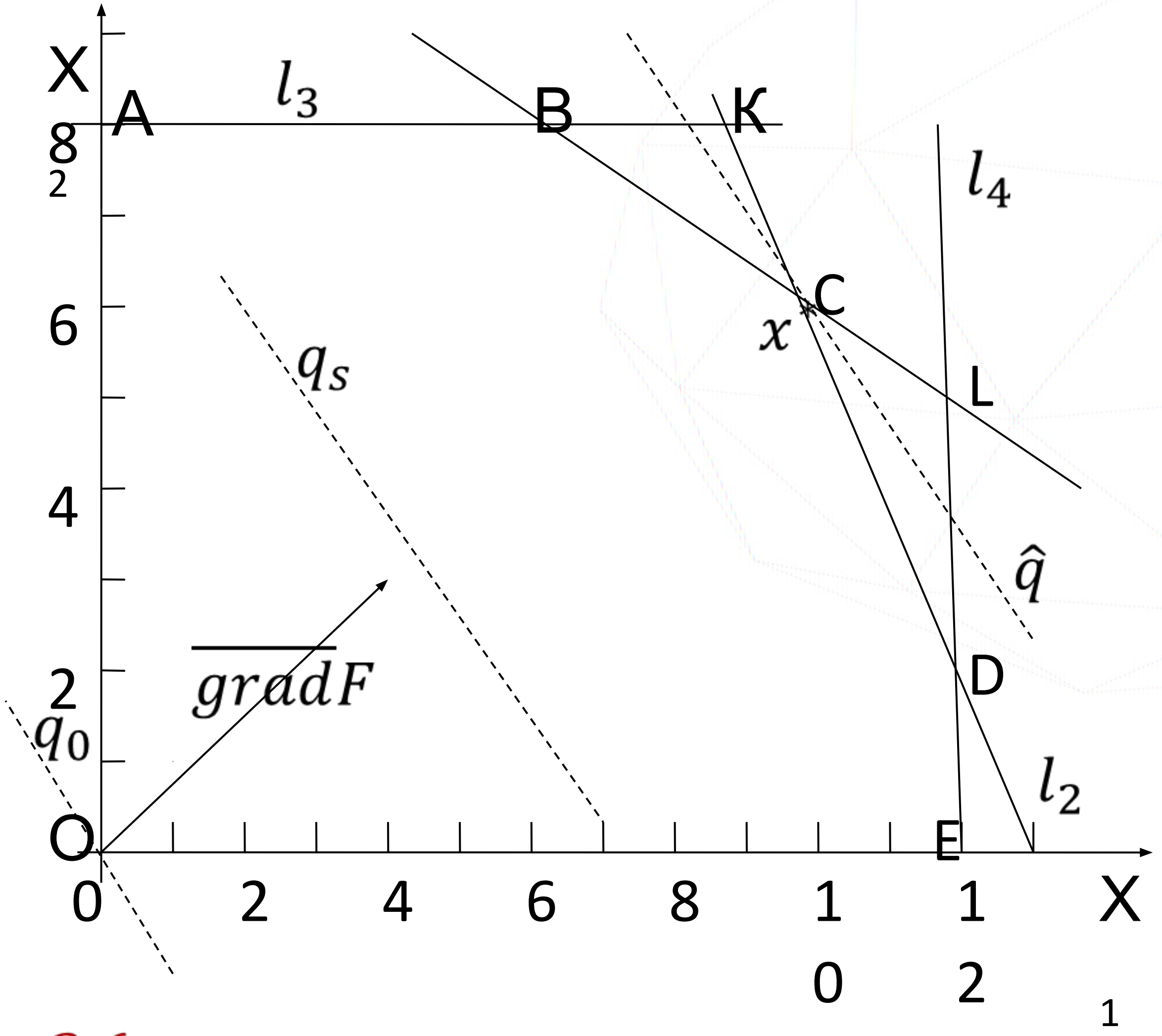


Рис. 2.6

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \le 26, \\ \quad\quad 2x_2 \le 16, \\ x_1 \quad\quad\quad \le 12, \end{cases}$$

$$x * (10; 6) = C$$

$$K = l_2 \cap l_3:$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 26, \\ \quad 2x_2 = 16. \end{cases} \quad К(9; 8).$$

$$F(9; 8) = 4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 60$$

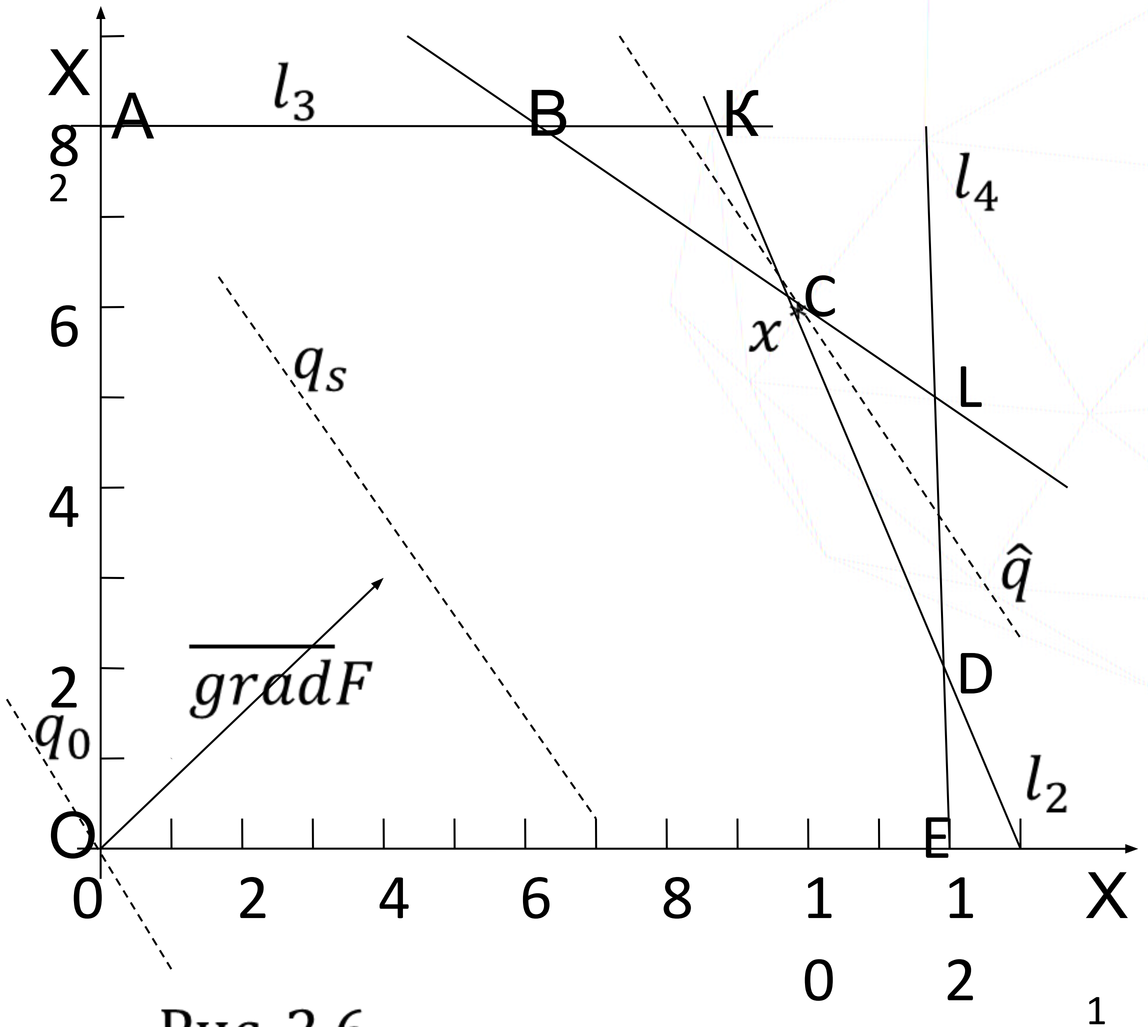


Рис. 2.6

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ.

В рамках анализа модели на чувствительность выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели.

Если прямая проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то соответствующее ограничение будем считать активным, соответствующий ресурс - дефицитным.

Если ограничение пассивное, то соответствующий ресурс является недефицитным и имеется в избытке.

При анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений, определяются:

а)предельно допустимые увеличения запаса дефицитного ресурса, позволяющие улучшить найденное оптимальное решение ;

б)предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса , не изменяющее найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ НА ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Вариация коэффициентов целевой функции может изменить статус того или иного ресурса: дефицитный ресурс сделать недефицитным и наоборот.

Изменения коэффициентов целевой функции оказывают влияние на наклон прямой, изображающей эту функцию.

При анализе модели на чувствительность к изменениям коэффициента целевой функции исследуется следующие вопросы:

а) каков диапазон изменения каждого из коэффициентов функции при котором не происходит изменения оптимального решения;

б) на сколько следует изменить тот или иной коэффициент, что бы недефицитный ресурс сделать дефицитным и наоборот