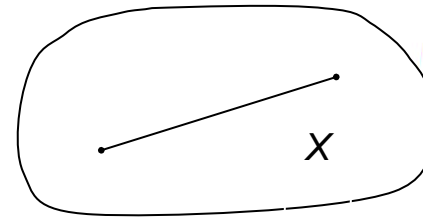


ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Определение 1.2. Множество X называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками, принадлежащими этому множеству, содержит и отрезок, соединяющий эти точки



Примеры выпуклых множеств:

1. гиперплоскость — это множество точек, удовлетворяющих
Уравнению: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$ (1.15)

2. полуплоскость — это множество точек, удовлетворяющих
неравенству: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b.$ (1.16)

Теорема 1.1. Пересечение любого числа выпуклых множеств —
выпуклое множество.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Определение 1.3. Точка множества называется **внутренней**, если существует **окрестность** этой точки, состоящая только из точек данного множества.

Определение 1.4. Точка множества называется **граничной**, если **любая окрестность** этой точки содержит, как точки принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему.

Определение 1.5. Множество точек называется **замкнутым**, если оно включает в себя все свои граничные точки.

Примеры замкнутых множеств:

- 1) любой отрезок на числовой прямой;
- 2) числовая прямая, так как она включает в себя пустое множество своих граничных точек.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Определение 1.6. Точка множества называется **угловой** или **крайней**, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.

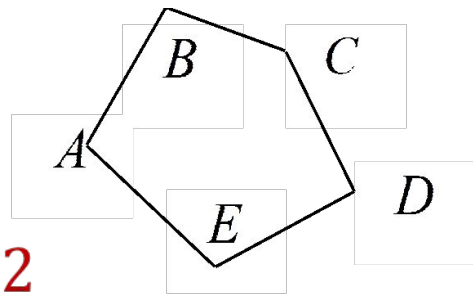


Рис. 1.2

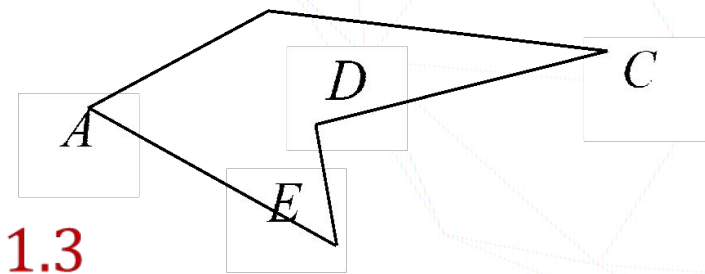


Рис. 1.3

Определение 1.7. Множество точек называется **ограниченным**, если **существует** шар (круг) радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество. В противном случае множество называется **неограниченным**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА

Определение 1.8. Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется **выпуклым многогранником** (многоугольником), если оно ограничено и выпуклой многогранной (многоугольной) областью, если оно неограниченно.

Теорема 1.2. Множество решений совместной системы 1.17 является выпуклым многогранником или выпуклой многогранной областью в n -мерном пространстве.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.17)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БАЗИСНОГО РЕШЕНИЯ

Определение 1.9. Любые m переменных системы n линейных уравнений 1.18 называются **базисными**, если определитель матрицы коэффициентов при этих m переменных отличен от нуля. Остальные переменные системы называются **свободными**.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1.18)$$
$$m \leq n \quad .$$

Определение 1.10. **Базисным решением** системы 1.18 называется решение, в котором все свободные переменные равны нулю.

Определение 1.11. **Решение** системы 1.18 называется **допустимым**, если оно содержит только неотрицательные компоненты.

Теорема 1.3. Множество всех допустимых решений системы 1.18 является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n - мерном пространстве.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Задача 1.4. Изобразить графически множество неотрицательных решений системы неравенств и определить координаты угловых точек области допустимых решений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 24, & (1.23) \\ x_1 - x_2 \geq -5, & (1.24) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 69, & (1.25) \\ 2x_1 + x_2 \geq 11, & (1.26) \\ x_2 \geq 3. & (1.27) \end{cases}$$

$$l_1: 3x_1 - x_2 = 24; \quad l_2: x_1 - x_2 = -5; \quad l_3: 3x_1 + 4x_2 = 69;$$

$$l_4: 2x_1 + x_2 = 11; \quad l_5: x_2 = 3.$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Решение задач

$$A = l_4 \cap l_5 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 11, \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow A(4; 3) \quad (1.28)$$

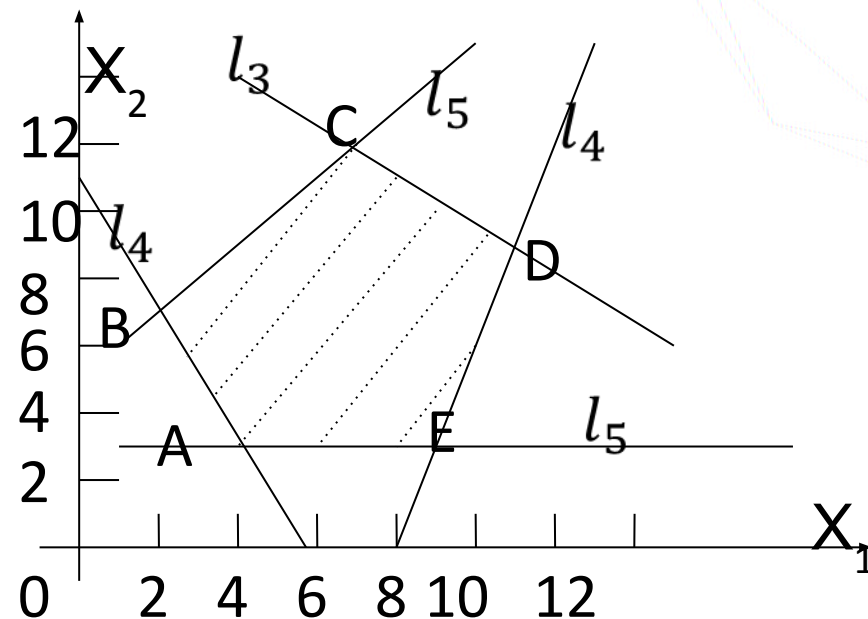
$$D = l_1 \cap l_3 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 24, \\ 3x_1 + 4x_2 = 69 \end{cases} \Rightarrow D(11; 9) \quad (1.29)$$

$B(2; 7)$

$C(7; 12)$

$E(3; 9)$

Рис. 1.4



РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Задача 1.5. Найти область неотрицательных решений системы неравенств:

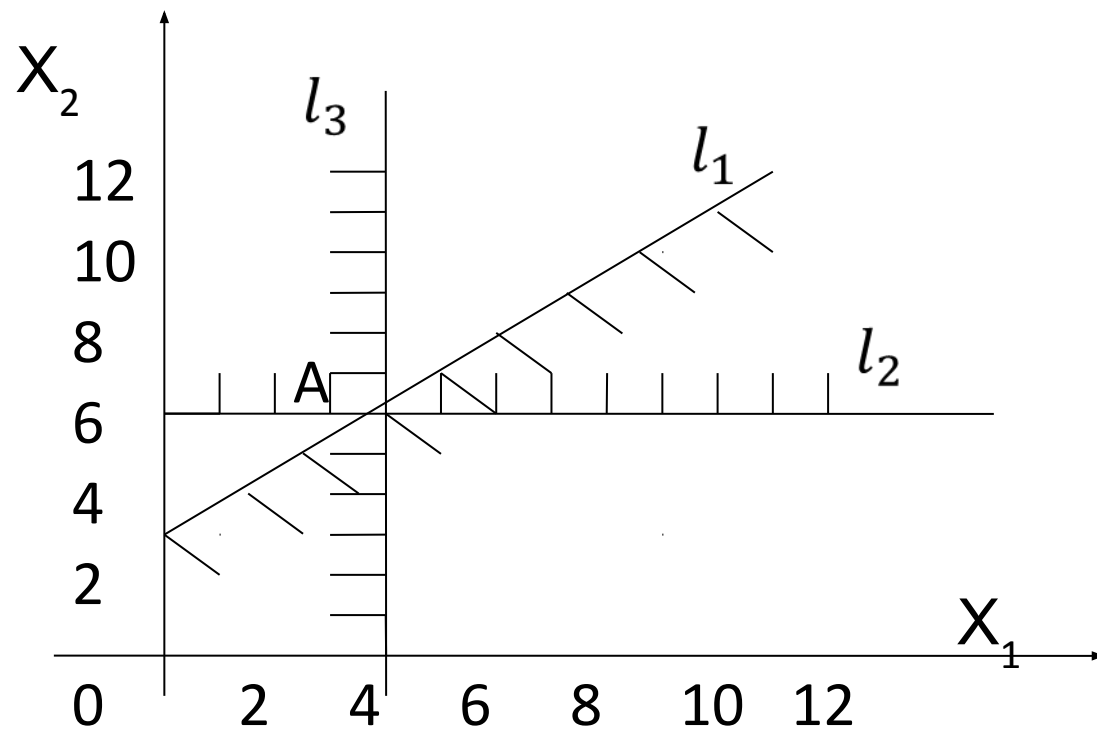


Рис. 1.5

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq 12, \\ x_2 \geq 6, \\ x_1 \leq 4. \end{cases} \quad (1.30)$$

Решением системы неравенств (1.30) является **точка A(4;6)**, рисунок 1.5.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ГРАФИЧЕСКИ

Задача 1.6. Найти область неотрицательных решений системы неравенств:

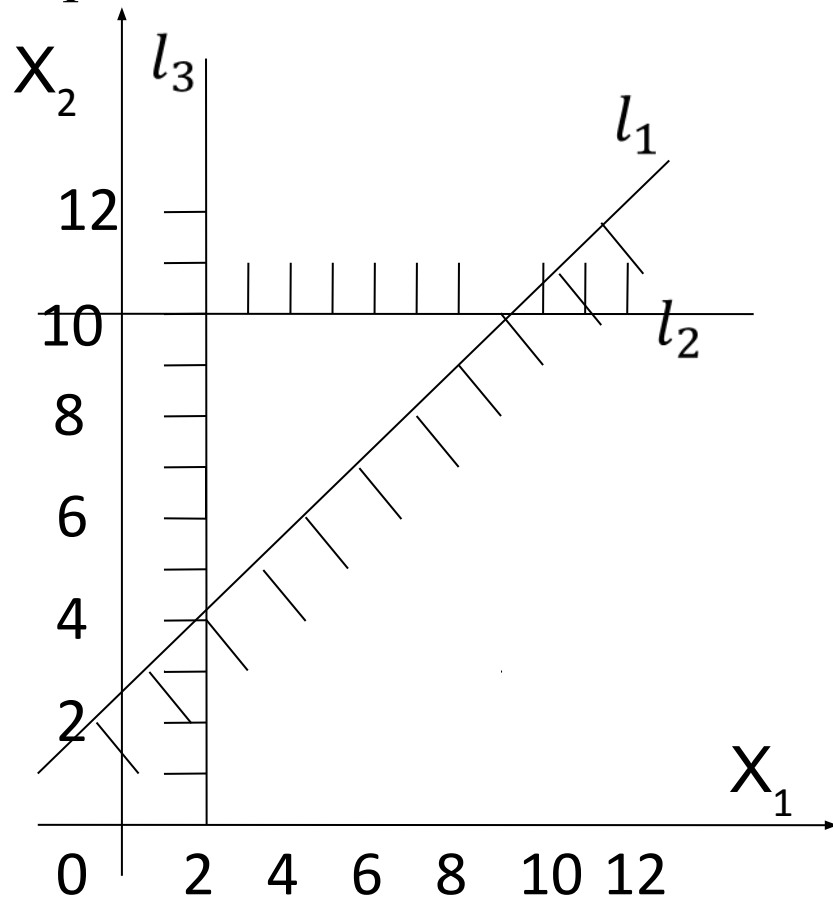


Рис. 1.6

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq -12, \\ x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 2. \end{cases} \quad (1.31)$$

Система
неравенств (1.31)
не имеет решения
рисунок 1.6.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(2.1)

Определение 2.1. Решение задачи ЛП называется **допустимым**, если оно содержится в области допустимых решений системы ограничений задачи.

Определение 2.2. Допустимое **базисное решение** задачи ЛП называется **опорным планом**.

Определение 2.3. Целевая **функция** в задаче ЛП называется **ограниченной**, если в задаче на максимум целевая функция ограничена на допустимом множестве сверху, а в задаче на минимум – снизу.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛП

Теорема 2.1. Если в задаче ЛП допустимое множество не пусто и целевая функция ограничена, то существует хотя бы одно оптимальное решение.

Теорема 2.2. Между множествами опорных решений задачи ЛП и угловых точек области допустимых решений существует взаимно однозначное соответствие.

Теорема 2.3. Если в задаче ЛП все переменные имеют условие не отрицательности и целевая функция ограничена сверху (снизу) на допустимом множестве, то угловая точка, в которой целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение среди всех угловых точек множества допустимых решений, является оптимальным решением.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

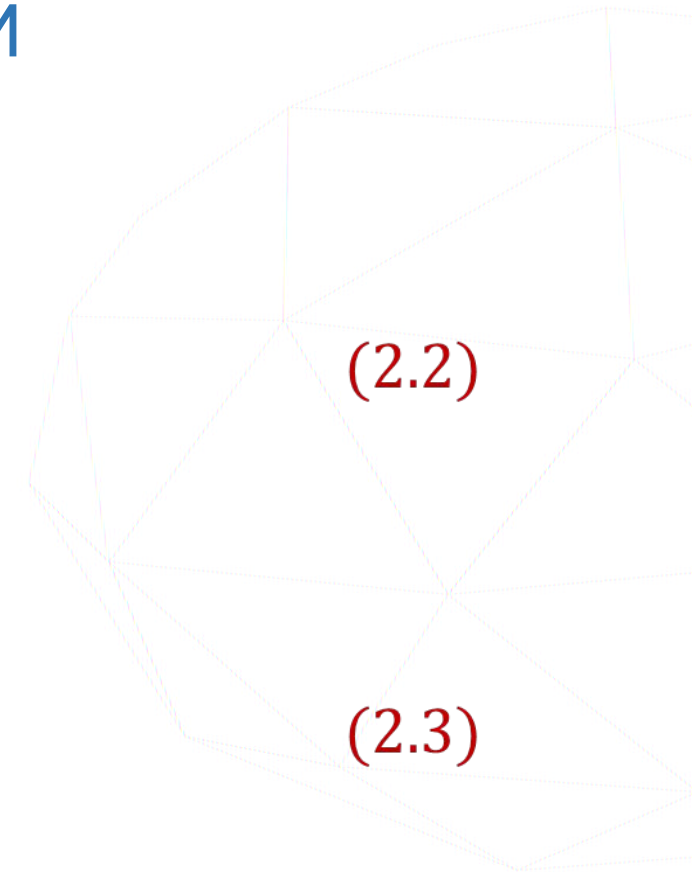
Уравнение нулевой линии уровня q_0 :

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \quad (F(x) = 0).$$

Вектор нормали: $\bar{n}(c_1; c_2) \perp q_0$

$$q_s: \quad c_1x_1 + c_2x_2 = s, \leftrightarrow \quad (s \in R, \quad q_s \mid |q_0).$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = s.$$



(2.4)

(2.5)

ВЕКТОР ГРАДИЕНТ. СЛУЧАЙ АЛЬТЕРНАТИВНОГО РЕШЕНИЯ

Определение 2.4. Вектор, координаты которого являются частными производными функции $F(x)$ по соответствующим переменным, называется **вектором градиента** и обозначается

$$\overline{\text{grad}F} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \bar{j} = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j}. \quad (2.6)$$

Оптимальное решение x^* .

Случай альтернативного решения:

$$\text{AB: } \frac{x_1 - x_{1A}}{x_{1B} - x_{1A}} = \frac{x_2 - x_{2A}}{x_{2B} - x_{2A}} = \lambda, \quad A(x_{1A}; x_{2A}), \quad B(x_{1B}; x_{2B}) \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} x_1^* = \lambda(x_{1B} - x_{1A}) + x_{1A}; \\ x_2^* = \lambda(x_{2B} - x_{2A}) + x_{2A}, \end{cases} \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \quad (2.8)$$

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Задача 2.3

Решить задачу 1.1 графически.

Экономико – математическая модель задачи 1.1:

$$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ 2x_1 + x_2 \leq 26, \\ 2x_2 \leq 16, \\ x_1 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

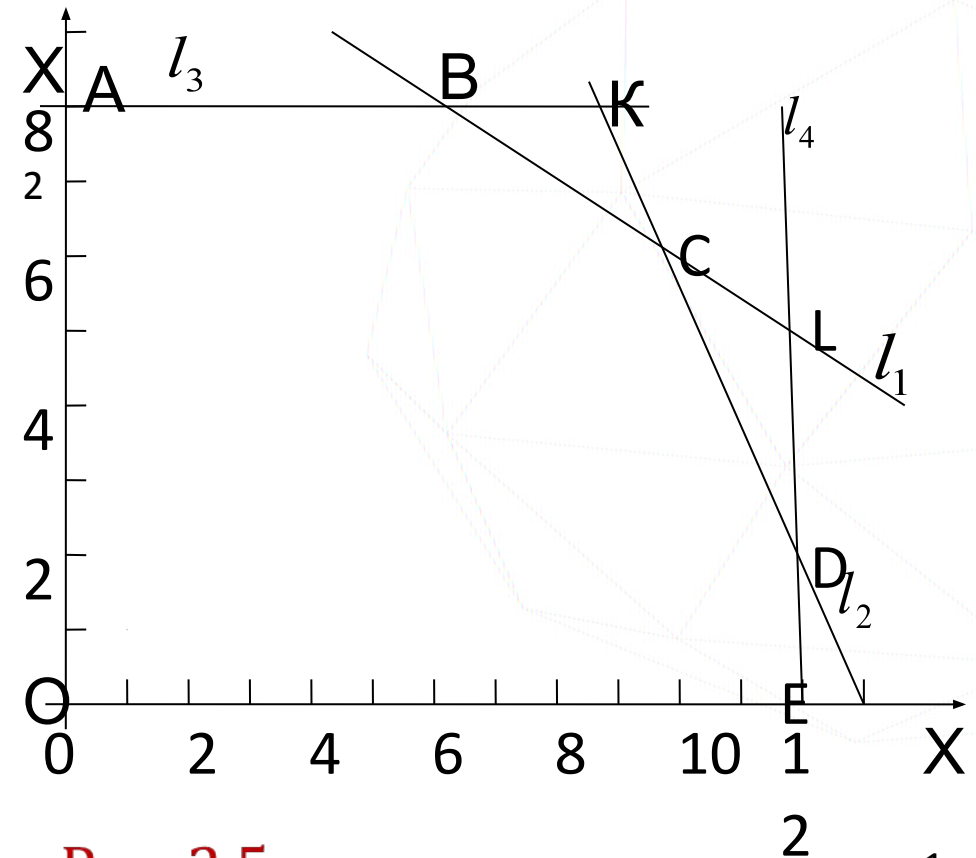


Рис. 2.5

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}F} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \bar{j} = \\ &= 4\bar{i} + 3\bar{j}; \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} q_0: \quad &4x_1 + 3x_2 = 0 \\ &(F(x) = 0). \end{aligned}$$

$$C = l_1 \cap l_3:$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 22, \\ 2x_1 + x_2 = 26. \end{cases}$$

$$C(10; 6) \Rightarrow x^* (10; 6) \quad q_0$$

$$F_{\max} = F(x^*) = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 6 = 58$$

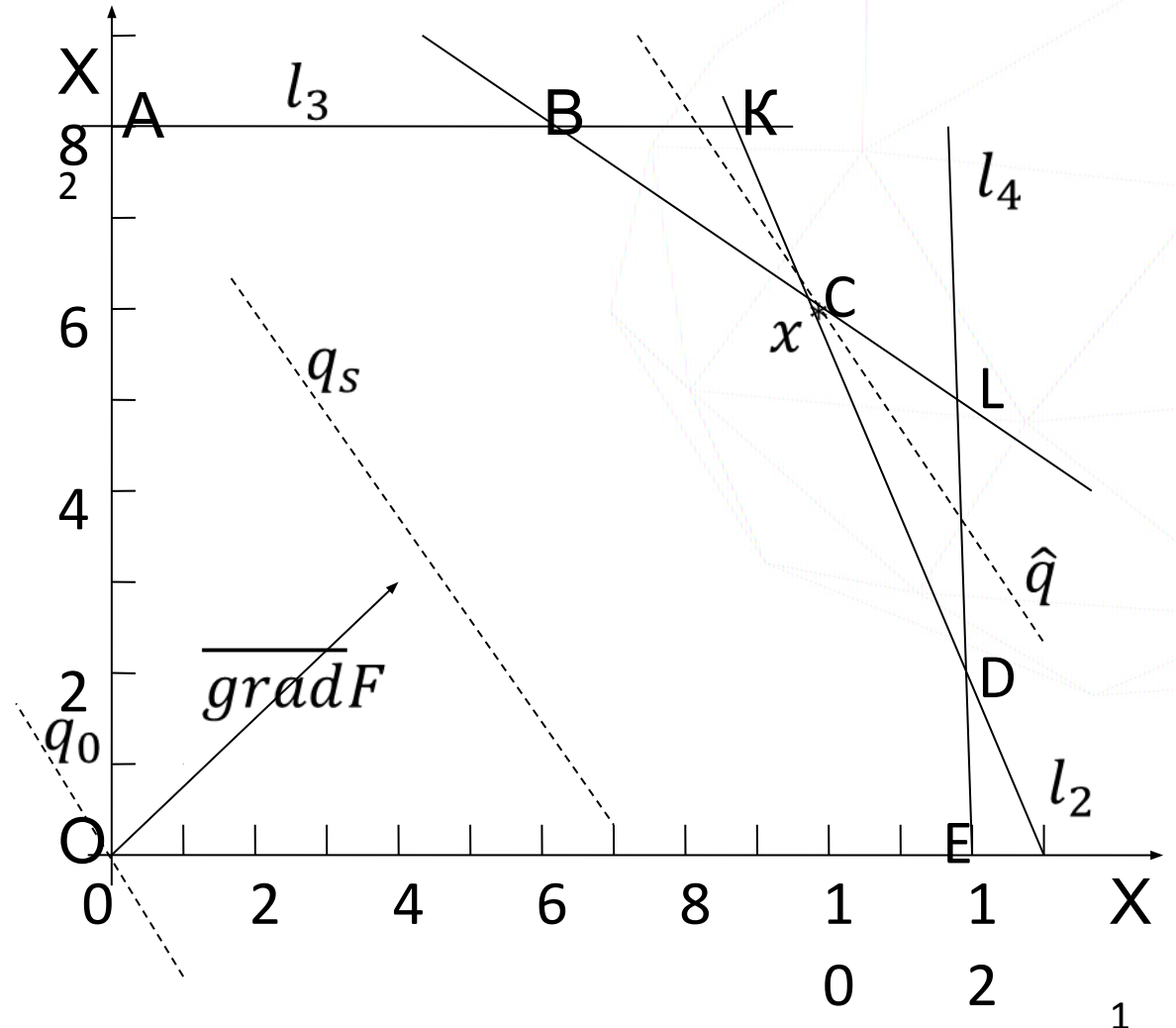


Рис. 2.6

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

$$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ 2x_1 + x_2 \leq 26, \\ 2x_2 \leq 16, \\ x_1 \leq 12, \end{cases}$$

$$x^* (10; 6) = C$$

$$K = l_2 \cap l_3:$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 26, \\ 2x_2 = 16. \end{cases} \quad K(9; 8).$$

$$F(9; 8) = 4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 60$$

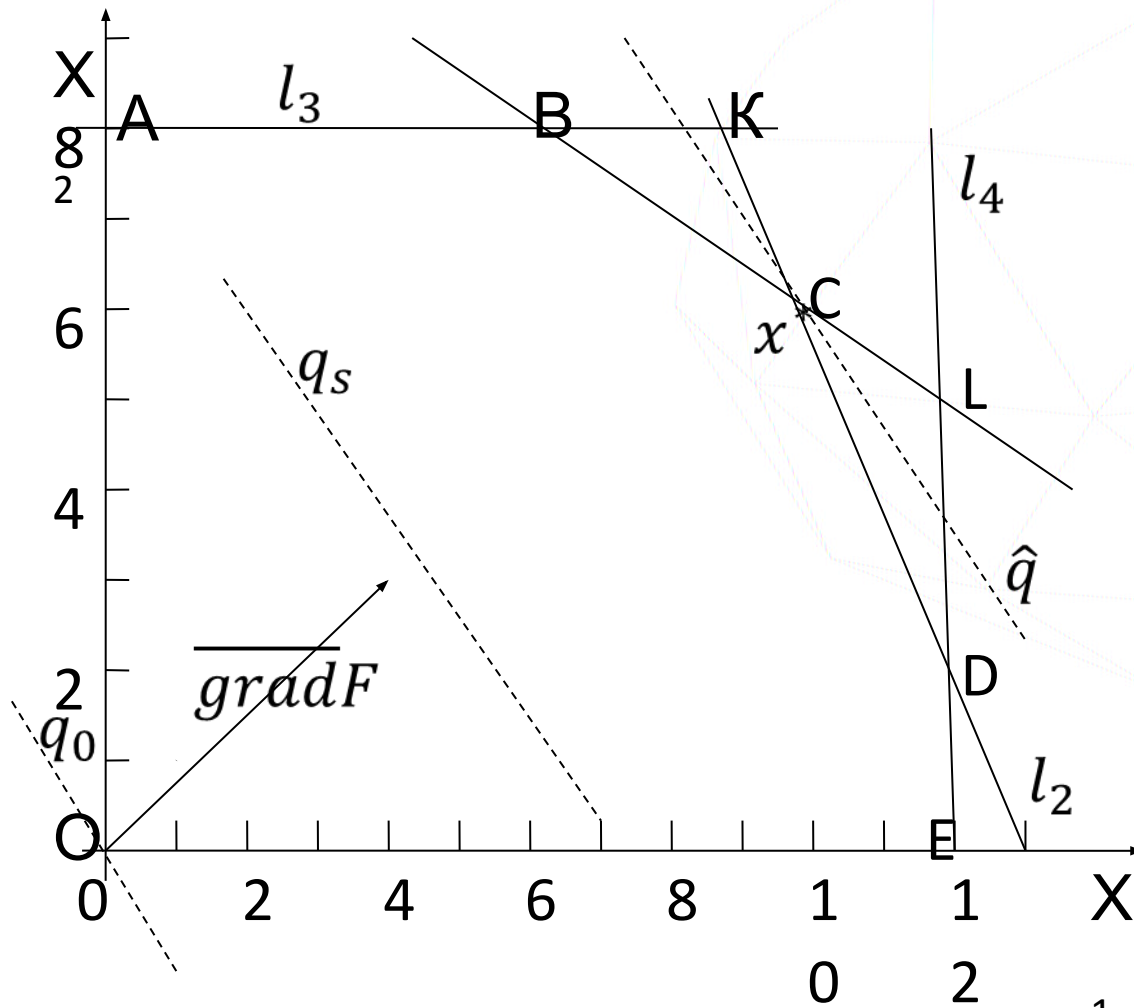


Рис. 2.6

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ.

В рамках анализа модели на чувствительность выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели.

Если прямая проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то соответствующее **ограничение** будем считать **активным**, соответствующий **ресурс - дефицитным**.

Если ограничение **пассивное**, то соответствующий ресурс является **недефицитным** и имеется в избытке.

При анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений, определяются:

- а) предельно допустимые увеличения запаса дефицитного ресурса, позволяющие улучшить найденное оптимальное решение ;
- б) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса , не изменяющее найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ НА ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Вариация коэффициентов целевой функции может изменить статус того или иного ресурса: дефицитный ресурс сделать недефицитным и наоборот.

Изменения коэффициентов целевой функции оказывают влияние на наклон прямой, изображающей эту функцию.

При анализе модели на чувствительность к изменениям коэффициента целевой функции исследуются следующие вопросы:

- а) каков диапазон изменения каждого из коэффициентов функции при котором не происходит изменения оптимального решения;
- б) на сколько следует изменить тот или иной коэффициент, чтобы недефицитный ресурс сделать дефицитным и наоборот