Логарифмы

https://100urokov.ru/predmety/urok-8-logarifmy

Для показательной функции, как и для многих других, существует обратная функция. Однако для ее изучения сперва необходимо познакомиться с понятием логарифма.

$$\log_2 8 = 3$$

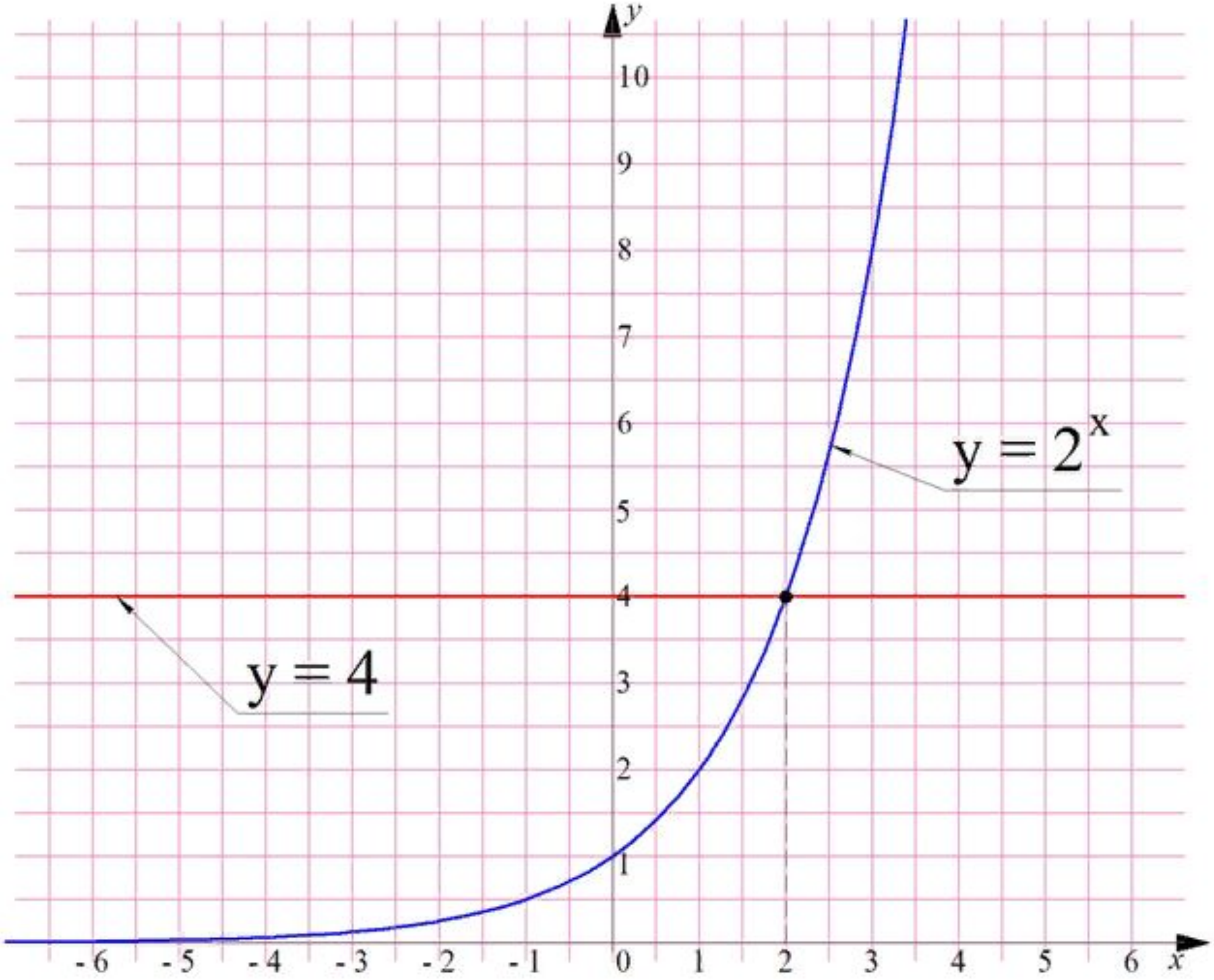
$$\log_{0.5} 2 = -1$$

$$\lg 100000 = 5$$

Понятие логарифма

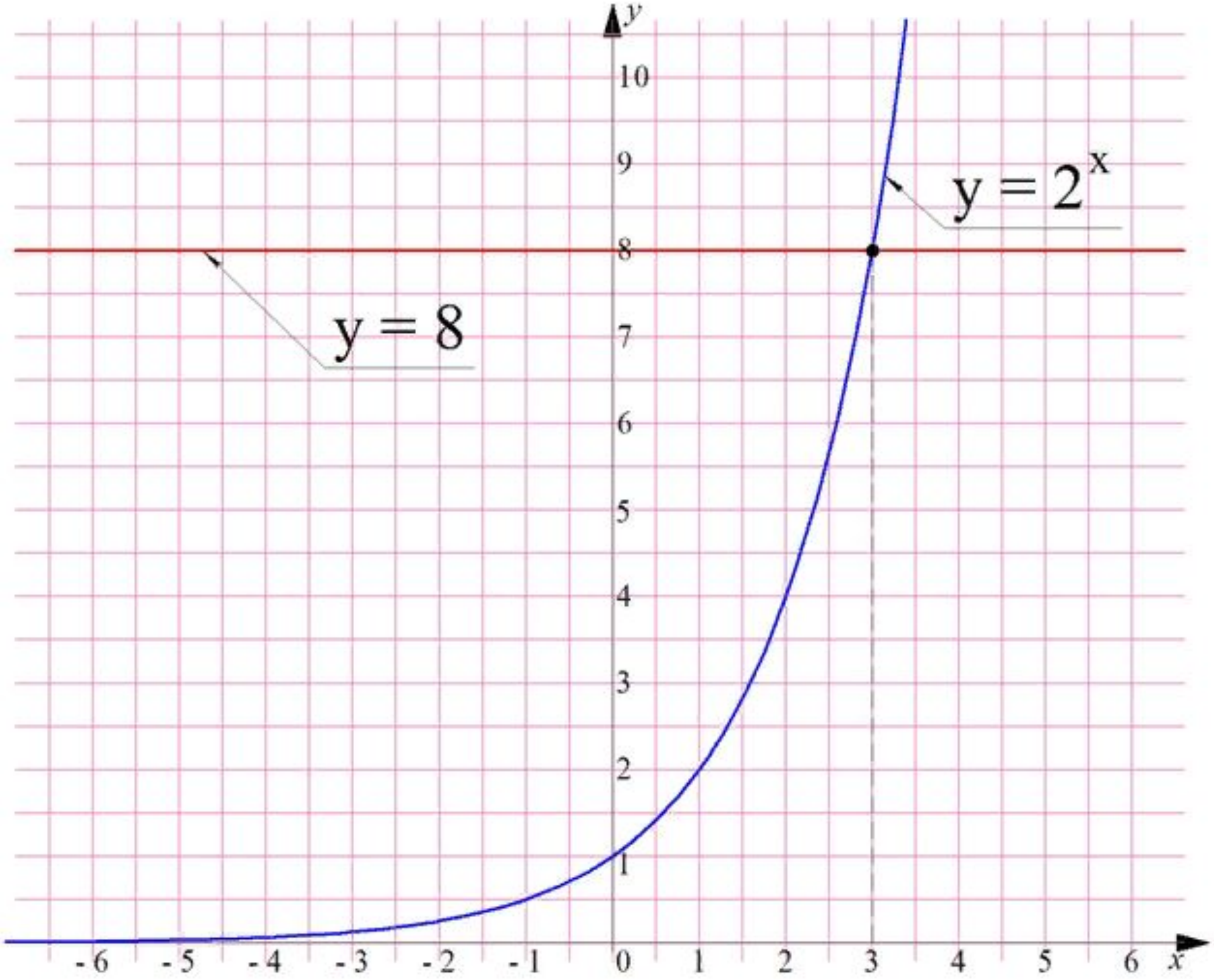
Великий ученый Пьер-Симон Лаплас говорил, что изобретение логарифмов продлило жизнь астрономов вдвое, ведь с их помощью астрономические расчеты, которые ранее занимали несколько месяцев, стало возможно выполнять за считанные дни. Что же представляют собой логарифмы и как они так сильно упрощают вычисления? Для ответа на этот вопрос сначала следует вспомнить показательные уравнения.

Рассмотрим простейшее показательное уравнение $2^x = 4$. Так как $2^2 = 4$, то, очевидно, оно имеет единственный корень, равный 2. Найти его можно не только аналитически, но и графически:



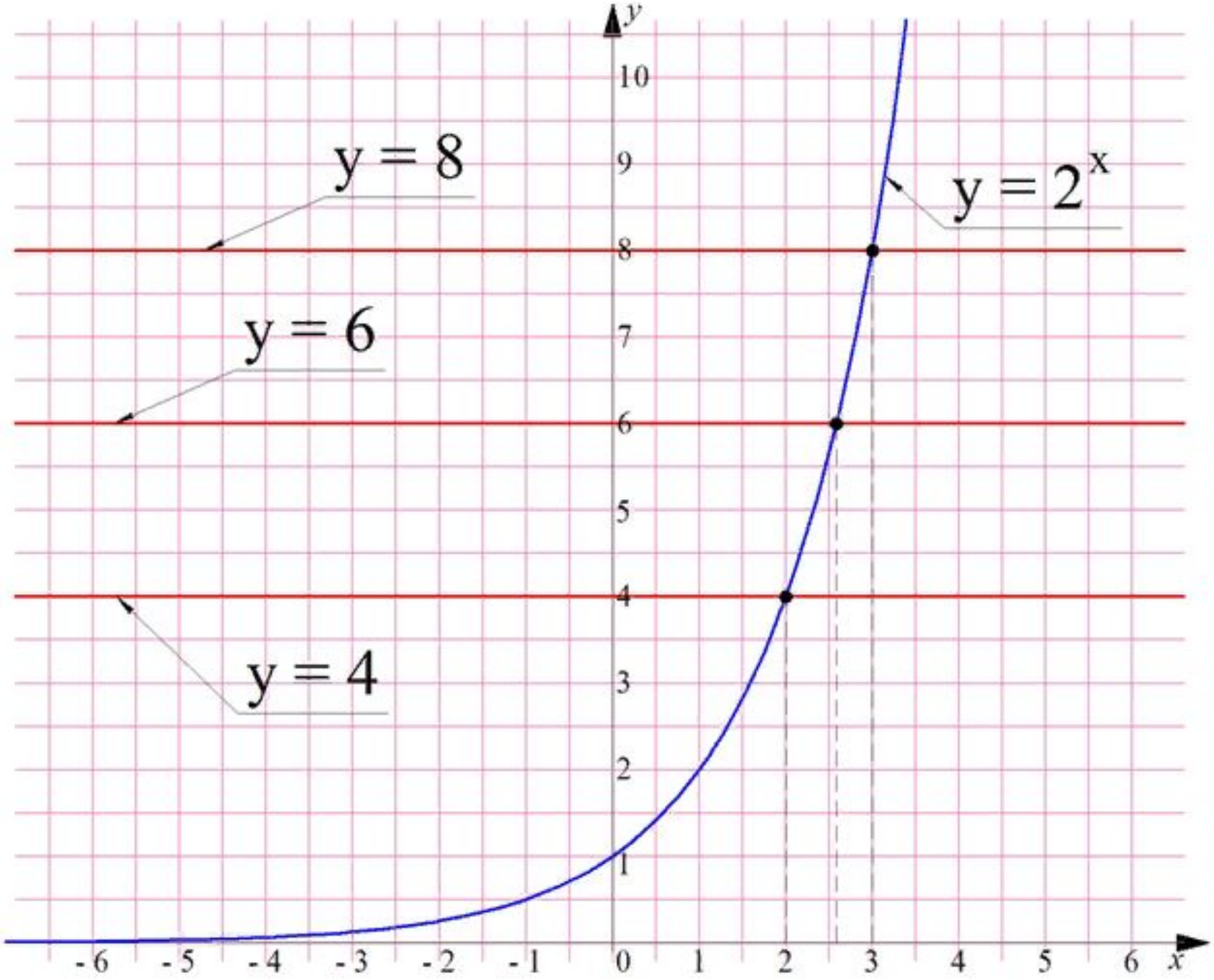
y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
$y = 2^x$
$y = 4$
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1
1
2
3
4
5
6
x

Далее посмотрим на уравнение $2^x = 8$. Так как восьмерка – это двойка в кубе ($2^3 = 8$), то единственным корнем уравнения будет число 3. Также проиллюстрируем это с помощью графика:



y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
y = 2^x
y = 8
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1
0
1
2
3
4
5
6
x

Однако если мы попытаемся решить уравнение $2^x = 6$, то мы столкнемся с проблемами. Представить шестерку как какую-то степень двойки не получается. Графический метод показывает, что у этого уравнения есть единственный корень, который лежит между числами 2 и 3, но точно определить его значение не получается:

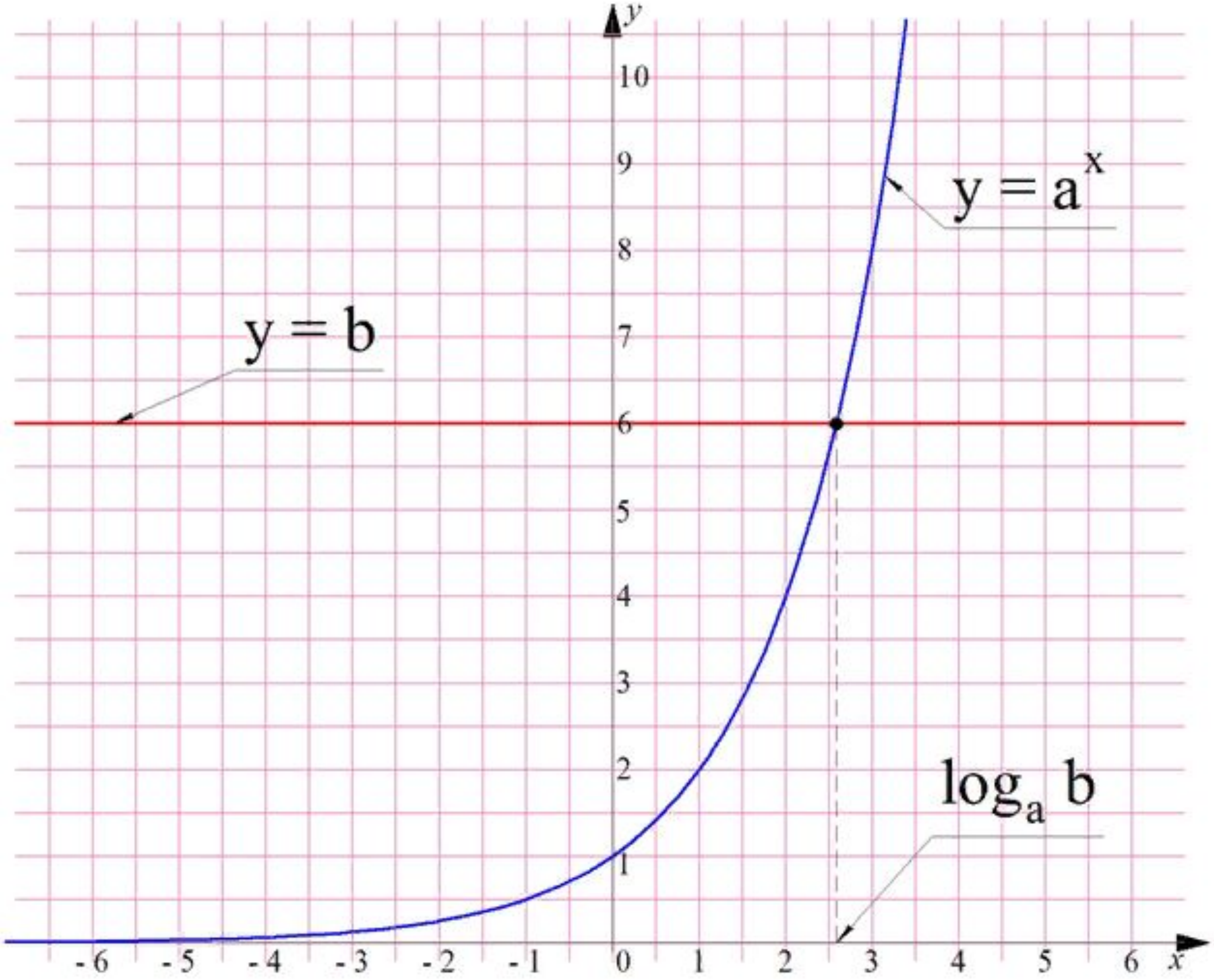


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
y = 8
y = 6
y = 4
y = 2^x
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1
1
2
3
4
5
6
x

Можно доказать (мы не будем этого делать), что искомый нами корень невозможно выразить с помощью дробей и даже корней n-ой степени. Поэтому возникает необходимость ввести какое-то новое обозначение, чтобы записывать корни таких уравнений. Математики придумали для такого числа обозначение $\log_2 6$, которое читается как «логарифм шести по основанию два».

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть есть некоторое уравнение $a^x = b$

Если число b положительно, то уравнение имеет корень, и при том единственный. Для его обозначения используется запись $\log_a b$. Покажем, как графически показать значение величины $\log_a b$. Для этого надо построить показательную функцию $y = a^x$ и горизонтальную линию $y = b$. Они пересекутся в единственной точке (если b положительно). Абсцисса (координата x) этой точки и будет равна $\log_a b$:



y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
y = a^x
y = b
log_a b
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1
1
2
3
4
5
6
x

Дадим строгое определение логарифма:

Логарифмом числа **b** по основанию **a** называется корень уравнения

$$a^x = b.$$

Задание. Какое число является решением показательного уравнения

$21^x = 19$

Решение. По определению логарифма это число можно записать так:

$\log_{21} 19$

Ответ: $\log_{21} 19$.

Задача. Слиток радиоактивного изотопа, чей период полураспада (его обозначают буквой T) составляет 10 минут, имеет начальную массу (m_0), равную 1 кг. Через сколько минут его вес уменьшится до 300 грамм (0,3 кг)? Масса радиоактивного изотопа изменяется по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$$

Решение. Подставим исходные данные в формулу, и получим уравнение с неизвестной величиной t:

$0{,}2 = 1 \bullet 2$^$_{-t/10}$

$0{,}3 = 2$^$_{-t/10}$

Получили простейшее показательное уравнение, однако его левую часть (число 0,3) нельзя представить как степень двойки. Однако с помощью определения логарифма мы можем записать, что

$- t/10 = \log_2 0{,}3$

Умножаем ур-ние на (– 10) и получаем:

$t = -10 \log_2 0{,}3$

С помощью калькулятора или компьютера можно узнать, что

$\log_2 0{,}3 \approx -1{,}737$

Тогда искомое нами время примерно равно

$t = -10 \log_2 0{,}3 \approx -10 \cdot (-1{,}737) \approx 17{,}37$ минут ≈ 17 минут 22 секунды

Иногда бывает удобнее использовать иное определение, которое по своей сути почти не отличается от первого:

Логарифмом числа **b** по основанию **a** называется показатель степени, в которую надо возвести число **a**, чтобы получить число **b**:

$\log_a b = c$, если $a^c = b$.

Вычислим для примера несколько простейших логарифмов:

$\log_3 81 = 4$, ведь $3^4 = 81$

$\log_{10} 1000 = 3$, ведь $10^3 = 1000$

$\log_{0,5} 0{,}125 = 3$, ведь $0{,}5^3 = 0{,}125$

$\log_{25} 5 = 0{,}5$, ведь $25^{0,5} = 5$

$\log_{25} 125 = 1{,}5$, ведь $25^{1,5} = 125$

$\log_{10} 0{,}000001 = -6$, ведь $10^{-6} = 0{,}000001$

Ограничения, связанные с логарифмом

Заметим, что сам логарифм может оказаться любым вещественным числом, ведь мы умеем возводить числа и в отрицательные, и в дробные, и даже в иррациональные степени. Однако для логарифма $\log_a b$ некоторые ограничения накладываются на значение числа a (оно называется основанием логарифма) и на значение числа b (будем называть его аргументом логарифма).

Напомним, что при определении показательной функции $y = a^x$ было введено ограничение, согласно которому основание степени (число a) должно быть строго положительным числом и при этом НЕ может равняться единице. Из-за этого и основание логарифма должно также соответствовать этому ограничению. Основание логарифма и основание показательной функции даже специально обозначают одной буквой a, чтобы связь этих двух понятий была очевидней.

Также напомним, что показательное уравнение $a^x = b$ имеет решение только при положительных значениях b. Это решение и представляет собой $\log_a b$. Если же число b отрицательно, то корня у уравнения нет, а значит и вычислить $\log_a b$ невозможно. Поэтому аргумент логарифма не может быть отрицательным.

Сформулируем эти ограничения в виде одного правила:

Выражение $\log_a b$ имеет смысл тогда и только тогда, когда:

- $b > 0$;
- $a > 0$;
- $a \neq 1$.

Если хотя бы одно из этих условий не соблюдено, выражение $\log_a b$ не имеет смысла.

Ранее мы уже сталкивались с тремя случаями, когда выражения не имеют смысла. Во-первых, это происходит при делении на ноль (или нахождении нуля в знаменателе дроби, что, по сути, одно и то же). Во-вторых, выражения бессмысленны, если под корнем четной степени находится отрицательное число. В-третьих, не имеют смысла выражения, в которых отрицательные числа возводятся в дробную степень, ведь возведение в дробную степень можно заменить извлечением $81^{1/4} = \sqrt[4]{81}$

а отрицательное число не должно оказываться под знаком корня.

Сейчас мы узнали четвертый подобный случай, связанный с понятием логарифма. Больше в рамках курса не будут рассматриваться никакие другие ситуации, в которых выражение может потерять смысл.

Основные свойства логарифмов

Любое число, возведенной в первую степень, равно самому себе. То есть справедливо равенство

$a^1 = a$

Из него, пользуясь определением логарифма, получаем первое важное его свойство: $\log_a a = 1$.

$$\boxed{\log_a a = 1.}$$

Продемонстрируем использование этого правила:

$$\log_2 2 = 1$$

$$\log_{453} 453 = 1$$

$$\log_{0,12568} 0,12568 = 1$$

$$\log_{4/7} 4/7 = 1$$

Любое число при возведении в нулевую степень равно единице: $a^0 = 1$

Из этого следует второе важное правило: логарифм единицы по любому основанию равен нулю:

$$\boxed{\log_a 1 = 0.}$$

Покажем несколько примеров использования этого тривиального правила:

$$\log_2 1 = 0$$

$$\log_{10001} 1 = 0$$

$$\log_{8/9} 1 = 0$$

Для получения третьего свойства логарифма запишем очевидно справедливое равенство:

$$a^c = a^c$$

Пользуясь определением логарифма, мы можем записать, что $\log_a a^c = c$.

$$\boxed{\log_a a^c = c.}$$

Продемонстрируем, как работает это свойство логарифмов:

$$\log_5 5^6 = 6$$

$$\log_{19} 19^{15} = 15$$

$$\log_{0,46} 0,46^{7/9} = 7/9$$

Это правило можно применить для вычисления некоторых простейших логарифмов:

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

$$\log_6 216 = \log_6 6^3 = 3$$

$$\log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2$$

Логарифм $\log_a b$, согласно одному из своих определений, это та степень, в которую нужно возвести а, чтобы получилось b. Это определение можно представить в виде формулы: $a^{\log_a b} = b$

Данное равенство называют основным логарифмическим тождеством.

Основное логарифмическое тождество:

$$\mathbf{a^{\log_a b} = b}$$

В силу этого тождества справедливы следующие равенства:

$$5^{\log_5 8} = 8$$

$$0{,}7^{\log_{0,7} 29} = 29$$

$$(4/13)^{\log_{4/13} 427/562} = 427/562$$

Функция логарифма

Арифметическое действие, в ходе которого находят логарифм какого-либо числа, называется логарифмированием. Это действие является обратным по отношению к возведению в степень. Проиллюстрируем это табличкой, в которой слева будет показана операция возведения в степень, а справа – логарифмирование:

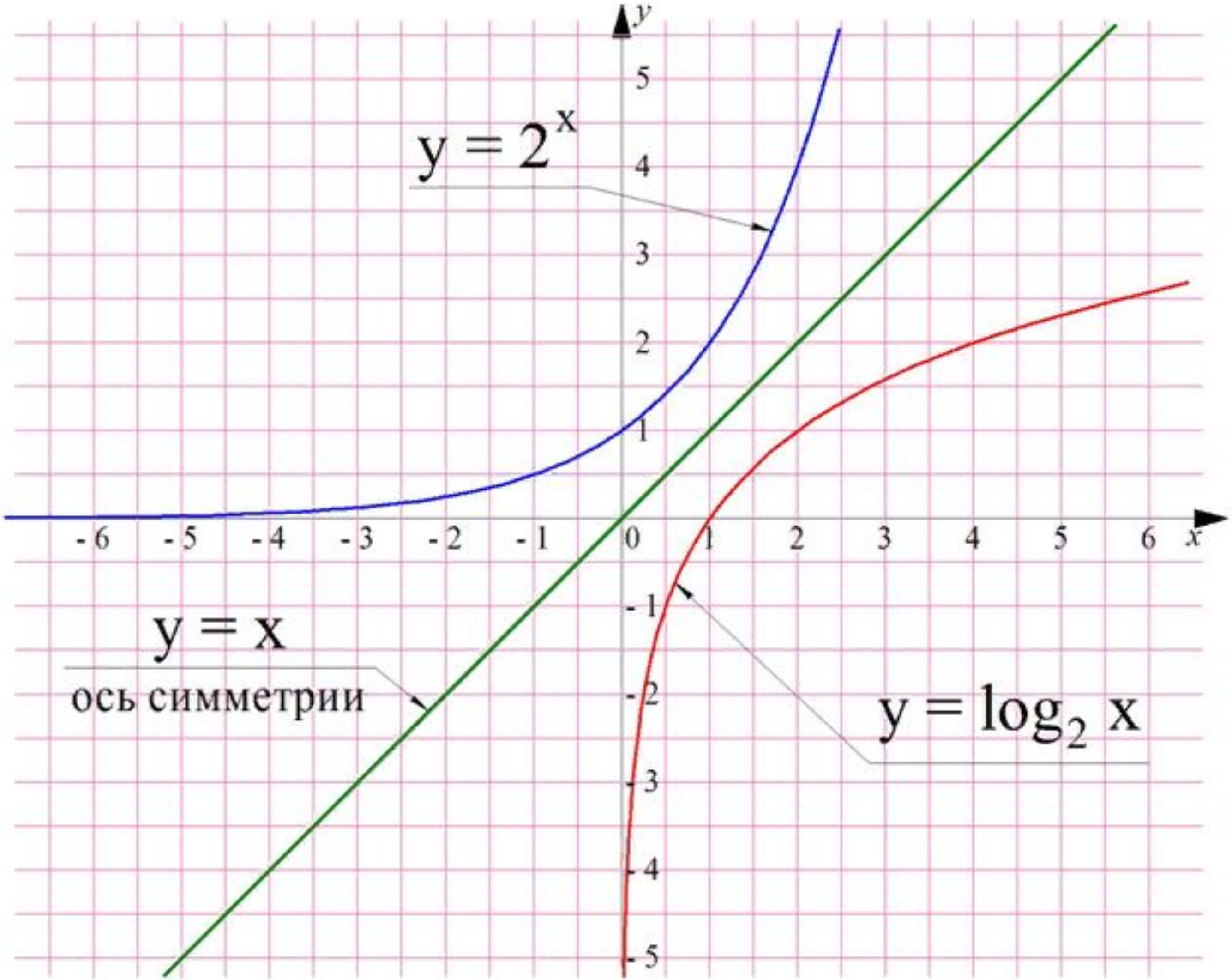
Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
$10^4 = 10000$	$\log_{10} 10000 = 4$
$0{,}3^4 = 0{,}0081$	$\log_{0{,}3} 0{,}0081 = 4$
$7^{-2} = 1/49$	$\log_7 1/49 = -2$

Теперь подумаем о функции $y = \log_a x$. Так как логарифмирование является обратным действием для возведения в степень, то и функция $y = \log_a x$ должна быть обратной для показательной функции $y = a^x$.

Логарифмическая функция $\mathbf{y = \log_a x}$ является обратной для показательной функции $\mathbf{y = a^x}$.

В свою очередь это означает, что графики этих двух функций должны быть симметричны относительно прямой, задаваемой уравнением $y = x$.

Напомним, что на вид показательной функции $y = a^x$ влияет значение основания степени a. Если оно больше единицы, то функция оказывается возрастающей. Тогда и обратная ей логарифмическая функция также окажется возрастающей. Для примера построим графики $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$.


y
x
y = 2^x
y = x
ось симметрии
y = log_2 x
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4
-5

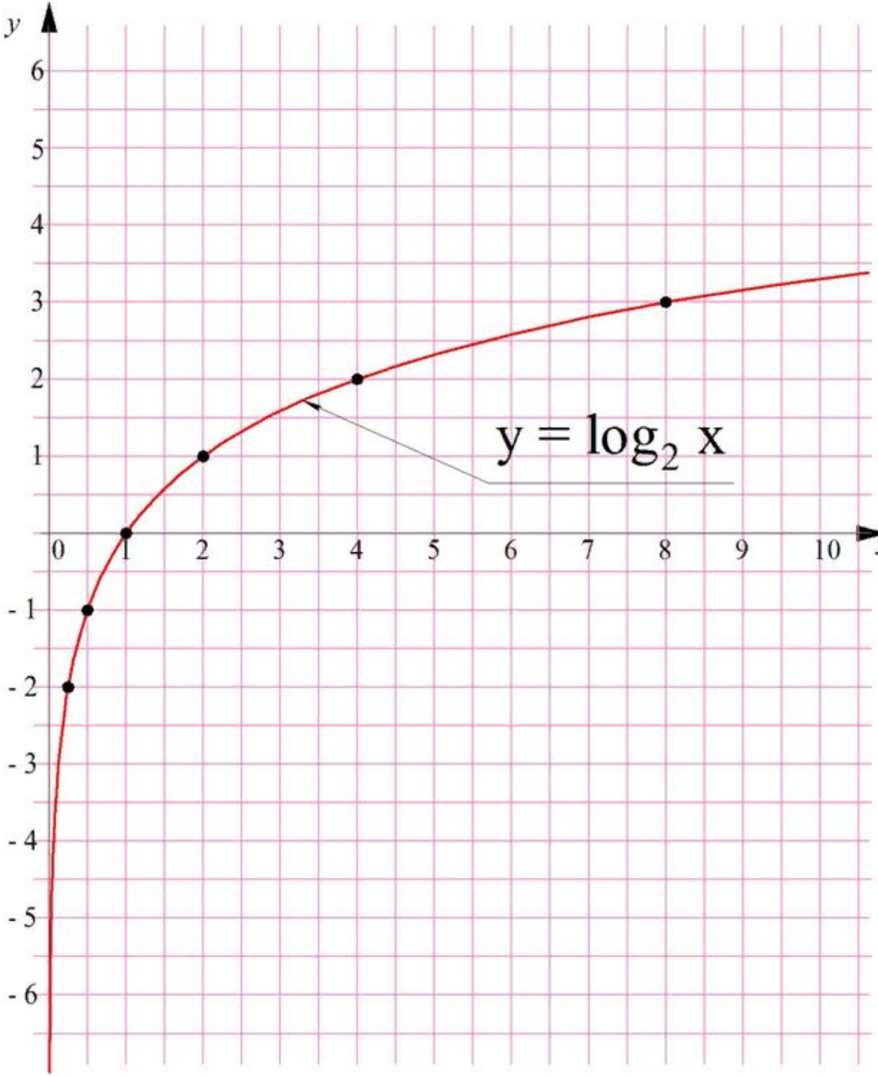
Графики функций **$y = \log_a x$** и **$y = a^x$** симметричны относительно прямой **$y = x$.**

Полученный график логарифмической функции называют логарифмической кривой, однако понятно, что она представляет собой всё ту же экспоненту, которую отобразили симметрично относительно оси Ox.

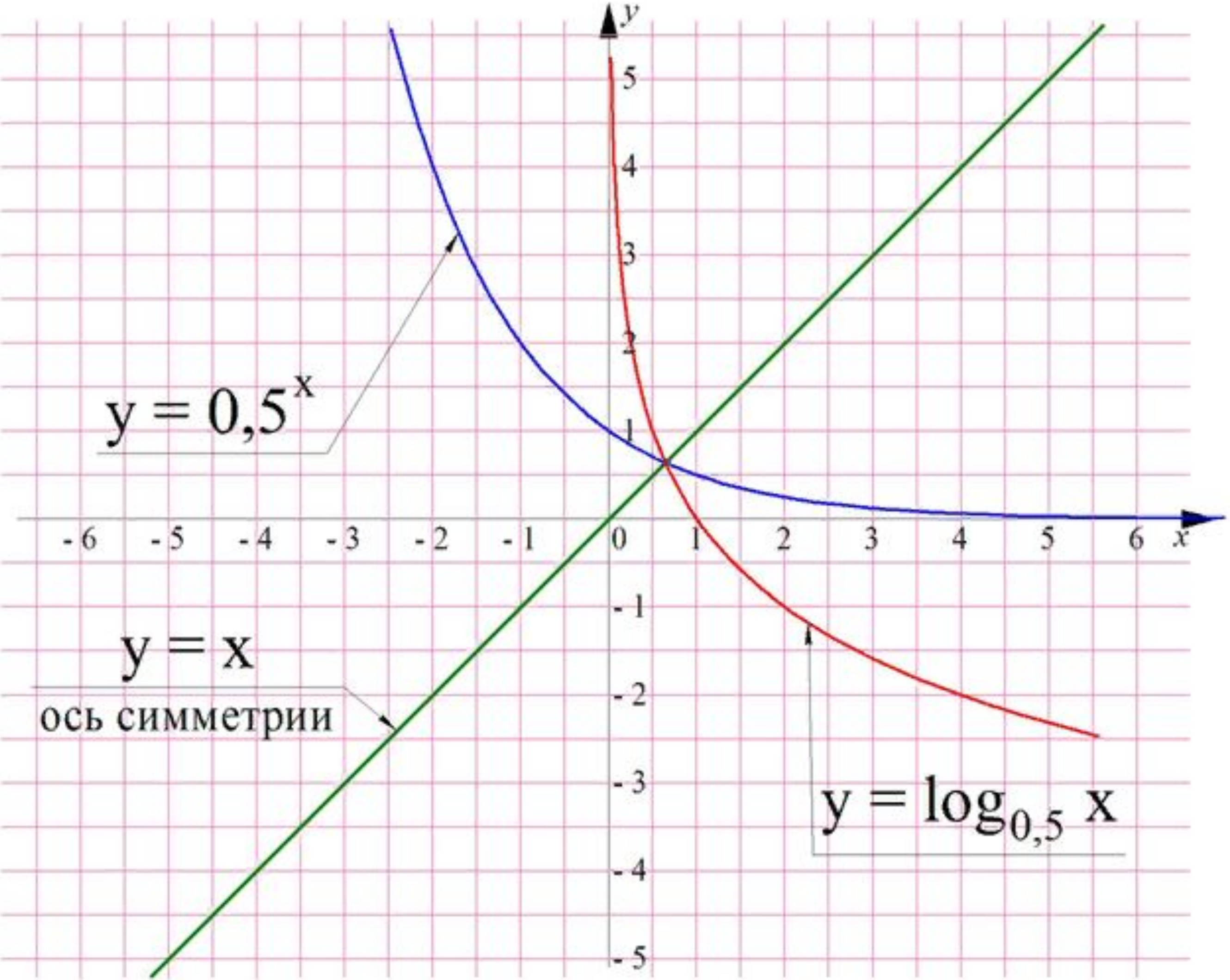
График $y = \log_2 x$ можно и построить иначе, по точкам, просто вычислив ее значение в нескольких «удобных» для вычисления точках:

x	1/4	1/2	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	–2	–1	0	1	2	3

Видно, что в обоих случаях получился один и тот же график. Похожим будет и график любой функции у $=\log_a x$, если число а будет больше единицы.

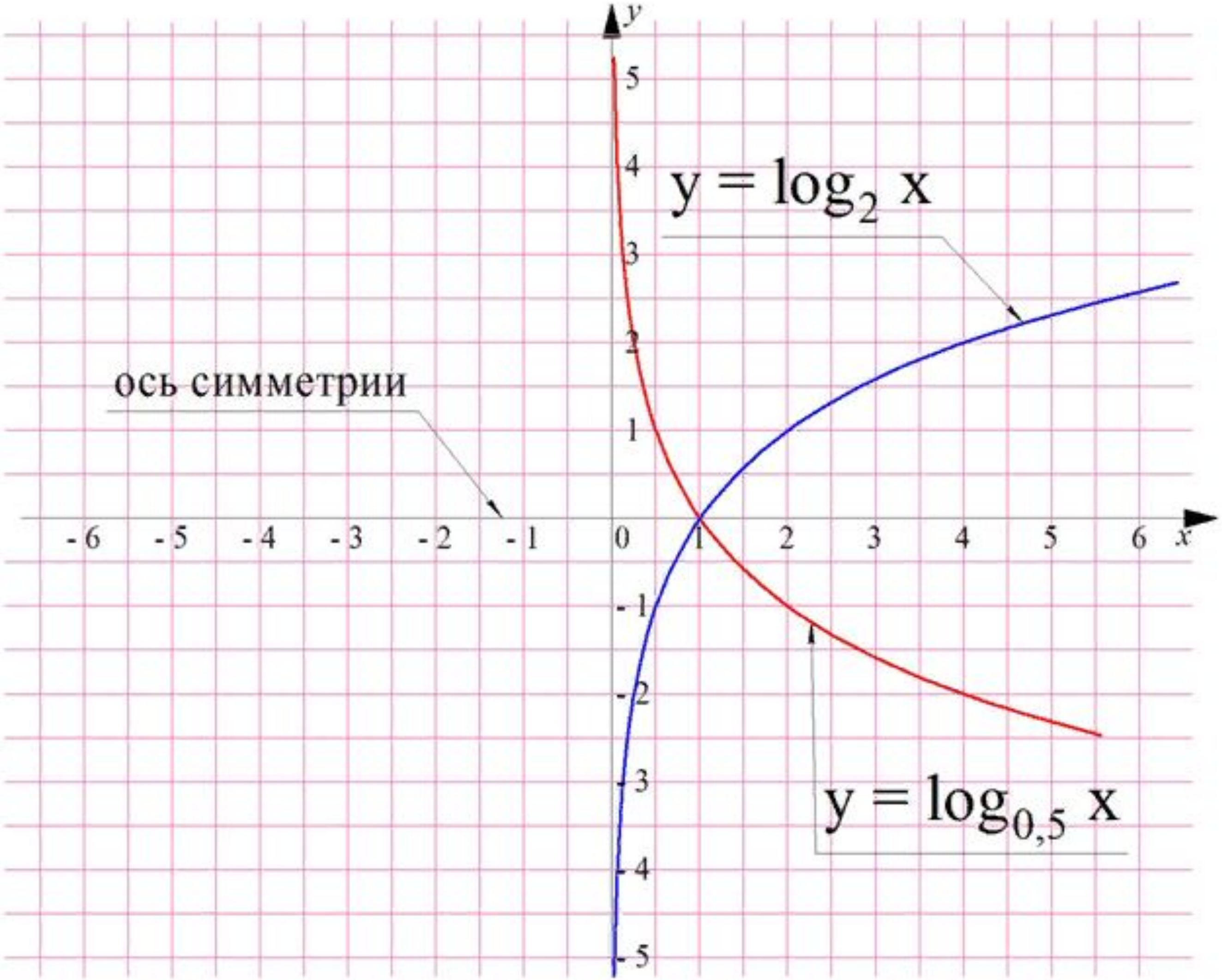


Ситуация меняется в том случае, когда a < 1, ведь при таком основании показательная функция $y = a^x$ будет убывающей. Тогда убывающим окажется и логарифмическая функция. Для примера построим график функции $= 0{,}5^x$ и график обратной ей функции $y = \log_{0{,}5} x$:



y
x
$y = 0,5^x$
$y = x$
ось симметрии
$y = \log_{0,5} x$
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1
0
1
2
3
4
5
6
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

Возможно, вы заметили, что графики $y = \log_2 x$ и $y = \log_{0,5} x$ чем-то похожи друг на друга. И действительно, если построить их на одной плоскости, то мы увидим, что они симметричны относительно оси Ox:



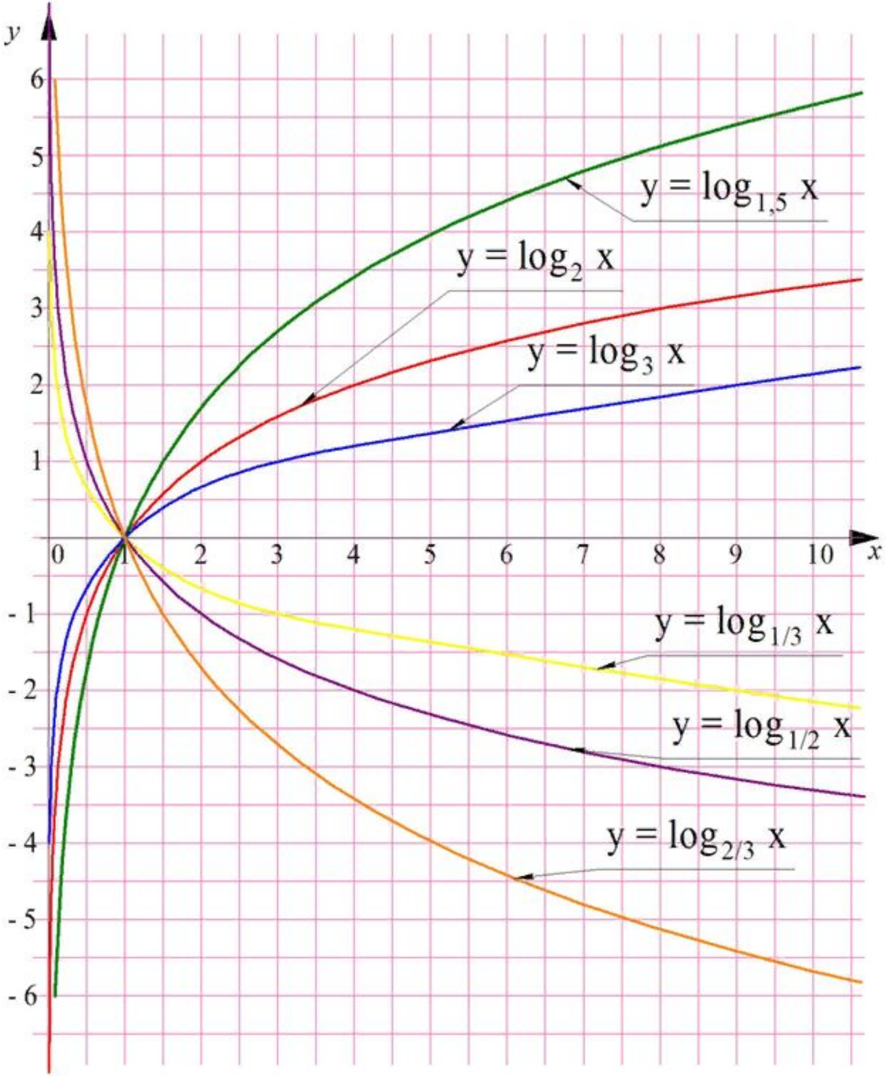
y
x
$y = \log_2 x$
ось симметрии
$y = \log_{0,5} x$
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1
0
1
2
3
4
5
6
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

Причиной такой симметрии является то, что их основания, числа 2 и 0,5, являются обратными числами, то есть при перемножении дают единицу (2•0,5 = 1).

Аналогично такой же симметрией будут обладать любые две логарифмические кривые с обратными основаниями. Это свойство логарифмов мы докажем чуть позднее.

Графики функций $y = \log_a x$ и $y = \log_{1/a} x$ симметричны относительно оси Ох.

Далее построим ещё несколько графиков, чтобы лучше понять свойства логарифмических функции:



y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
6
5
4
3
2
1
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
y = log1,5 x
y = log2 x
y = log3 x
y = log1/3 x
y = log1/2 x
y = log2/3 x

Анализируя полученные графики, мы можем заметить следующие свойства функции логарифма:

Область определения логарифмической функции – это множество всех положительных чисел, то есть промежуток $(0; +\infty)$. Действительно, выражение $\log_a b$ имеет смысл только тогда, когда число $b > 0$.

Областью значения логарифмической функции является множество всех действительных чисел, то есть промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Логарифмическая функция является строго монотонной. При этом при основании $a > 1$ она возрастает, а при основании $0 < a < 1$ она убывает.

График каждой логарифмической функции проходит через точку (1; 0). Это связано с тем, что для любого основания справедливо равенство $\log_a 1 = 0$.

Три основных вида логарифмов

Математика изучает логарифмы с любыми положительными основаниями. Однако на практике наиболее распространены три их вида.

Первым из них является десятичный логарифм, основание которого равно 10. Дело в том, что его помощью до изобретения калькуляторов и компьютеров можно было быстро и с высокой точностью перемножать большие числа, используя такой прибор, как логарифмическая линейка.

История понятия логарифма начиналась в XVI-XVII веках и была связана именно с необходимостью выполнения сложных арифметических действий с большими числами. Для обозначения десятичных логарифмов используют специальный символ lg, то есть

$$\log_{10} b = \lg b$$

Сегодня из-за развития электроники десятичные логарифмы используются значительно реже по сравнению с 50-60 г. XX века. Но, так как почти вся вычислительная техника построена на использовании двоичной системы счета, возросла значимость двоичного логарифма $\log_2 b$. Для его обозначения не используются никакие специальные символы, однако в работах, посвященным информатике и оценке сложности алгоритмов, он используется особенно часто.

Наконец, самым важным является натуральный логарифм. Это логарифм, основанием которого является число e, примерно равное 2,71828… Для его обозначения используют символ ln, то есть

> Натуральный логарифм – это логарифм с основанием, равным числу e. Для его обозначения используется символ **ln**:
>
> $$\log_e b = \ln b.$$

Свойства натурального логарифма, которые отличают его от других логарифмов, будут изучены нами позднее. Заметим лишь, что многие физические формулы содержат именно натуральный логарифм.

Преобразования логарифмических выражений

Для работы с логарифмическими выражениями надо знать несколько основных свойств логарифмов. Первое из них помогает вычислять логарифм произведе

Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме их логарифмов:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$$

Для доказательства этого правила введем обозначения.

Пусть

$$\log_a b = x$$

$$\log_a c = y$$

$$\log_a bc = z$$

Тогда нам надо доказать, что z = x + y. По определению логарифма мы можем записать что

$$a^x = b \ (1)$$

$$a^y = c \ (2)$$

$$a^z = bc \ (3)$$

Теперь подставим (1) и (2) в $a^z = bc = a^x \bullet a^y = a^{x+y}$ (3):

Получили, что a^z = a^x+y. В этом равенстве в обеих частях стоят степени с совпадающим основанием a. Значит, должны совпадать и их степени, то есть

$$z = x + y$$

что и мы и пытались

доказать.

Убедимся в справедливости этого правила на простейшем примере. Очевидно, что

$\log_2 4 = 2$, ведь $2^2 = 4$

$\log_2 8 = 3$, ведь $2^3 = 8$

$\log_2 32 = 5$, ведь $2^5 = 32$.

С одной стороны, так как $2 + 3 = 5$,

то и $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$.

С другой стороны, число 32 можно представить как произведение 4•8, то есть

$\log_2 32 = \log_2 (4 \bullet 8)$&

С учетом этого получаем, что

$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32 = \log_2 (4 \bullet 8)$

Покажем несколько примеров использования только что доказанного правила: $\log_4 15 = \log_4 (3 \cdot 5) = \log_4 3 + \log_4 5$

$$\log_3 18 = \log_3 (9 \cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$$

$$\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12} (3 \cdot 4) = \log_{12} 12 = 1$$

Отдельно отметить, что правило сложения логарифмов действует и в том случае, когда складываются не два, а большее количество логарифмов:

$$\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7 = \log_5 (2 \cdot 3 \cdot 7) = \log_5 42$$

Второе правило используют для определения логарифма от степени какого-либо числа.

Логарифм степени равен произведению логарифма основания степени на ее показатель:

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b.$$

Грубо говоря, показатель степени можно перенести и записать перед знаком логарифма. Сначала для наглядности приведем доказательство только для случая, когда r– целая степень. Тогда число b^r можно представить как произведение r множителей, равных b. Однако логарифм такого произведения можно заменить на сумму r логарифмов:

$$\log_a b^2 = \log_a (b \bullet b) = \log_a b + \log_a b = 2\log_a b$$

$$\log_a b^3 = \log_a (b \bullet b \bullet b) = \log_a b + \log_a b + \log_a b = 3\log_a b$$

$$\log_a b^4 = \log_a (b \bullet b \bullet b \bullet b) = \log_a b + \log_a b + \log_a b + \log_a b = 4\log_a b$$

……..

$$\log_a b^r = \log_a (b \bullet b \bullet \ldots \bullet b) = \log_a b + \log_a b + \ldots + \log_a b = r \bullet \log_a b$$

Однако более строгое доказательство должно рассматривать и случай, когда r – это отрицательное или даже дробное число. Поэтому, как и в ситуации с доказательством первого правила, введем переменные.

Пусть $\log_a b = x$

$$\log_a b^r = y$$

Получается, что нам надо доказать, что $y = r \cdot x$.

Из определения логарифма следуют следующие формулы:

$$a^x = b$$

$$a^y = b^r$$

Подставляя первую формулу во вторую, получаем:

$$a^y = b^r = (a^x)^r = a^{xr}$$

И снова, если у двух равных степеней равны основания, то и показатели обязательно будут равными:

$$y = xr$$

Это равенство мы и пытались

доказать.

Продемонстрируем, как работает это свойство логарифмов: $\log_2 125 = \log_2 5^3 = 3\log_2 5$

$\log_7 64 = \log_7 2^6 = 6\log_7 2$

Правило работает и в обратную сторону:

$4 \log_8 3 = \log_8 3^4 = \log_8 81$

Задание. Чему равна дробь

$$\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$$

Решение. Так как $125 = 5^3$, мы можем выполнить следующие преобразования:

$$\frac{\log_7 125}{\log_7 5} = \frac{\log_7 5^3}{\log_7 5} = \frac{3 \cdot \log_7 5}{\log_7 5} = 3$$

Ответ: 3.

Третье правило помогает вычислять логарифм от частного или дроби.

Логарифм частного двух положительных чисел равен разности их логарифмов:

$$\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c.$$

Для доказательства этого свойства логарифмов воспользуемся уже доказанными нами двумя правилами. Но предварительно напомним, что произвольное число с в степени (– 1) представляет собой дробь 1/с: $c^{-1} = 1/c$

Тогда доказательство будет записываться в две строчки: $\log_a (b/c) = \log_a (b\bullet(1/c)) = \log_a b + \log_a 1/c = \log_a b + \log_a c^{-1} =$

$= \log_a b + (-1)\bullet\log_a c = \log_a b - \log_a c$

С помощью полученной формулы возможно выполнить следующие преобразования:

$$\log_{17} 15 - \log_{17} 3 = \log_{17} (15/3) = \log_{17} 5$$

$$\log_5 2{,}5 = \log_5 5/2 = \log_5 5 - \log 2 = 1 - \log 2$$

Заметим, что все полученные формулы справедливы только в том случае, когда под знаком логарифма стоят исключительно положительные числа. Например, вполне допустимо преобразование $\log_{14} 30 = \log_{14} (5 \cdot 6) = \log_{14} 5 + \log_{14} 6$

но ошибочной будет такая запись: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

ведь в левой части стоит выражение, имеющее смысл, а в правой – выражение, смысла не имеющее.

Но что делать в случае, если необходимо упростить выражение с переменными, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения? Получается, что запись $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

не является корректной. Действительно, если и x, и y являются отрицательными числами, то их произведение xy положительно. Но тогда получается, что при некоторых значениях переменных левая часть равенства имеет смысл, а правая – нет. Это значит, что оно не является тождеством.

Здесь может помочь использование модуля числа. Запись $\log_a |xy| = \log_a |x| + \log_a |y|$

уже будет корректной при любых допустимых значениях x и y. Если же хоть одна из переменных будет равна нулю, то обе части равенства одновременно потеряют смысл. Таким образом, данное равенство можно считать тождеством.

Аналогично и формулу разности логарифмов можно представить в более общем случае, при котором допускаются отрицательные значения переменных:

$$\log_a |x/y| = \log_a |x| - \log_a |y|$$

Можно ли записать равенство $\log_a x^2 = 2\log_a x$, если допускается, что x может быть и отрицательным? Нет, нельзя, ведь при отрицательных x выражение левая часть равенства будет иметь смысл, а правая нет. Однако использование модуля поможет и в этом случае. Можно написать, что $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$

Аналогичным образом можно упростить и любые другие логарифмы, аргументы которых возведены в четную степень:

$$\log_a x^4 = 4\log_a |x|$$

$$\log_a x^6 = 6\log_a |x|$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$$

Для любых a и b (кроме a = 0 или b = 0) справедливы тождества:

$$\log_a|bc| = \log_a|b| + \log_a|c|$$

$$\log_a|b/c| = \log_a|b| - \log_a|c|$$

$$\log_a b^{2n} = 2n\bullet\log_a|b|.$$

Ещё раз уточним, что эти правила используются при упрощении выражений с переменными, если те могут принимать отрицательные значения. Если же известно, что числа b и c положительны, то лучше использовать формулы, не содержащие модулей.

Переход к новому основанию алгоритма

До этого мы рассматривали преобразования, в ходе которых не менялось основание логарифма. Однако иногда возникает необходимость сложить или вычесть логарифмы с различными основаниями. Пусть надо вычислить значение выражения

$$\log_{25} 9 - \log_5 3$$

Так как основания двух логарифмов различны, то мы не можем использовать выведенную нами формулу разности логарифмов. Однако можно попытаться привести один из логарифмов к новому основанию. Для такой операции существует специальная формула.

Если числа **a**, **b** и **c** положительны, $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то выполняется равенство:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Докажем это утверждение. Для этого введем новые переменные: $x = \log_a b$

$y = \log_c b$

$z = \log_c a$

Тогда по определению логарифма можно записать равенства $a^x = b$

$c^y = b$

$c^z = a$

Отсюда следует, что $a^x = c^y$. Подставим в это равенство вместо а выражение c^z и получим: $(c^z)^x = c^y$

$$c^{zx} = c^y$$

Отсюда следует, что zx = y, или x = y/z. Теперь заменим x, y и z на логарифмы и получим то самое тождество, которые необходимо доказать:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Вернемся к примеру $\log_{25} 9 - \log_5 3$

Теперь мы можем произвести эти вычисления, но для этого сначала приведем $\log_{25}9$ к основанию 5:

$$\log_{25} 9 = \frac{\log_5 9}{\log_5 25} = \frac{\log_5 9}{2} = 0{,}5\ \log_5 9$$

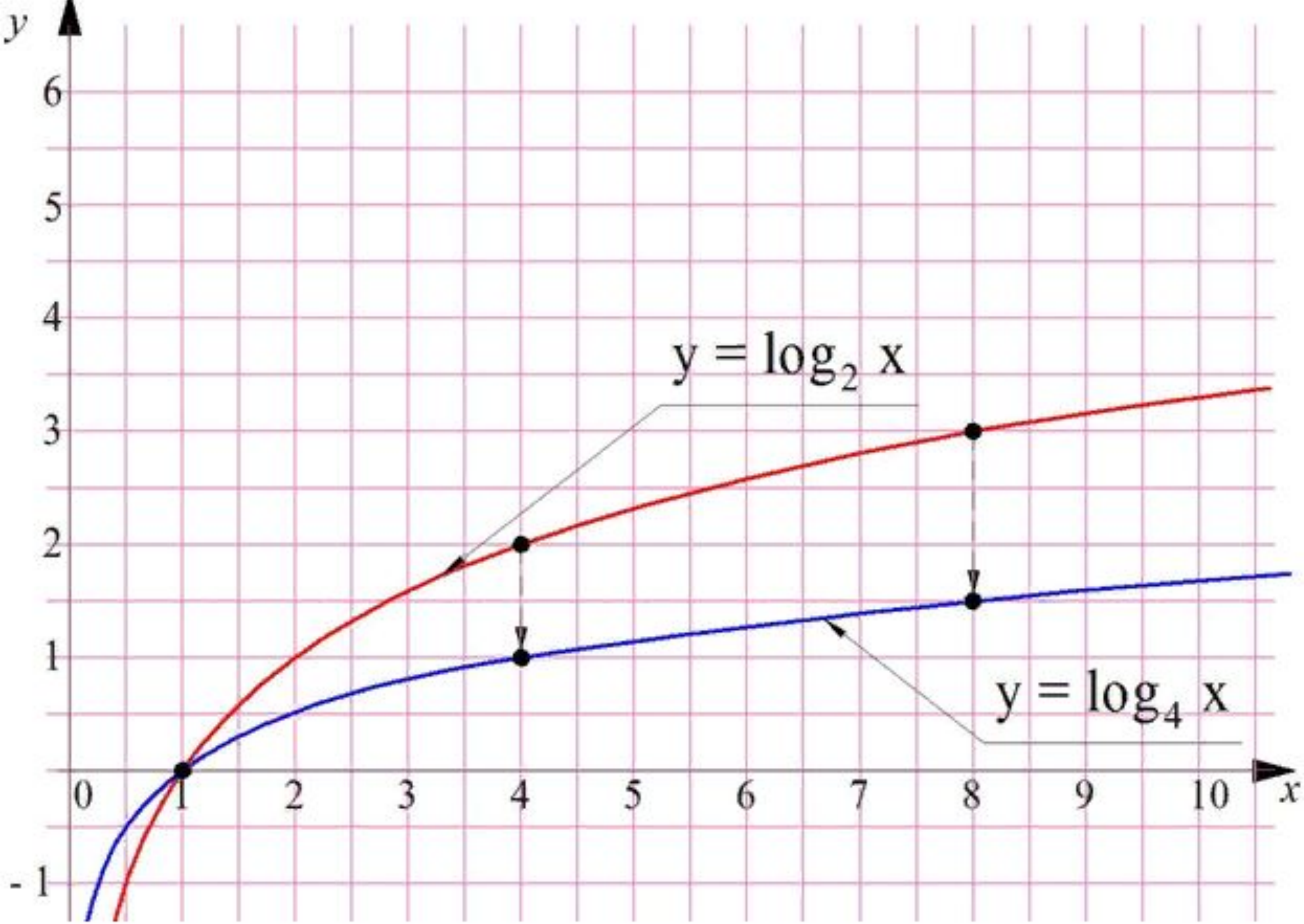
Теперь можно вычислить, чему равна искомая разность: $\log_{25} 9 - \log_5 3 = 0{,}5 \log_5 9 - \log_5 3 = 0{,}5 \log_5 3^2 - \log_5 3 =$

$= 0{,}5 \bullet 2 \bullet \log_5 3 - \log_5 3 = \log_5 3 - \log_5 3 = 0$

Формула перехода к новому основанию позволяет иначе взглянуть на графики логарифмических функций. Пусть дана функция y $=\log_4 x$. Попытаемся привести ее к показателю 2:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2} = \frac{1}{2} \log_2 x$$

Выходит, что график $y = \log_4 x$ можно получить из графика $y = \log_2 x$ его сжатием в 2 раза. Убедимся в этом, построив оба графика в одной плоскости:



y
6
5
4
3
2
1
- 1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
y = log$_2$ x
y = log$_4$ x

Заметим, что и более общем случае графики функций $y = \log_a x$ и $y = \log_b x$ могут быть получены друг из друга растяжением или сжатием в некоторое число раз. Действительно, формулу перехода к новому основанию можно переписать в таком виде:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_c b = \log_c a \bullet \log_a b$$

Теперь подставим вместо числа b переменную x и получим соотношение, связывающее любые две логарифмические функции: $\log_c x = \log_c a \bullet \log_a x$

В данном случае $\log_c x$ и $\log_a x$ – это логарифмические функции, а $\log_c a$ – некоторое число. В результате можно заключить, что график функции $y = \log_c x$ может быть получен из графика $\log_a x$ его растяжением в $\log_c a$ раз.

График логарифмической функции

$$\mathbf{y = \log_c x}$$

может быть получен растяжением

графика функции

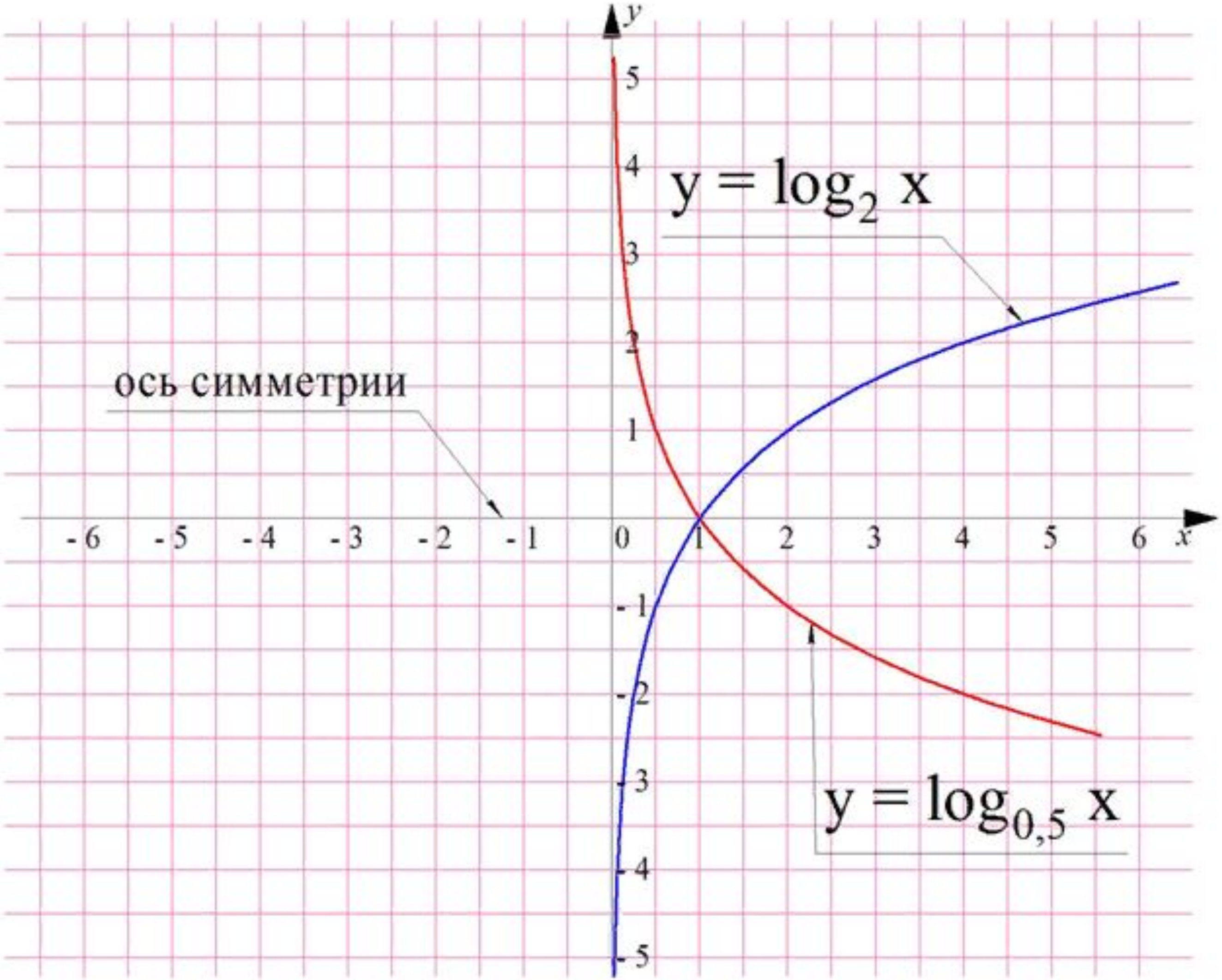
$$\mathbf{y = \log_a x}$$

в $\mathbf{\log_c a}$ раз.

Попытаемся привести логарифм $\log_a b$ к обратному основанию, то есть к основанию 1/a:

$$\log_a b = \frac{\log_{1/a} b}{\log_{1/a} a} = \frac{\log_{1/a} b}{\log_{1/a}(1/a)^{-1}} = \frac{\log_{1/a} b}{(-1) \bullet \log_{1/a}(1/a)} = \frac{\log_{1/a} b}{-1 \bullet 1} = -\log_{1/a} b$$

Итак, $\log_a b = -\log_{1/a} b$. Именно из-за этого графики логарифмов с обратными основаниями (например, 2 и 0,5) симметричны относительно оси Ox:



y
x
0
1
2
3
4
5
6
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
ось симметрии
$y = \log_2 x$
$y = \log_{0,5} x$

$$\log_a b = -\log_{1/a} b$$

Покажем примеры использования этой формулы:

$$\log_5 8 = -\log_{1/5} 8$$

$$\log_{5/2} 7 = -\log_{2/5} 7$$

$$\log_{0.001} 15 = -\log_{1000} 15$$

А что будет, если мы попробуем $\log_a b$ привести к основанию b? Сделаем это:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

Получили ещё одну замечательную логарифмическую формулу.

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Её работу иллюстрируют следующие примеры:

$\log_8 2 = 1/ \log_2 8 = 1/3$

$\log_{81} 3 = 1/ \log_3 81 = 1/4$

$\log_{49} 7 = 1/ \log_7 49 = 1/2$

Ещё одна логарифмическая формула позволяет возводить основание логарифма и его аргумент в одинаковую степень:

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r$$

Докажем это тождество в «обратном порядке», то есть из правой части выведем левую. Для этого просто перейдем к основанию a:

$$\log_{a^r} b^r = \frac{\log_a b^r}{\log_a a^r} = \frac{r \cdot \log_a b}{r \cdot \log_a a} = \frac{\log_a b}{\log_a a} = \frac{\log_a b}{1} = \log_a b$$

Проиллюстрируем, как это свойство можно применять на практике: $\log_3 5 = \log_{3^2} 5^2 = \log_9 25$

$$\log_{\sqrt{7}} 9 = \log_{\sqrt{7}^2} 9^2 = \log_7 81$$

Использование логарифма для вычислений

Исторически развитие теории логарифмов было связано с необходимостью выполнять громоздкие вычисления. Например, пусть надо возвести число 7 в пятисотую степень, то есть вычислить величину 7^500. Сделать напрямую это довольно затруднительно. Однако в силу основного логарифмического тождества мы можем записать, что

$$7^{500} = 10^{\log_{10} 7^{500}}$$

Напомним, что десятичный логарифм обозначают символом lg, поэтому перепишем это равенство в более привычном виде: $7^{500} = 10^{\lg 7^{500}}$

Степень из-под знака логарифма можно вынести:

$$\lg 7^{500} = 500 \lg 7$$

Значение числа lg 7 можно узнать с помощью калькулятора, в древности же использовали специальные таблицы, в которых были указаны десятичные логарифмы всех чисел от 1 до 10 (с маленьким шагом, равным, например, 0,001). Так или иначе, можно узнать, что

$$\lg 7 \approx 0{,}845098$$

но тогда

$$\lg 7^{500} = 500 \lg 7 \approx 500 \bullet 0{,}845098 = 422{,}549$$

Вернемся к выражению 7^{500}:

$$7^{500} = 10^{\lg 7^{500}} \approx 10^{422{,}549} = 10^{422} \bullet 10^{0{,}549}$$

Значение величины $10^{0{,}549}$ в древности также вычисляли с помощью табличек. Мы же с помощью калькулятора узнаем, что

$$10^{0{,}549} \approx 3{,}54$$

Окончательно степень 7^{500} вычисляется так:

$$7^{500} \approx 10^{0{,}549} \bullet 10^{422} \approx 3{,}54 \bullet 10^{422}$$

Получили число, записанное в стандартном виде. При этом наши расчеты были относительно простыми, если сравнить их с необходимостью умножить число 7 само на себя 500 раз. Аналогично и многие другие сложные операции выполняются значительно быстрее, если используются логарифмы. Поэтому долгое время знание теории логарифмов было необходимо для выполнения сложных инженерных расчетов. Но сегодня развитие компьютерной техники позволило избавиться от необходимости использования логарифмических линеек и таблиц.

Логарифмическая функция в природе и науке

Логарифм – это не просто инструмент для выполнения сложных операций. Например, в теории вероятностей существуют логарифмическое и логнормальное (от слов «логарифм» и «нормальное») распределение случайных величин, которые используются в генетике и физике. Так, размеры астероидов в Солнечной системе описываются логарифмическим распределением, а размеры градин во время града – логнормальным.

В компьютерной технике многие величин можно вычислить с использованием логарифмов. Например, ясно, что чем больше телефонных номеров находится в базе данных, тем дольше компьютер будет искать требуемый необходимый номер в ней. Зависимость времени поиска от количества номеров в базе данных описывается логарифмической функцией.

Огромное значение логарифмы имеют в астрономии. Так, яркость звезд на небе характеризуется таким параметром, как «видимая звездная величина». Однако в физике для оценки яркости света используют величину «освещенность», измеряемую в люксах. Зависимость между освещенностью звезд и их видимой величиной также является логарифмической.

Используются логарифмы и в термодинамике для вычисления такой характеристики систем, как энтропия. При расчете количества топлива, необходимого ракете для набора определенной скорости, используется формула Циолковского, содержащая натуральный логарифм: $V = I \bullet \ln (M_1/M_2)$

В биологии давно замечено, что зависимость человеческих ощущений от силы воздействующих на них факторов окружающей среды носит логарифмический характер. В связи с этим для измерения громкости звуков используется специальная шкала децибелов, которая является логарифмической.

В строении ряда организмов можно обнаружить логарифмические кривые. Классическим примером является форма некоторых ракушек.

Спасибо

за внимание!