

§5. Тригонометрические ряды Фурье

Замечание. Пусть $f : R \rightarrow R$ имеет период T . Тогда её естественно представлять в виде суммы T -периодических функций:

$$\sin \frac{2\pi n x}{T} = \sin \frac{2\pi n}{T}(x + T); \quad \cos \frac{2\pi n x}{T}.$$

Теорема 1 (коэффициенты Эйлера-Фурье).

Пусть $f : R \rightarrow R$ – T -периодическая функция, $T = 2l$.

Пусть $\forall x \in R$

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{l} + B_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \quad (1)$$

причем ряд сходится равномерно на $[-l; l]$.

Тогда

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad \forall n \in N \\ A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство приведем на лекции.

Определение 1. Пусть $f : R \rightarrow R$ – T -периодическая функция, $T = 2l$, $f \in L(-l; l)$.

Тогда ряд $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{l} + B_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$, где A_0, A_n, B_n

найдены по (2), называется **тригонометрическим рядом Фурье для f** .

Замечание 2. Если g задана на $(a; b)$, $b - a = 2l$, то можно рассматривать $f = \tilde{g}$ – $2l$ -периодическое продолжение функции g , и построить ряд Фурье для f .

Обязательное требование: $g \in L(a; b)$.

При этом $\int_{-l}^l f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ силу периодичности f , поэтому

$$A_n = \frac{1}{l} \int_a^b g(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad B_n = \frac{1}{l} \int_a^b g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Замечание 3. Для удобства записей мы будем рассматривать только случай $T = 2\pi$.

Тогда

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

$$A_n = a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx;$$

$$B_n = b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Теорема 2 (Интегральное представление частичных сумм тригонометрического ряда Фурье).

Пусть $f \in L(-\pi; \pi)$, $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Тогда $\forall x \in R$

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin \frac{(2N+1)(x-x_0)}{2}}{2 \sin \frac{x-x_0}{2}} dx \quad (3)$$

или

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \frac{\sin \frac{(2N+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (4)$$

Доказательство приведем на лекции.

Теорема 3 (Теорема Римана-Лебега о поведении коэффициентов Эйлера-Фурье).

Пусть $g \in L(a; b)$.

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos(px) dx = 0; \quad (5)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin(px) dx = 0. \quad (6)$$

Доказательство приведем на лекции.