§5. Тригонометрические ряды Фурье

Замечание. Пусть $f: R \to R$ имеет период T. Тогда её естественно представлять в виде суммы T-периодических функций:

$$\sin\frac{2\pi nx}{T} = \sin\frac{2\pi n}{T}(x+T);\ \cos\frac{2\pi nx}{T}.$$

Теорема 1 (коэффициенты Эйлера-Фурье).

Пусть $f: R \to R$ – T-периодическая функция, $T = 2l$.

Пусть $\forall x \in R$

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi nx}{l} + B_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{1}$$

причем ряд сходится равномерно на $[-l;l]$.

Тогда

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx;\ \forall n \in N \\ A_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx; \quad B_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство приведем на лекции.

Определение 1. Пусть $f: R \to R$ – T-периодическая функция, $T = 2l$, $f \in L(-l;l)$.

Тогда ряд $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n x}{l} + B_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$, где A_0, A_n, B_n найдены по (2), называется **тригонометрическим рядом Фурье для** ***f***.

Замечание 2. Если g задана на $(a;b)$, $b - a = 2l$, то можно рассматривать $f = \tilde{g}$ – $2l$-периодическое продолжение функции g, и построить ряд Фурье для f.

Обязательное требование: $g \in L(a;b)$.

При этом $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{a}^{b} g(x)dx$ силу периодичности f, поэтому

$$A_n = \frac{1}{l}\int_a^b g(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx; \quad B_n = \frac{1}{l}\int_a^b g(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Замечание 3. Для удобства записей мы будем рассматривать только случай $T = 2\pi$.

Тогда

$$A_0 = \frac{a_0}{2},\ \ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$A_n = a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx;$$

$$B_n = b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Теорема 2 (Интегральное представление частичных сумм тригонометрического ряда Фурье).

Пусть $f \in L(-\pi;\pi)$, $S_N(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$.

Тогда $\forall x \in R$

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)(x-x_0)}{2}}{2\sin\dfrac{x-x_0}{2}}dx \qquad (3)$$

или

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x_0+t) + f(x_0-t)\right)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)t}{2}}{2\sin\dfrac{t}{2}}dt. \qquad (4)$$

Доказательство приведем на лекции.

Теорема 3 (Теорема Римана-Лебега о поведении коэффициентов Эйлера-Фурье).

Пусть $g \in L(a;b)$.

Тогда

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(x)\cos(px)dx = 0; \tag{5}$$

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(x)\sin(px)dx = 0. \tag{6}$$

Доказательство приведем на лекции.