

---

Отношения эквивалентности.

Частичный порядок на множестве.

Линейный порядок на множестве.

---

# Отношение эквивалентности

- Отношения эквивалентности и отношения частичного порядка – это особые классы отношений, обладающих определенным набором свойств

**Определение.** Если бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  рефлексивно, симметрично и транзитивно, то отношение  $R$  называется отношением эквивалентности ( $\equiv$ ).

Элементы, находящиеся в отношении эквивалентности (или просто эквивалентные элементы) обладают какими-либо общими признаками.

## Примеры отношений эквивалентности

Отношение равенства « $=$ » на множестве чисел.

Отношение подобия на множестве фигур плоскости. Например, на множестве треугольников подобные треугольники «имеют те же углы, что и ...». Отношение подобия на множестве треугольников является отношением эквивалентности, так как: каждый треугольник подобен сам себе (рефлексивность); если один треугольник подобен другому, то и наоборот (симметричность); если один треугольник подобен второму, а второй третьему, то первый подобен третьему (транзитивность).

Отношение «иметь одинаковые остатки при делении на натуральное число  $m$ » на множестве целых чисел является отношением эквивалентности. Иными словами это «отношение сравнимости по модулю  $m$ ».

Отношение «принадлежать одному виду» на множестве животных.

Отношение «быть родственниками» на множестве людей.

Отношение «быть одного роста» на множестве людей.

---

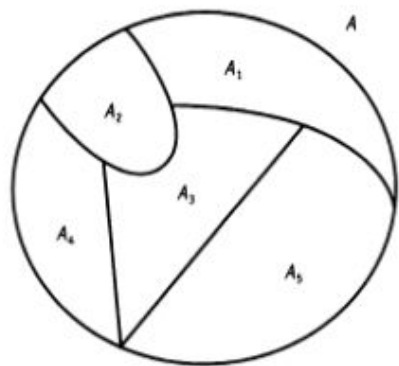
## Эквивалентность – основа классификаций

- Всякое отношение эквивалентности осуществляет разбиение множества, в котором оно определено, на классы (т.е. на непересекающиеся подмножества), внутри которых элементы эквивалентны друг другу. Часто отдельные классы воспринимаются нами как новые объекты, понятия.
  - Применение отношений эквивалентности и разбиение множеств на классы эквивалентности является основой любой классификации.
-

**Определение.** Разбиением множества  $A$  называется совокупность непустых подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  множества  $A$ , удовлетворяющих следующим требованиям:

- 1)  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ;
- 2)  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

Сами подмножества  $A_i$  называют классами или блоками разбиения. Диаграмма Венна разбиения множества  $A$  на 5 блоков. Блоки между собой не пересекаются, т.к. по условию  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .



---

«Определить некоторое отношение эквивалентности между элементами множества  $A$ » значит разбить множество  $A$  на непересекающиеся классы и считать эквивалентными только те элементы, которые попали в один и тот же класс.

Любые два элемента одного класса находятся в отношении  $R$ , а любые два элемента из различных классов не находятся в отношении  $R$ .

Так как пересечение отношений эквивалентности тоже является отношением эквивалентности, то это позволяет сводить классификацию по нескольким признакам к классификации по одному сложному признаку.

---

Классом эквивалентности, порожденным элементом  $x$ , называется множество всех элементов из  $A$ , вступающих с  $x$  в отношение эквивалентности. Поэтому иногда класс эквивалентности записывают так:  $E_x = \{z \in A : zRx\}$  и читают следующим образом: классом эквивалентности, порожденным элементом  $x$  является множество элементов  $z$  из  $A$ , которые находятся в отношении  $R$  с элементом  $x$ .

Фактор-множеством множества  $A$  по отношению эквивалентности  $R$  называется множество всех различных классов эквивалентности, которое обозначается  $A/R$  (например, {форма, цвет, размер}). Мощность фактор-множества  $|A/R|$  называется индексом разбиения, порожденного отношением  $R$ .

## Отношения частичного порядка

Частичный порядок важен в тех ситуациях, когда мы хотим охарактеризовать старшинство, т.е. когда при каких-то условиях один элемент множества превосходит другой.

**Определение.** Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется частичным порядком (или нестрогим порядком). Множества с частичным порядком принято называть частично упорядоченными.

Примеры частичного порядка.

- Отношение нестрого неравенства « $\leq$ » на множестве  $R$  вещественных чисел – частичного порядка, т.к. оно рефлексивно ( $x \leq x$ ); антисимметрично (если  $x \leq y$ , а  $y \leq x$ , то  $x = y$ ); транзитивно ( $x \leq y$  и  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ).



---

- Отношение « $x$  делит  $y$ » на множестве натуральных чисел, т.к. оно рефлексивно ( $x/x$  для всех  $x$ ); антисимметрично (если  $y/x$  и  $x/y$ , то  $x=y$ ); транзитивно ( $y/x$  и  $z/y$ , то  $z/x$ , что легко доказывается через  $n$  и  $m$ ).

- Отношение включения « $\subseteq$ » на подмножествах универсального множества. Т.е. мы рассматриваем подмножества  $2^X$  некоторого множества  $X$  и на них вводим отношение включения. Т.е. подмножества  $A$  и  $B$  находятся в отношении включения, если  $A \subseteq B$ . Здесь важно, что есть возможность равенства, т.к. в этом случае появляется возможность рефлексивности  $A \subseteq A$ ; кососимметричность:  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ; транзитивность:  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq S \Rightarrow A \subseteq S$

---

Пусть на множестве  $A$  определено отношение частичного порядка  $R$ . Тогда для пары  $x \neq y$ , которые находятся в отношении  $xRy$ , элемент  $x$  называется предшествующим элементом (предшественником), а элемент  $y$  - последующим.

Но у элемента  $y$  может быть много предшественников. Поэтому следует различать просто предшественников и непосредственного предшественника.

**Определение.** Элемент  $x$  является непосредственным предшественником элемента  $y$  ( $x \prec y$ ) (также говорят, что  $x$  покрывает  $y$ ) в том случае, когда  $x$  предшествует  $y$ , и не существует таких элементов  $z$ , для которых  $xRz$  и  $zRy$ .

## Диаграмма Хассе (Гессе)

Для графического изображения предшественников используют специальный граф, который называют диаграмма Хассе (Гессе). Вершины диаграммы Хассе изображают элементы частично упорядоченного множества  $A$ , и, если  $x \prec y$ , то вершина  $x$  помещается ниже вершины  $y$  и соединяется с ней ребром. По диаграмме Хассе можно получить полную информацию об исходном частичном порядке, если подняться по всем цепочкам ребер.

# Пример\*

Отношение « $x$  делитель  $y$ » определяет частичный порядок на множестве  $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ . Нам нужно построить таблицу предшественников и непосредственных предшественников. А затем построить диаграмму Хассе. Таблицу будем строить по элементам (т.е. по очереди каждый элемент рассматривать в качестве  $y$  и проверять какие элементы являются его делителями). Алгоритм проверки: берем какой-то  $y$  и всех его предшественников  $x$ ; проверяем делит ли  $x$  следующий  $x$  (т.е.  $z$ ), который в свою очередь делит  $y$ , т.е. ищем посредника.

---

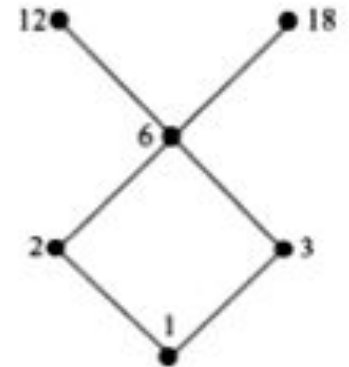
---

<b>Элемент (y)</b>	<b>Предшественник, т.е. x, который делит y (<math>x \neq y, y/x</math>)</b>	<b>Непосредст- венный предшест- венник</b>	<b>Комментарий</b>
1			
2			
3			
6			
12			
18			

---

Элемент (y)	Предшественник, т.е. x, который делит y ( $x \neq y, y/x$ )	Непосредственный предшественник	Комментарий
1	Нет	Нет	
2	1	1	посредников нет
3	1	1	посредников нет
6	1,2,3	2,3	1 делит 2, а 2 делит 6, следовательно, 1 не является непосредственным предшественником
12	1,2,3,6	6	1 делит и 1 и 2 и 3 и 6, а те в свою очередь делят 12
18	1,2,3,6	6	

При построении диаграммы Хассе предшественников рисуем ниже элемента, которому они предшествуют и соединяем ребром только непосредственных предшественников



---

## Линейный порядок на множестве

**Определение.** Отношение частичного порядка на множестве  $A$ , при котором из любой пары элементов можно выделить предшествующий и последующий, называется линейным порядком на множестве  $A$ .

Иными словами то же определение: когда любые два элемента сравнимы между собой либо в одну сторону, либо в другую, т.е. когда верно либо  $R(a,b)$  либо  $R(b,a)$ , то такое отношение называется линейным порядком, а само множество, на котором оно задано, называется линейно-упорядоченным множеством (или вполне упорядоченным множеством) или цепью.

Т.е. если все пары элементов множества  $A$  сравнимы относительно порядка  $R$ , то порядок  $R$  называется линейным.

---

Примером цепи является множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , на котором определено отношение « $\leq$ », представляющее собой линейный порядок.

Можно сказать, что линейный порядок – это особый случай частичного порядка.

В примере (\*) множество  $A$  частично упорядоченное (ЧУМ), но не линейного порядка (т.к. не все пары можно расставить по порядку). Но в нем есть несколько линейно упорядоченных подмножеств относительно отношения « $x$  делит  $y$ », каждому из которых соответствует цепочка ребер на диаграмме Хассе:  $\{1,2,6,18\}$ ,  $\{1,3,6,12\}$ ,  $\{1,2,6,12\}$ ,  $\{1,3,6,18\}$ .

Также примером линейного порядка является лексикографическое (алфавитное) упорядочение слов в словаре. А сам порядок слов, удовлетворяющий этому отношению (лексикографическому упорядочению), является цепью.



---

## Применение частичного порядка

Данный аспект дискретной математики широко используется в сортирующих процедурах. Некоторые из сортирующих процедур требуют, чтобы элементы сортируемых множеств были линейно упорядочены. В этом случае они могут выдавать упорядоченный список.

Другие приложения используют частичный порядок, предполагая, что в любом частично упорядоченном множестве найдется минимальный элемент (не имеющий предшественников) и максимальный элемент (не имеющий последующих элементов).

В примере (\*) в частично упорядоченном множестве  $A$  есть один минимальный элемент – единица, и два максимальных – 12 и 18.

---

# Строгое частичное упорядочение

Сочетание свойств: иррефлексивность и транзитивность, дает нам строгое частичное упорядочение.

- Отношение строго неравенства « $<$ » на множестве вещественных чисел  $\mathbb{R}$ .

Оно иррефлексивно, т.к. не может быть  $x < x$  и оно транзитивно, т.к.  $x < y$  и  $y < z$  следовательно  $x < z$ .

- Строгое включение на множестве подмножеств  $2^X$  некоторого множества  $X$ .

Часто пишут так  $A \underset{\neq}{\subset} B$ , подчеркивая, что это строгое включение и  $A \neq B$ .

Т.е. мы рассматриваем все подмножества множества  $X$  и про любые два

можем сказать, что либо  $A \underset{\neq}{\subset} B$  либо наоборот  $B \underset{\neq}{\subset} A$  для всех  $A, B \subseteq X$ . Оно

иррефлексивно, т.к. множество не есть свое подмножество, не совпадающее

с собой, и оно транзитивно.