Отношения эквивалентности. Частичный порядок на множестве. Линейный порядок на множестве.

Отношение эквивалентности

- Отношения эквивалентности и отношения частичного порядка – это особые классы отношений, обладающих определенным набором свойств

Определение. Если бинарное отношение R на множестве A рефлексивно, симметрично и транзитивно, то отношение R называется отношением эквивалентности (≡).

Элементы, находящиеся в отношении эквивалентности (или просто эквивалентные элементы) обладают какими-либо общими признаками.

Примеры отношений эквивалентности

Отношение равенства «=» на множестве чисел.

Отношение подобия на множестве фигур плоскости. Например, на множестве треугольников подобные треугольники «имеют те же углы, что и …». Отношение подобия на множестве треугольников является отношением эквивалентности, так как: каждый треугольник подобен сам себе (рефлексивность); если один треугольник подобен другому, то и наоборот (симметричность); если один треугольник подобен второму, а второй третьему, то первый подобен третьему (транзитивность).

Отношение «иметь одинаковые остатки при делении на натуральное число *m*» на множестве целых чисел является отношением эквивалентности. Иными словами это «отношение сравнимости по модулю *m*».

Отношение «принадлежать одному виду» на множестве животных.

Отношение «быть родственниками» на множестве людей.

Отношение «быть одного роста» на множестве людей.

Эквивалентность – основа классификаций

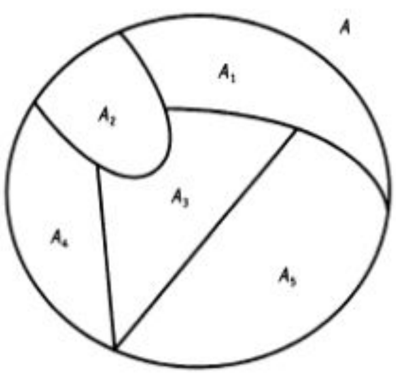
- Всякое отношение эквивалентности осуществляет разбиение множества, в котором оно определено, на классы (т.е. на непересекающиеся подмножества), внутри которых элементы эквивалентны друг другу. Часто отдельные классы воспринимаются нами как новые объекты, понятия.
- Применение отношений эквивалентности и разбиение множеств на классы эквивалентности является основой любой классификации.

Определение. Разбиением множества A называется совокупность непустых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ множества A, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$;

2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Сами подмножества A_i называют классами или блоками разбиения. Диаграмма Венна разбиения множества A на 5 блоков. Блоки между собой не пересекаются, т.к. по условию $A_i \cap A_j = \varnothing$.



«Определить некоторое отношение эквивалентности между элементами множества *A*» значит разбить множество *A* на непересекающиеся классы и считать эквивалентными только те элементы, которые попали в один и тот же класс.

Любые два элемента одного класса находятся в отношении *R, а* любые два элемента из различных классов не находятся в отношении *R*.

Так как пересечение отношений эквивалентности тоже является отношением эквивалентности, то это позволяет сводить классификацию по нескольким признакам к классификации по одному сложному признаку.

Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется множество всех элементов из A, вступающих с x в отношение эквивалентности. Поэтому иногда класс эквивалентности записывают так: $E_x = \{z \in A : zRx\}$ и читают следующим образом: классом эквивалентности, порожденным элементом x является множество элементов z из A, которые находятся в отношении R с элементом x.

Фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности R называется множество всех различных классов эквивалентности, которое обозначается A/R (например, {форма, цвет, размер}). Мощность фактор-множества $|A/R|$ называется индексом разбиения, порожденного отношением R.

Отношения частичного порядка

Частичный порядок важен в тех ситуациях, когда мы хотим охарактеризовать старшинство, т.е. когда при каких-то условиях один элемент множества превосходит другой.

Определение. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение R на множестве A называется частичным порядком (или нестрогим порядком). Множества с частичным порядком принято называть частично упорядоченными.

Примеры частичного порядка.

- Отношение нестрогого неравенства «$\leq$» на множестве R вещественных чисел – частичного порядка, т.к. оно рефлексивно ($x \leq x$); антисимметрично (если $x \leq y, a\ y \leq x, то\ x = y$); транзитивно ($x \leq y\ и\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$).

- Отношение «x делит y» на множестве натуральных чисел, т.к. оно рефлексивно (x/x для всех x); антисимметрично (если y/x и x/y, то $x=y$); транзитивно (y/x и z/y, то z/x, что легко доказывается через n и m).

- Отношение включения «$\subseteq$» на подмножествах универсального множества. Т.е. мы рассматриваем подмножества 2^X некоторого множества X и на них вводим отношение включения. Т.е. подмножества A и B находятся в отношении включения, если $A \subseteq B$. Здесь важно, что есть возможность равенства, т.к. в этом случае появляется возможность рефлексивности $A \subseteq A$; кососимметричность: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Rightarrow A = B$; транзитивность: $A \subseteq B$ и $B \subseteq S \Rightarrow A = S$

Пусть на множестве A определено отношение частичного порядка R. Тогда для пары $x \neq y$, которые находятся в отношении xRy, элемент x называется предшествующим элементом (предшественником), а элемент y - последующим.

Но у элемента у может быть много предшественников. Поэтому следует различать просто предшественников и непосредственного предшественника.

Определение. Элемент x является непосредственным предшественником элемента y ($x \prec y$) (также говорят, что x покрывает y) в том случае, когда x предшествует y, и не существует таких элементов z, для которых xRz и zRy.

Диаграмма Хассе (Гессе)

Для графического изображения предшественников используют специальный граф, который называют диаграмма Хассе (Гессе). Вершины диаграммы Хассе изображают элементы частично упорядоченного множества A, и, если $x \prec y$, то вершина x помещается ниже вершины y и соединяется с ней ребром. По диаграмме Хассе можно получить полную информацию об исходном частичном порядке, если подняться по всем цепочкам ребер.

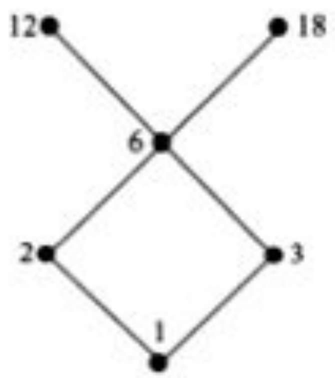
Пример*

Отношение «x делитель y» определяет частичный порядок на множестве $A=\{1,2,3,6,12,18\}$. Нам нужно построить таблицу предшественников и непосредственных предшественников. А затем построить диаграмму Хассе. Таблицу будем строить по элементам (т.е. по очереди каждый элемент рассматривать в качестве y и проверять какие элементы являются его делителями). Алгоритм проверки: берем какой-то y и всех его предшественников x; проверяем делит ли x следующий x (т.е. z), который в свою очередь делит y, т.е. ищем посредника.

Элемент (y)	Предшественник, т.е. x, который делит y $(x \neq y, y/x)$	Непосредственный предшественник	Комментарий
1			
2			
3			
6			
12			
18			

Элемент (y)	Предшественник, т.е. x, который делит y $(x \neq y, y/x)$	Непосредст-венный предшест-венник	Комментарий
1	Нет	Нет	
2	1	1	посредников нет
3	1	1	посредников нет
6	1,2,3	2,3	1 делит 2, а 2 делит 6, следовательно, 1 не является непосредственным предшественником
12	1,2,3,6	6	1 делит и 1 и 2 и 3 и 6, а те в свою очередь делят 12
18	1,2,3,6	6	

При построении диаграммы Хассе предшественников рисуем ниже элемента, которому они предшествуют и соединяем ребром только непосредственных предшественников



Линейный порядок на множестве

Определение. Отношение частичного порядка на множестве *A*, при котором из любой пары элементов можно выделить предшествующий и последующий, называется линейным порядком на множестве *A*.

Иными словами то же определение: когда любые два элемента сравнимы между собой либо в одну сторону, либо в другую, т.е. когда верно либо *R(a,b)* либо *R(b,a),* то такое отношение называется линейным порядком, а само множество, на котором оно задано, называется линейно-упорядоченным множеством (или вполне упорядоченным множеством) или цепью.

Т.е. если все пары элементов множества А сравнимы относительно порядка *R*, то порядок *R* называется линейным.

Примером цепи является множество вещественных чисел R, на котором определено отношение «≤», представляющее собой линейный порядок.

Можно сказать, что линейный порядок – это особый случай частичного порядка.

В примере (*) множество А частично упорядоченное (ЧУМ), но не линейного порядка (т.к. не все пары можно расставить по порядку). Но в нем есть несколько линейно упорядоченных подмножеств относительно отношения «х делит у», каждому из которых соответствует цепочка ребер на диаграмме Хассе: {1,2,6,18}, {1,3,6,12}, {1,2,6,12}, {1,3,6,18}.

Также примером линейного порядка является лексикографическое (алфавитное) упорядочение слов в словаре. А сам порядок слов, удовлетворяющий этому отношению (лексикографическому упорядочению), является цепью.

Применение частичного порядка

Данный аспект дискретной математики широко используется в сортирующих процедурах. Некоторые из сортирующих процедур требуют, чтобы элементы сортируемых множеств были линейно упорядочены. В этом случае они могут выдавать упорядоченный список.

Другие приложения используют частичный порядок, предполагая, что в любом частично упорядоченном множестве найдется <u>минимальный</u> элемент (не имеющий предшественников) и <u>максимальный</u> элемент (не имеющий последующих элементов).

В примере (*) в частично упорядоченном множестве A есть один минимальный элемент – единица, и два максимальных – 12 и 18.

Строгое частичное упорядочение

Сочетание свойств: иррефлексивность и транзитивность, дает нам строгое частичное упорядочение.

- Отношение строго неравенства «<» на множестве вещественных чисел R. Оно иррефлексивно, т.к. не может быть $x<x$ и оно транзитивно, т.к. $x<y$ и $y<z$ следовательно $x<z$.

- Строгое включение на множестве подмножеств 2^X некоторого множеств X. Часто пишут так $A \underset{\neq}{\subset} B$, подчеркивая, что это строгое включение и $A \neq B$. Т.е. мы рассматриваем все подмножества множества X и про любые два можем сказать, что либо $A \underset{\neq}{\subset} B$ либо наоборот $B \underset{\neq}{\subset} A$ для всех $A, B \subseteq X$. Оно иррефлексивно, т.к. множество не есть свое подмножество, не совпадающее с собой, и оно транзитивно.