

**ИДЗ**

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{0,1,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ ,  $C=\{1,2,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ . Найти множества чисел  $D=\overline{A \cup B} \cup (C \cap B)$ .

## Решение.

- 1) Найдем объединение множеств  $A$  и  $B$  – множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств  $A$  или  $B$ :  
 $A \cup B = \{0,1,3,4,5,6\}$ .

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{0,1,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ ,  $C=\{1,2,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ . Найти множества чисел  $D=\overline{A \cup B} \cup (C \cap B)$ .

## Решение.

2) Найдем множество  $\overline{A \cup B}$  - множество, состоящее из элементов, дополняющих  $A \cup B$  до универсального множества  $U$ :  
 $\overline{A \cup B} = \{2, 7\}$ .

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{0,1,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ ,  $C=\{1,2,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ . Найти множества чисел  $D=\overline{A \cup B} \cup (C \cap B)$ .

## Решение.

3) Найдем пересечение множеств  $C$  и  $B$  – множество, состоящее из элементов, принадлежащих обоим множествам:

$$C \cap B = \{4,6\}.$$

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{0,1,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ ,  $C=\{1,2,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ . Найти множества чисел  $D=\overline{A \cup B} \cup (C \cap B)$ .

## Решение.

4) Найдем множество  $D=\{2,7,4,6\}$ .

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{1,2,3,5\}$ ,  $B=\{3,4,5,6,7\}$ ,  $C=\{1,3,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ . Найти множества чисел  $D=\overline{A \cup B} \cup (C \cap B)$ .

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{0,1,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ ,  $C=\{1,2,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ . Найти множества чисел  $D=(\overline{B \cap C} \setminus A) \cap (C \setminus B)$ ;  $E=\overline{A \cup C} \cup (C \cup (C \cap \overline{B}))$ .

## Решение.

$$B \cap C = \{4,6\}$$

$$\overline{B \cap C} = \{0,1,2,3,5,7\}$$

$$\overline{B \cap C} \setminus A = \{2,5,7\}$$

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{0,1,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ ,  $C=\{1,2,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ . Найти множества чисел  $D=(\overline{B \cap C} \setminus A) \cap (C \setminus B)$ ;  $E=\overline{A \cup C} \cup (C \cup (C \cap \overline{B}))$ . Являются ли  $D$  и  $E$  равными; эквивалентными; включающимися одно в другое.

$$C \setminus B = \{1, 2\}.$$

$$D = \{2\}.$$

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{0,1,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ ,  $C=\{1,2,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ . Найти множества чисел  $D=(\overline{B \cap C} \setminus A) \cap (C \setminus B)$ ;  $E=\overline{A \cup C} \cup (C \cup (C \cap \overline{B}))$ . Являются ли D и E равными; эквивалентными; включающимися одно в другое.

$$E) \quad A \cup C = \{0,1,2,3,4,6\}.$$

$$\overline{A \cup C} = \{5,7\}.$$

$$\overline{B} = \{0,1,2,7\}.$$

$$C \cap \overline{B} = \{1,2\}.$$

$$E = \{1,2,5,7\}.$$

Ответ:  $D=\{1,2,5,7\}$  и  $E=\{1,2,5,7\}$  являются равными, значит они являются эквивалентными, включающимися одно в другое.

# Алгоритм Дейкстры

**Алгоритм Дейкстры** ([англ. Dijkstra's algorithm](#)) — алгоритм на [графах](#), изобретённый нидерландским учёным [Эдсгером Дейкстрой](#) в [1959 году](#). Находит кратчайшие пути от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов без [рёбер](#) отрицательного [веса](#). Алгоритм широко применяется в программировании и технологиях, например, его используют протоколы маршрутизации [OSPF](#) и [IS-IS](#).

## Примеры

*Вариант 1.* Дана сеть автомобильных дорог, соединяющих города Московской области. Некоторые дороги односторонние. Найти кратчайшие пути от города [Москвы](#) до каждого города области (если двигаться можно только по дорогам).

*Вариант 2.* Имеется некоторое количество авиарейсов между городами мира, для каждого известна стоимость. Стоимость перелёта из А в В может быть не равна стоимости перелёта из В в А. Найти маршрут минимальной стоимости (возможно, с пересадками) от [Копенгагена](#) до [Барнаула](#).

## Задание.

Даны множества чисел  $A=\{0,1,2,4,7\}$ ,  $B=\{2,4,5,6\}$ ,  $C=\{0,2,4,6\}$  и универсальное множество  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ . Найти множества чисел  $D=(\overline{B \cap C} \setminus A) \cap (C \setminus B)$ ;  $E=\overline{A \cup C} \cup (C \cup (C \cap \overline{B}))$ . Являются ли  $D$  и  $E$  равными; эквивалентными; включающимися одно в другое.

# Алгоритм Дейкстры

Каждой вершине из  $V$  сопоставим метку — минимальное известное расстояние от этой вершины до  $a$ . Алгоритм работает пошагово — на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки.

Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены.

## Инициализация.

Метка самой вершины  $a$  полагается равной 0, метки остальных вершин — бесконечности.

Это отражает то, что расстояния от  $a$  до других вершин пока неизвестны.

Все вершины графа помечаются как непосещённые.

## Шаг алгоритма.

Если все вершины посещены, алгоритм завершается.

В противном случае, из ещё не посещённых вершин выбирается вершина  $u$ , имеющая минимальную метку.

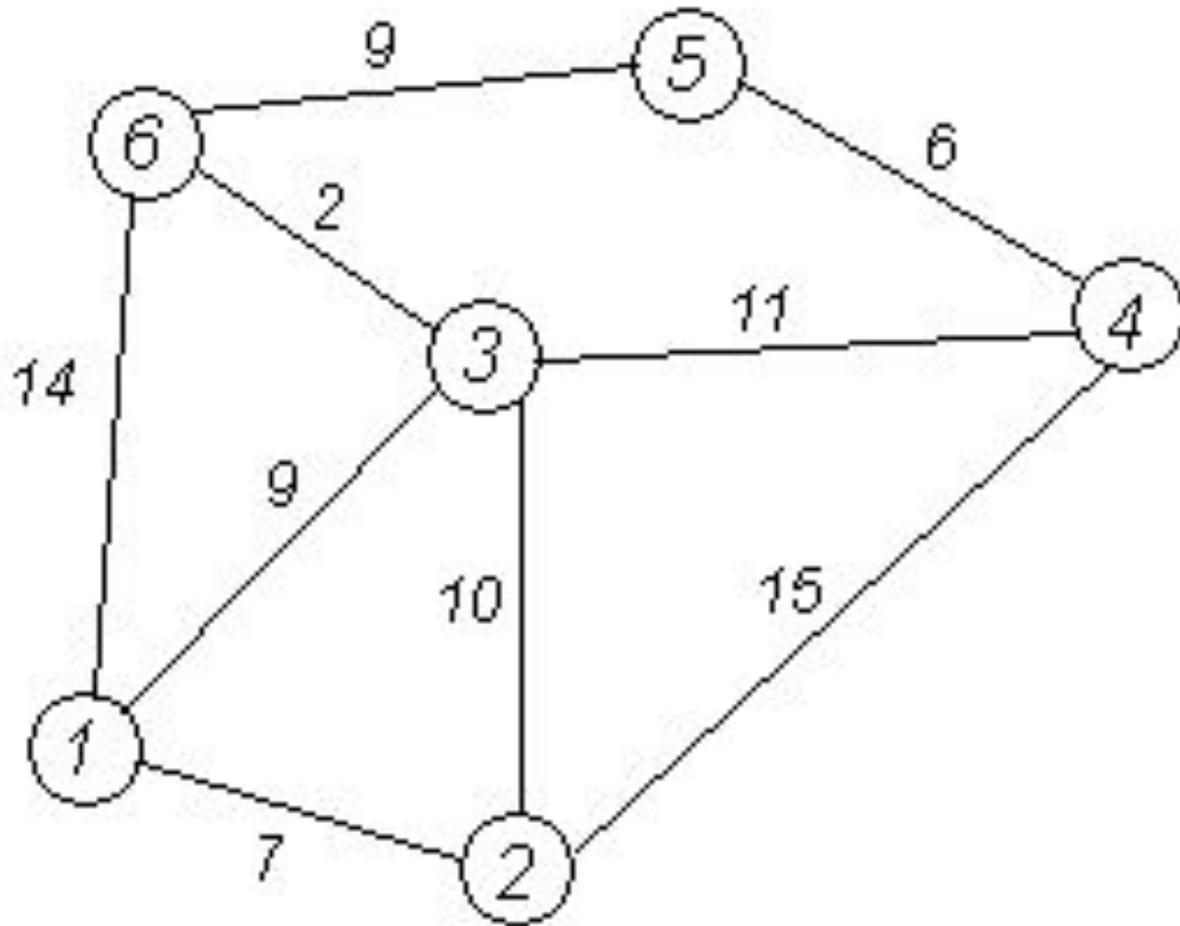
Мы рассматриваем всевозможные маршруты, в которых  $u$  является предпоследним пунктом. Вершины, в которые ведут рёбра из  $u$ , назовём *соседями* этой вершины. Для каждого соседа вершины  $u$ , кроме отмеченных как посещённые, рассмотрим новую длину пути, равную сумме значений текущей метки  $u$  и длины ребра, соединяющего  $u$  с этим соседом.

Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, заменим значение метки полученным значением длины. Рассмотрев всех соседей, пометим вершину  $u$  как посещённую и повторим [шаг алгоритма](#).

# Алгоритм Дейкстры

## Задача.

Пусть требуется найти кратчайшие расстояния от 1-й вершины до всех остальных.



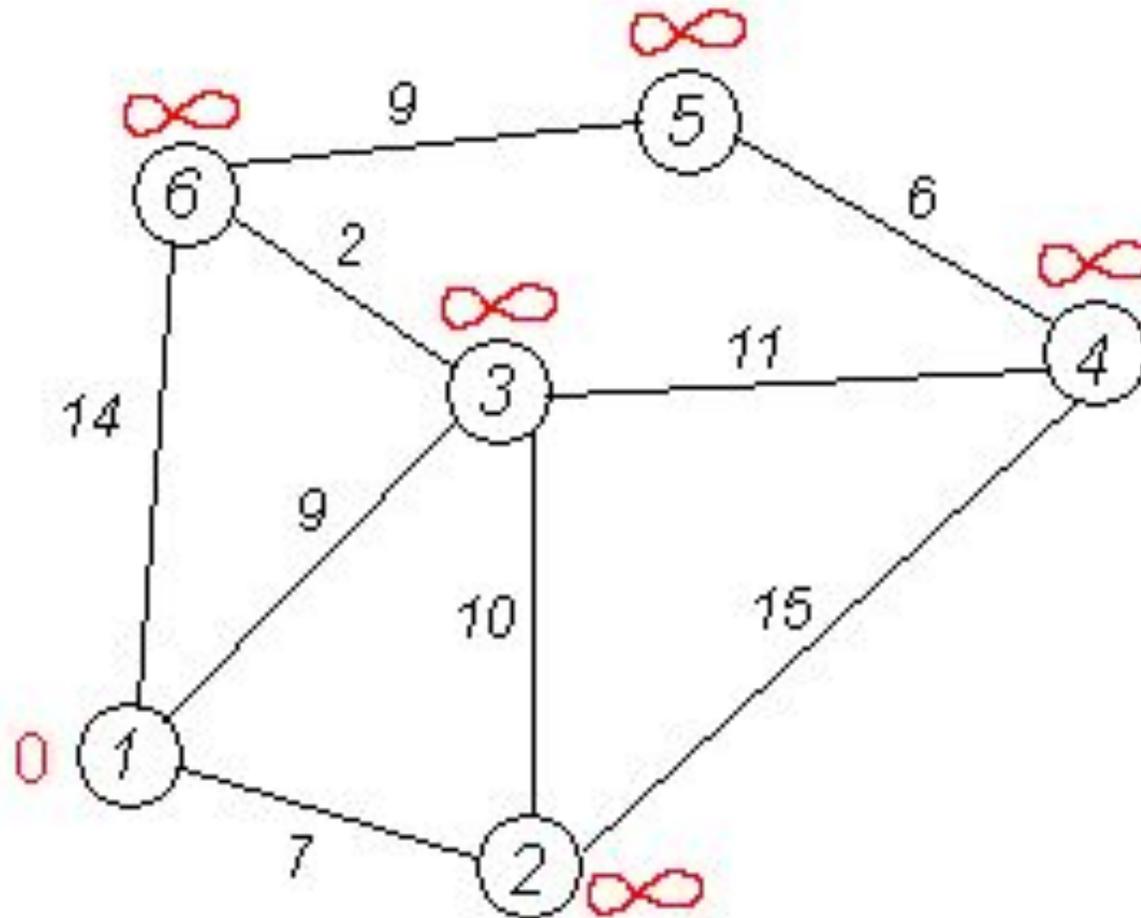
# Алгоритм Дейкстры

## Дейкстры

Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (рёбра графа).

В кружках обозначены номера вершин, над рёбрами обозначен их вес — длина пути.

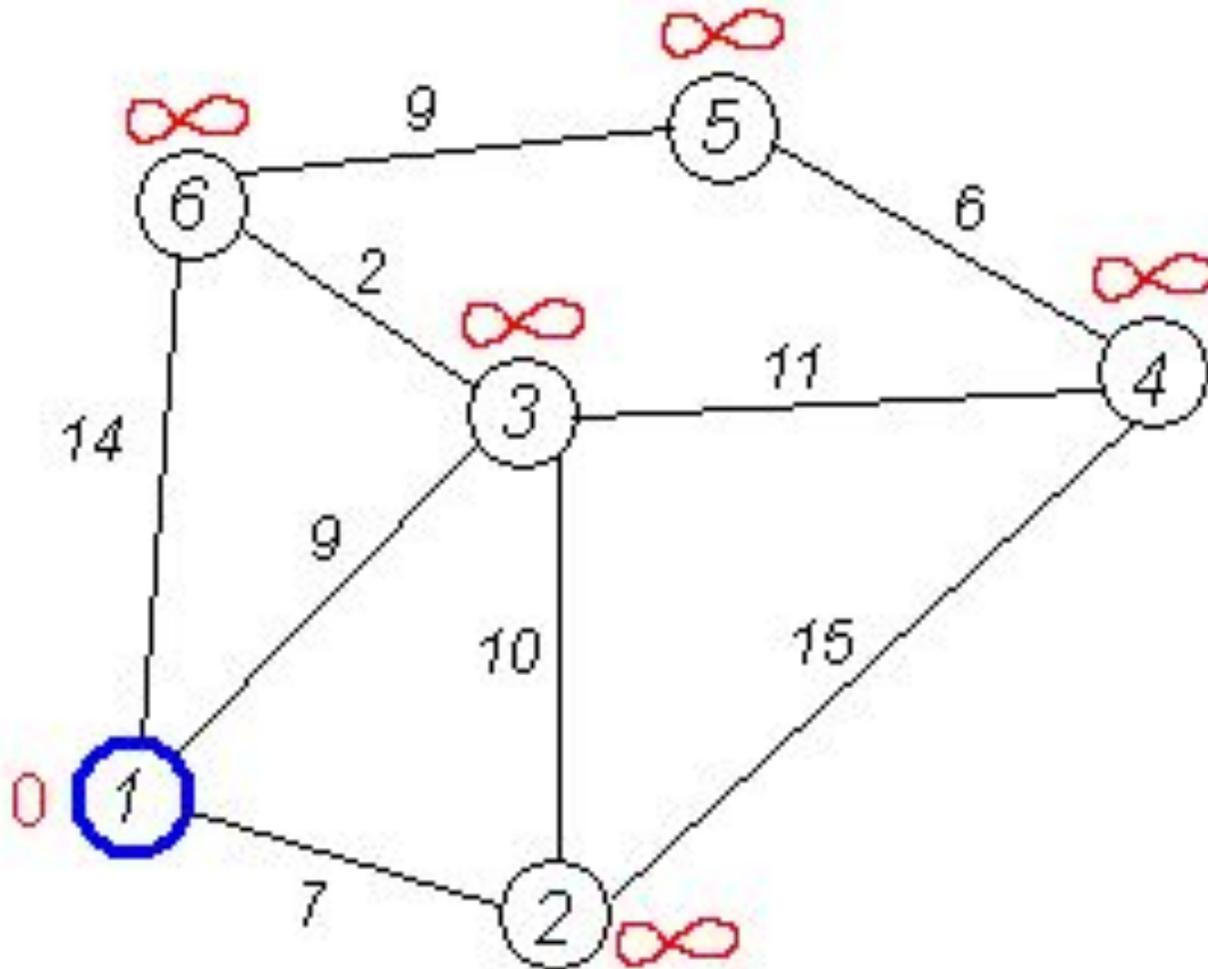
Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.



# Алгоритм Дейкстры

Первый шаг.

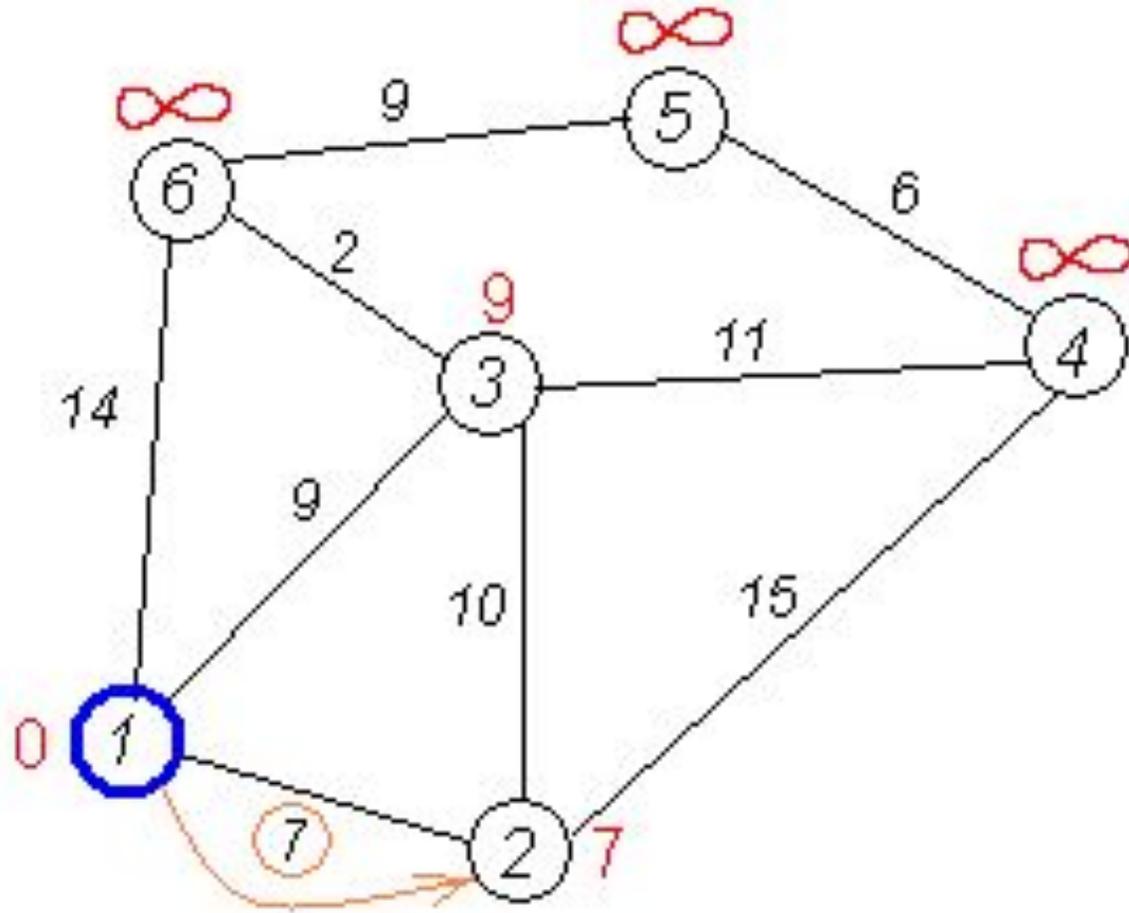
Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3 и 6.



# Алгоритм Дейкстры

Первый по очереди сосед вершины 1 — вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути в неё через вершину 1 равна сумме значения метки вершины 1 и длины ребра, идущего из 1-й в 2-ю, то есть  $0 + 7 = 7$ .

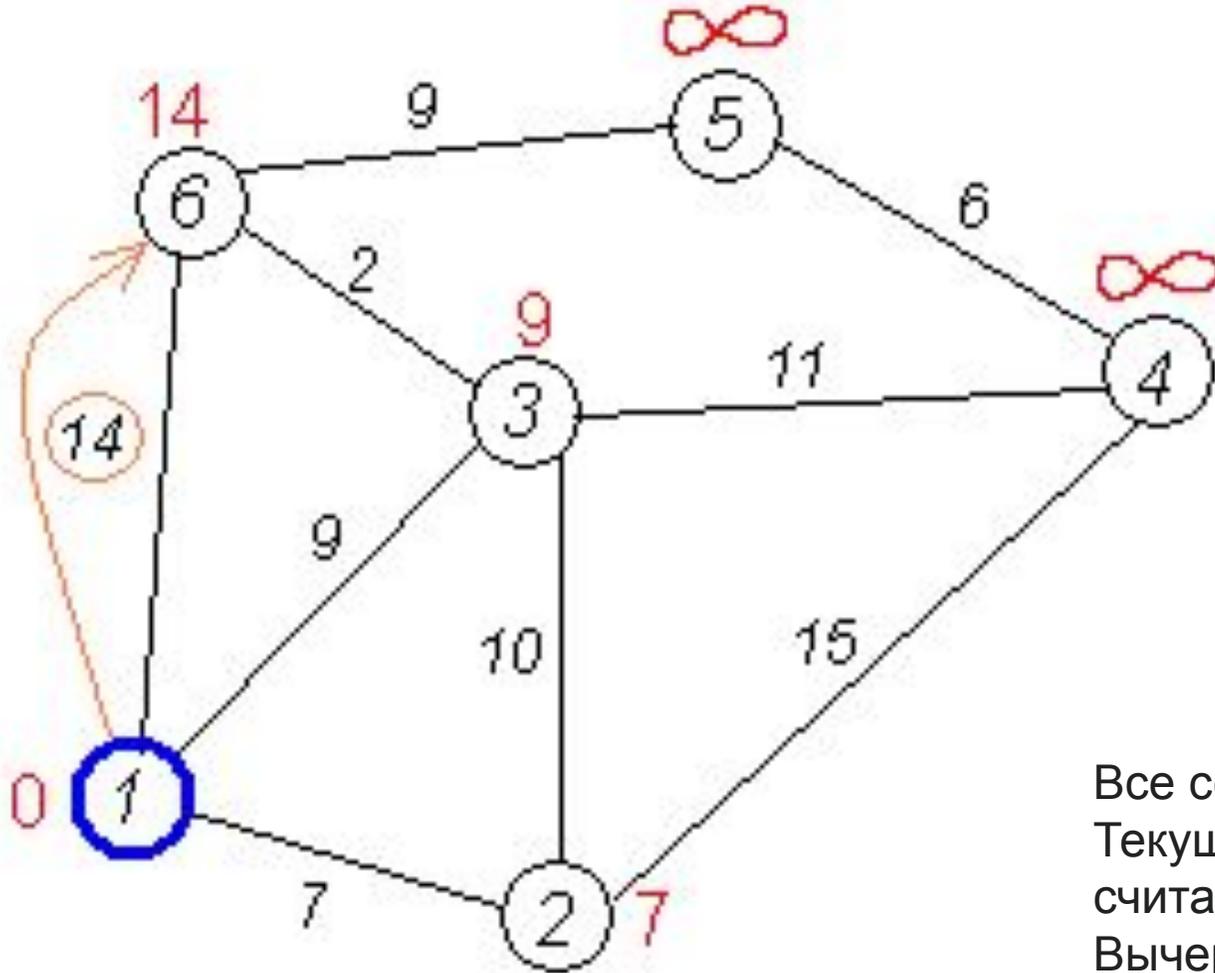
Это меньше текущей метки вершины 2, бесконечности, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7.



# Алгоритм Дейкстры

Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й и 6-й.

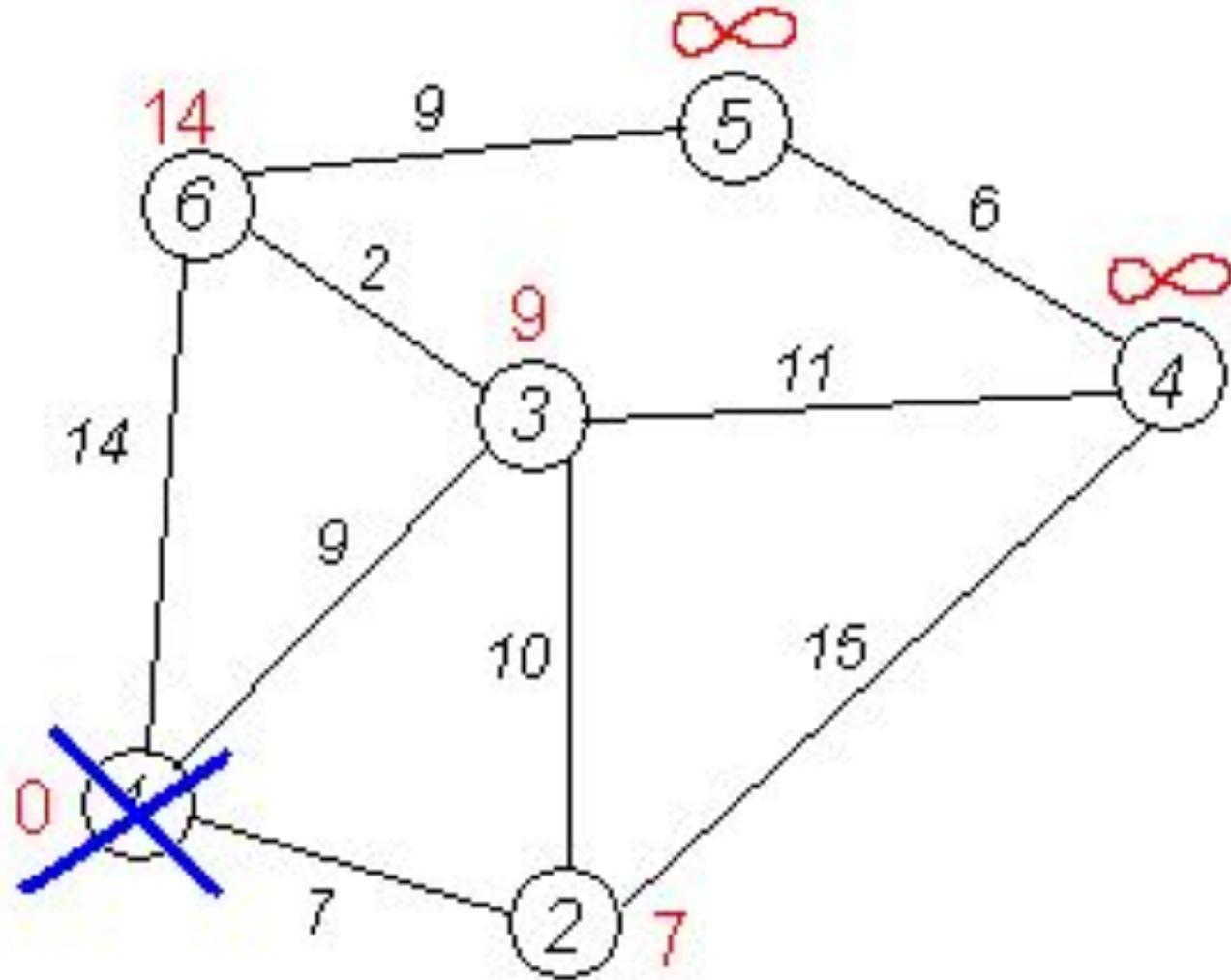
# Дейкстры



Все соседи вершины 1 проверены.  
Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит.  
Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.

# Алгоритм

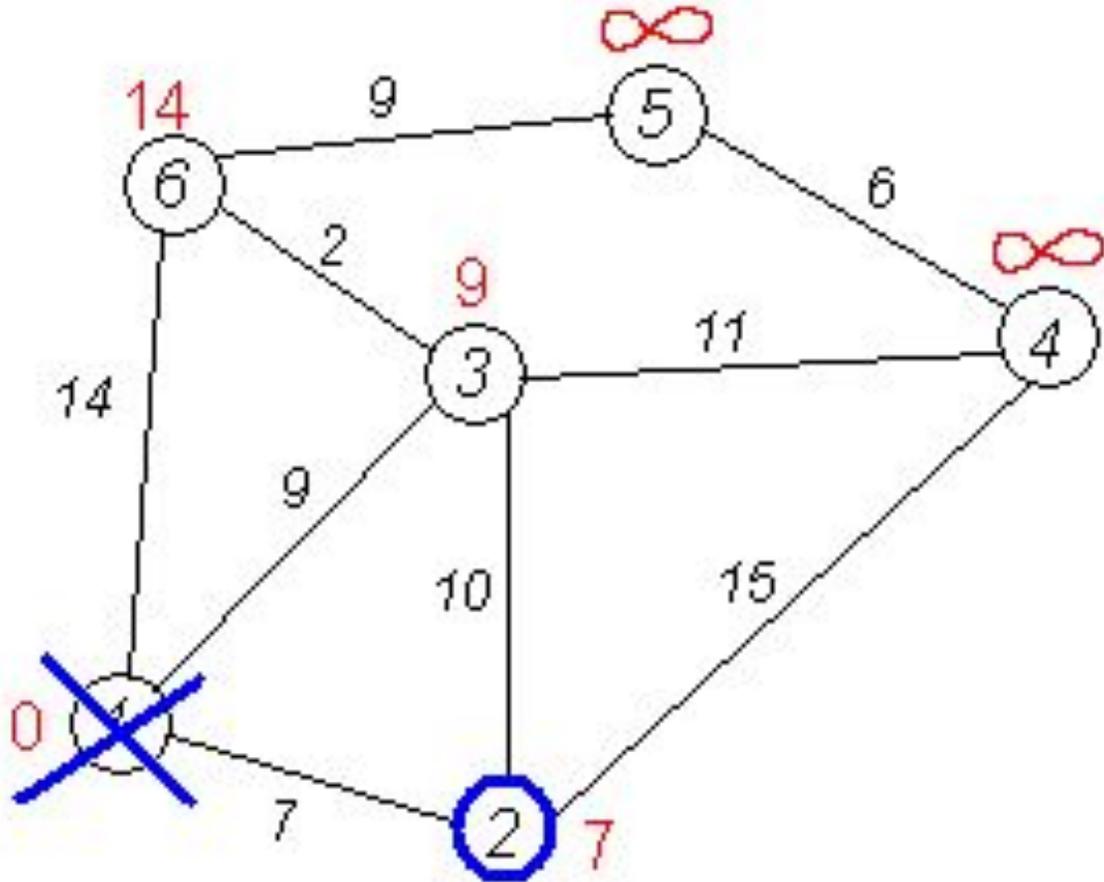
Пайкоти :



# Алгоритм Дейкстры

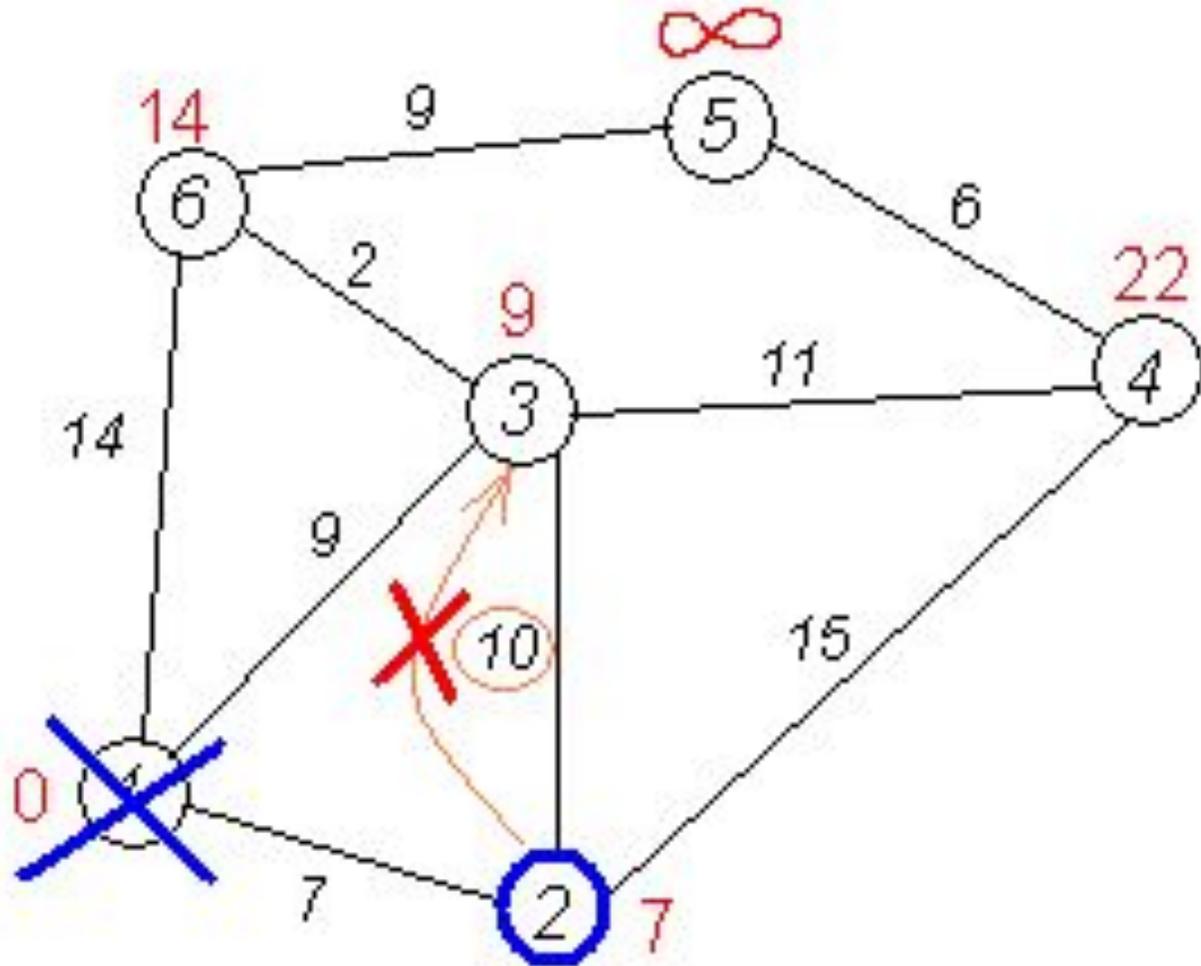
Второй шаг.

Снова находим «ближайшую» из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7.



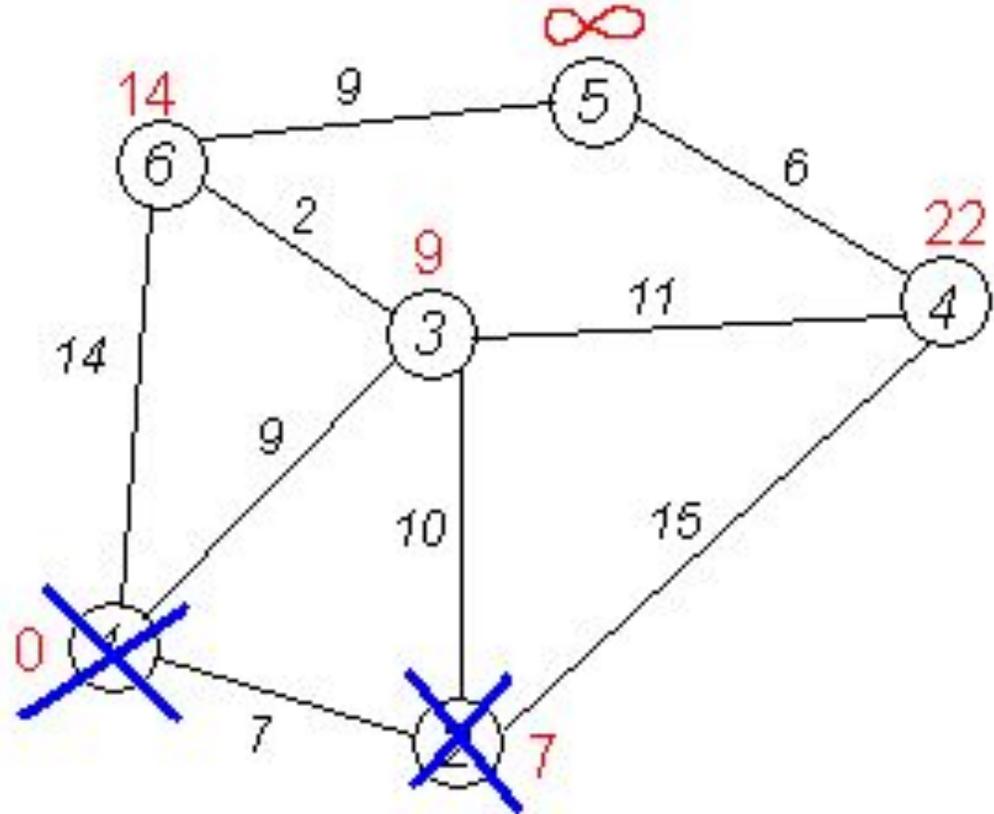
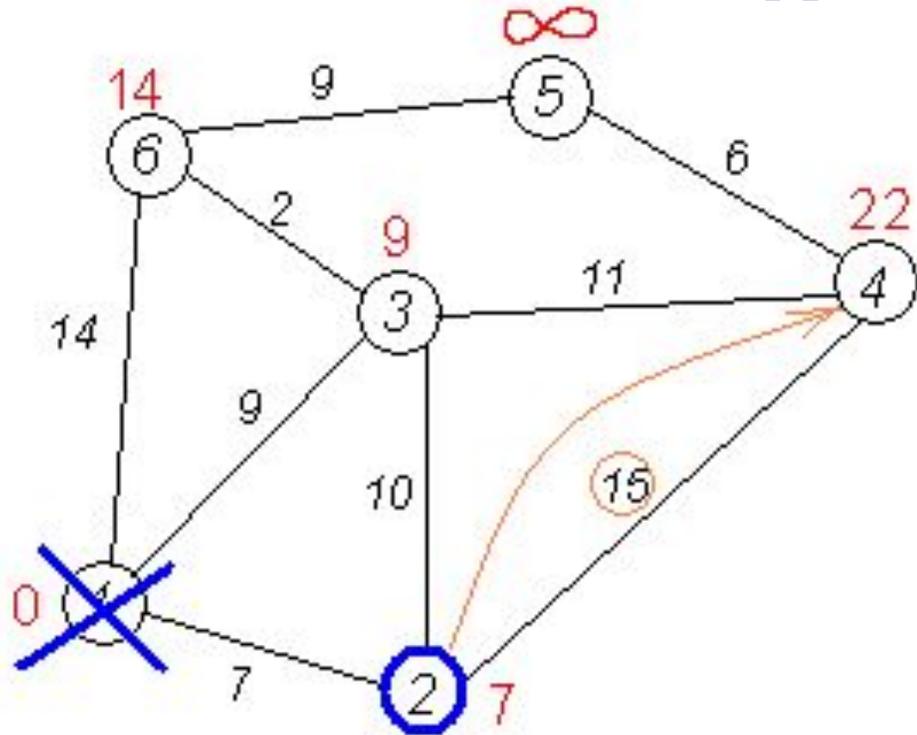
Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаемся пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются вершины 1, 3 и 4. Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем. Следующий сосед — вершина 3, так как имеет минимальную метку. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 ( $7 + 10 = 17$ ). Но текущая метка третьей вершины равна 9, а это меньше 17, поэтому метка не меняется.

# Алгоритм Дейкстры



Ещё один сосед вершины 2 — вершина 4.  
Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна сумме кратчайшего расстояния до 2-й вершины и расстояния между вершинами 2 и 4, то есть  $22$  ( $7 + 15 = 22$ ).  
Поскольку  $22 < \infty$ , устанавливаем метку вершины 4 равной  $22$ .

# Алгоритм Прайма

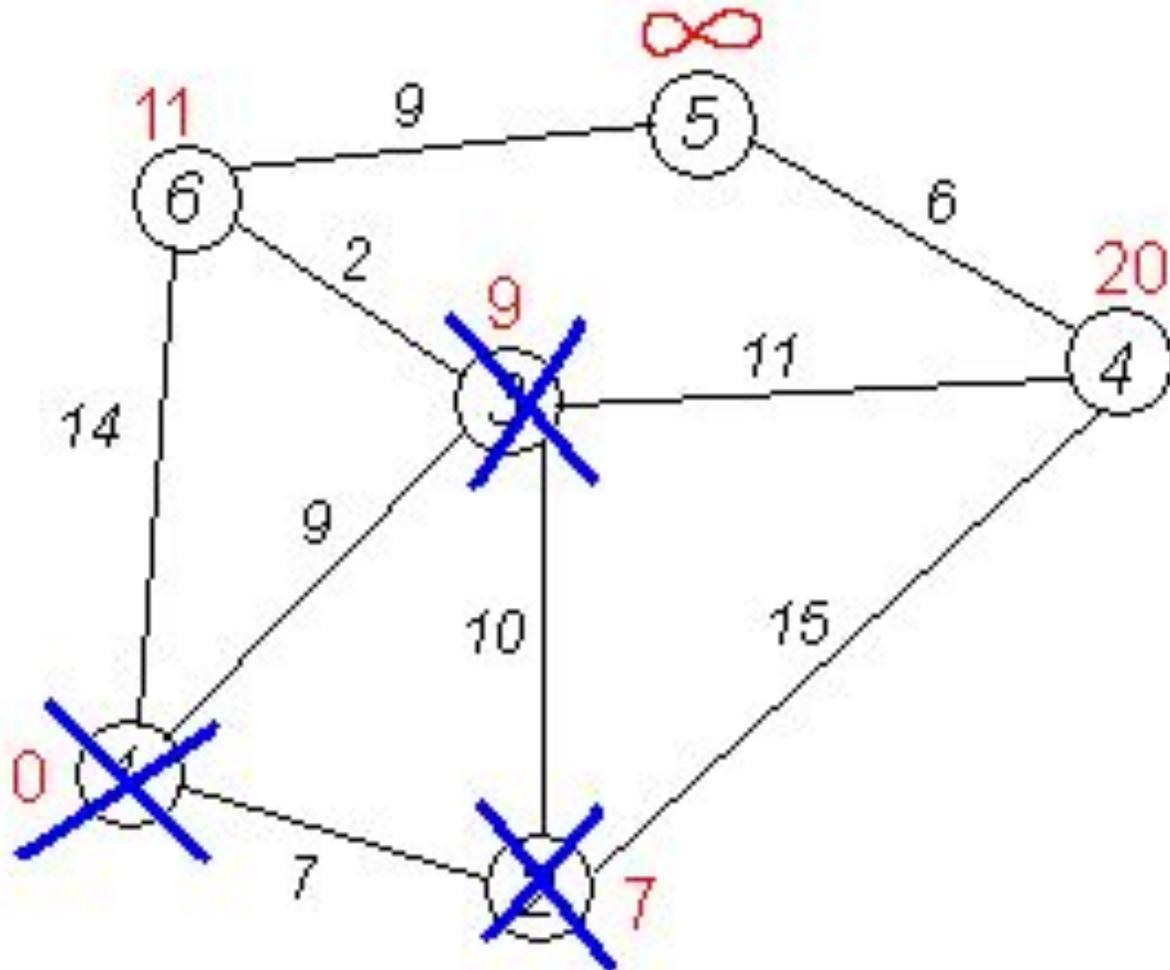


Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем её как посещённую.

# Алгоритм Дейкстры

Третий шаг.

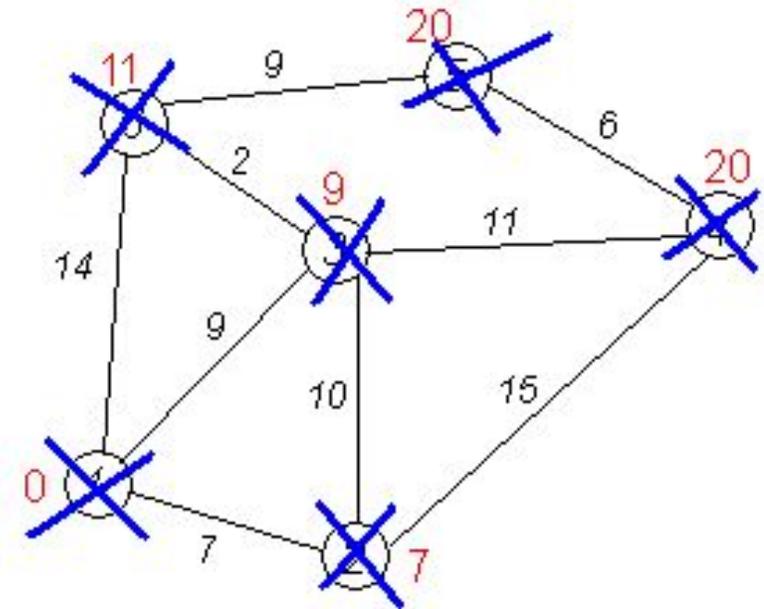
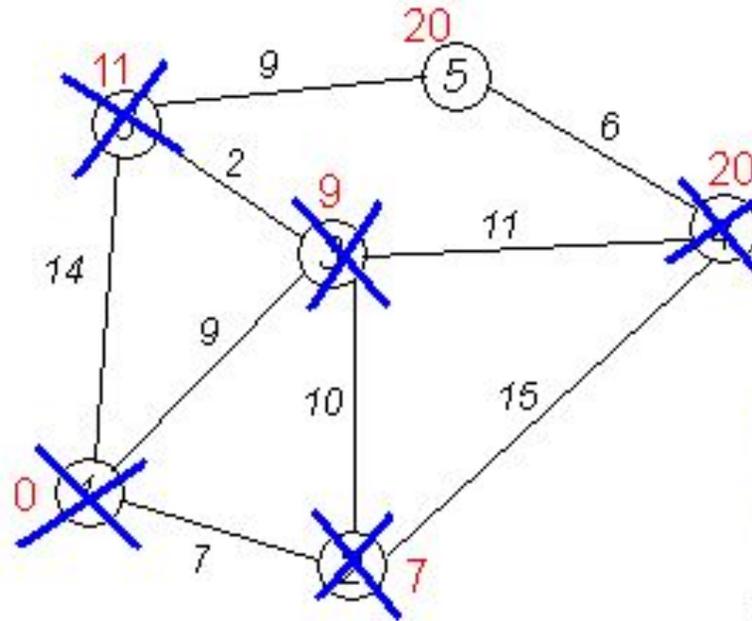
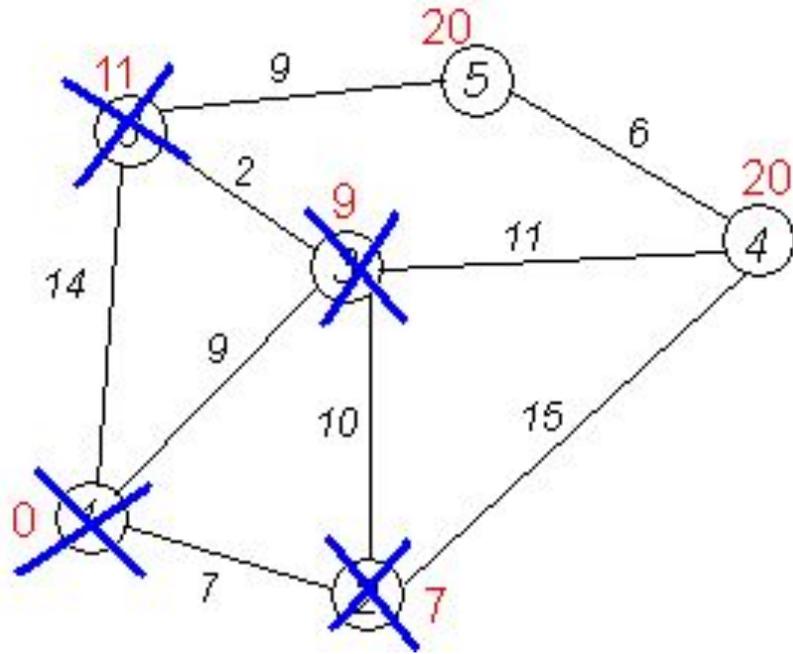
Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3. После её «обработки» получим такие результаты:



# Алгоритм Дейкстры

Дальнейшие шаги.

Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин. Это будут вершины 6, 4 и 5, соответственно порядку.



**Завершение выполнения алгоритма.**

Алгоритм заканчивает работу, когда все вершины посещены.

Результат работы алгоритма виден на последнем рисунке: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й — 20, до 6-й — 11.

# Алгоритм

