Множества и операции над ними

Основные понятия

- *Множество* – это совокупность (собрание, класс, семейство) некоторых объектов, объединённых по какому-либо признаку.
- Например, *множество* книг в библиотеке, *множество* учеников в классе, *множество* натуральных чисел N

Множества

Конечные

Бесконечные

Множество дней недели,
Множество месяцев в году

Множество точек на прямой,
Множество звезд на небе

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C… Z.

Объекты, из которых образовано множество, называются *элементами.*

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c… z.

Например: $A = \{1, 3, 15\}$

Если множество не содержит ни одного элемента, оно называется пустым и обозначается $\varnothing$

Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа $\in$ (в противном случае используется символ $\notin$).

Способы задания множеств

Равными называют два множества *A* и *B*, состоящие из одинаковых элементов: A = B.

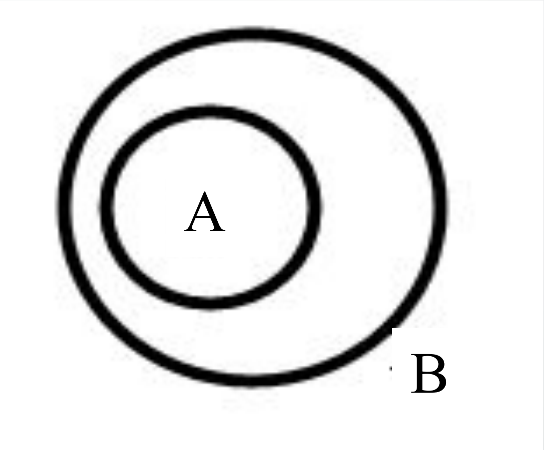
Множество можно задать:

- Перечислив все его элементы
  - $A = \{3, 4, 5, 6\}$
- Указать характеристическое свойство его элементов
  - $A = \{x \mid x \in N \text{ и } x<7\}$
  - Множество натуральных чисел, меньших 7

Множества удобно изображать с помощью *кругов Эйлера*.

Множество *А* называют **подмножеством** множества *В*, если каждый элемент множества А является элементом множества В

И обозначают $A \subset \mathbf{B}$.

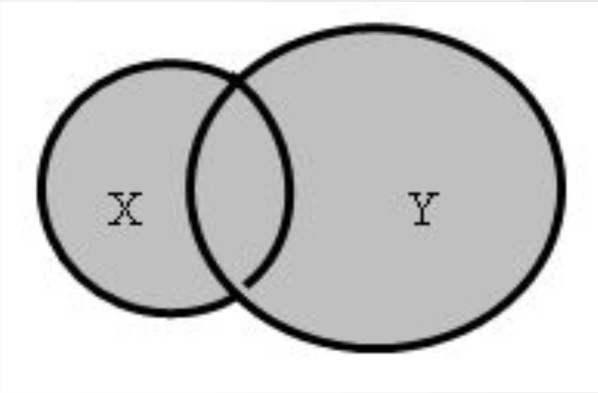


Равными называют два множества *А* и *В*, состоящие из одинаковых элементов: А = В.

Объединением (*или суммой*) двух множеств X и Y называется множество C, которое состоит из всех элементов данных множеств X и Y

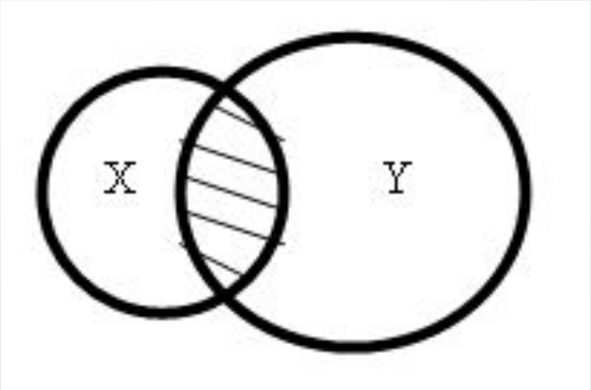
Обозначается: **C=X∪Y.**

C



- *Пересечением* множеств X и Y называется множество A, состоящее из элементов, входящих одновременно и во множество X, и во множество Y.

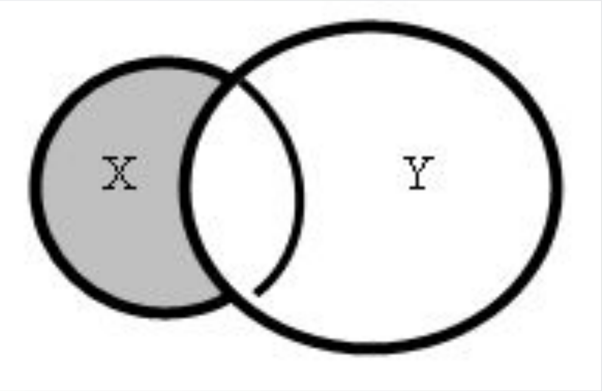
A



- Обозначение: **A=X ∩ Y**

Разностью множеств X и Y называется множество, содержащее все элементы множества X, не содержащиеся в Y.

Обозначение: **X\Y**



Алгебраические свойства

- U - универсальное множество, т.е. все рассматриваемые объекты, являются его элементами.

Символ	Смысл
«∀» – квантор всеобщности	Заменяет словосочетания: «любой», «всякий», «для любого» и т.п.
«∃» – квантор существования	... «существует», «найдется» и т.п.
«⇒» – знак импликации	... «следует», «влечет», «вытекает», «имеет место», «выполняется»
«⇔» – знак равносильности или эквивалентности	... «тогда и только тогда, когда», «в том и только том случае, когда», «если и только если»
«:» – двоеточие	... «такой, что»
«|» – вертикальная черточка; сходен по смыслу и употреблению с предыдущим символом	... «при условии, что»
«{ *некоторые объекты* }» – фигурные скобки	Знак совокупности объектов (например, чисел, геометрических фигур, функций и пр.)

Числовые множества

Введем обозначения для наиболее часто используемых множеств:

- **N** – множество всех натуральных чисел;
- **Z** – множество всех целых чисел;
- $\mathbf{Z_0}$ – множество целых неотрицательных чисел ($\mathbf{Z_0}$=**N**$\cup\{0\}$);
- **Q** – множество всех рациональных чисел;
- **R** – множество всех действительных чисел;

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Множество **R** содержит рациональные и иррациональные числа

Теорема: Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2

Свойства множества **R** действительных чисел

- ✓ Оно *упорядоченное*: для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений $a < b$ либо $b < a$
- ✓ Множество **R** *плотное*: между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x, т. е чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$
- ✓ Множество **R** *непрерывное*

Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Каждому числу х $\in$**R** соответствует определенная (единственная) точка числовой оси/

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a;b] = \{x: \ a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a;b) = \{x: \ a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

$[a;b) = \{x: \ a \leqslant x < b\}$;

$(a;b] = \{x: \ a < x \leqslant b\}$ — полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty;b] = \{x: \ x \leqslant b\}$; $\quad [a,+\infty) = \{x: \ x \geqslant a\}$;

$(-\infty;b) = \{x: \ x < b\}$; $\quad (a,+\infty) = \{x: \ x > a\}$;

$(-\infty,\infty) = \{x: \ -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ — бесконечные интервалы (промежутки).

Пусть x_0 - любое действительное число (точка на числовой прямой). Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется окрестностью точки x_0. Число x_0 называется центром, а число ε- радиусом.