# КЛАССИФИКАЦИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

***Лекция 1***

Пахомова Наталья Алексеевна

# История возникновения

1885г. Фредерик Тейлор – вывод о возможности применения научного анализа в сфере производства.

1916г. Фредерик Ланчестр – «**квадратичный закон**», который устанавливает связь между численным превосходством живой силы и эффективностью оружия.

20-е гг. Формулы Эрланга были приняты в качестве стандартов для расчета эффективности телефонных линий.

# Методы оптимальных решений рассматривают следующие задачи:

- Задачи управления запасами
- Задачи распределения ресурсов
- Задачи ремонта и замены оборудования
- Задачи массового обслуживания
- Задача составления расписаний движения транспорта (грузового, пассажирского, смешанного).
- Задачи сетевого планирования или управления
- Задачи выбора оптимального маршрута

# Оптимальное математическое программирование

**ЦЕЛЬ** (критерий, целевая функция)

$F(x_1;x_2;\ldots;x_n) \rightarrow$ экстремум

**ОГРАНИЧЕНИЯ** (условия, требования)

$Gj(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ [>;≥;=;<;≤] $b_j$ где j = 1,2,…,m

ТРЕБОВАНИЯ К ПЕРЕМЕННЫМ

$x_i \geq 0$ не отрицательность

$x_i$ – целые,

$x_i$ – выражены через параметры,

$x_i$ – случайные и т.д.

# Полное решение поставленной задачи не найдено, но получены существенные результаты во множестве частных случаев

1. Если функции F и Gj **линейные**, то в этом случае задача носит название задачи линейного программирования.
2. Если F *дробно-линейная*, а Gj – *линейные*, то это задача дробно-линейного программирования.
3. Если F **квадратичная** функция, а Gj **линейные**, то это задача квадратичного программирования.
4. Если xi – **целые**, то это задача целочисленного программирования.
5. Если xi – выражены через **параметры**, то это задача параметрического программирования.
6. Если хотя бы одна из xi - **случайная** величина, то это задача стохастического программирования.
7. Если результат многоэтапного решения зависит от **оптимального** выбора на каждом этапе, то это задача динамического программирования.

# История линейного программирования

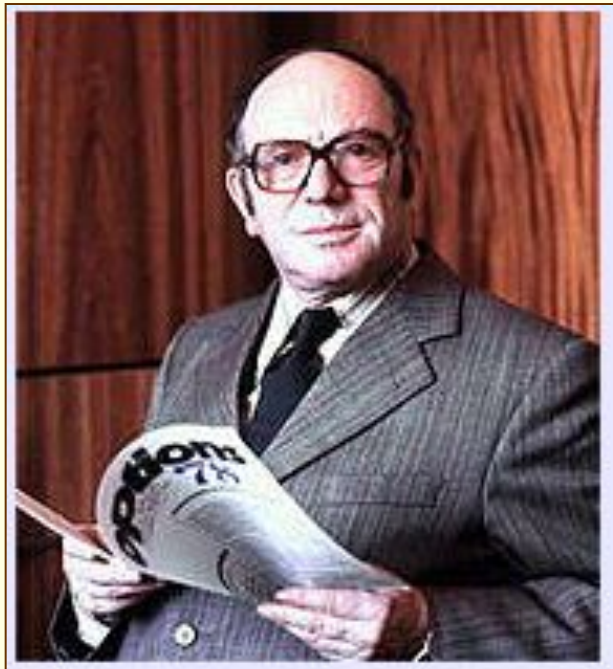
КАНТОРОВИЧ Леонид Витальевич

(1912-86),

российский математик и экономист,

академик АН СССР.

Положил начало линейному программированию. Один из создателей теории оптимального планирования и управления народным хозяйством, теории оптимального использования сырьевых ресурсов.



Л. В. Канторович.

# Задача линейного программирования имеет следующий вид

1) Целевая функция

$$Z= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \rightarrow \text{экстремум (оптимум)}$$

2) Ограничения $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i$ [>≥=<≤] $b_j$ , где

j=1,2,…,m

3) Требования к переменным $x_i \geq 0$
(не отрицательность).

# СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

- Графический способ
- Средствами Excel (Поиск решения)
- Средствами MathCAD (функция Minimize)
- Способ Жордановых исключений

# Пример:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 - 4x_2 \leq 19 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 28 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 3x_2 \geq 8 \end{cases}$$

# Графический способ

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 19$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 28$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 8$$

# Найдем графическое решение неравенств

$$Z = x_1 + x_2 \to \min$$

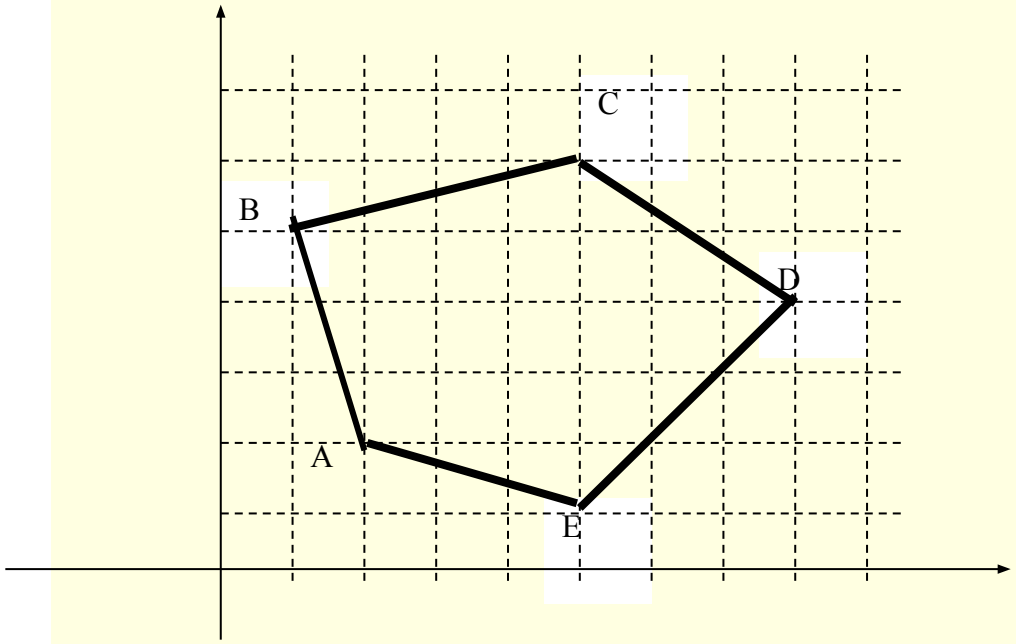
$$3x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 19$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 28$$

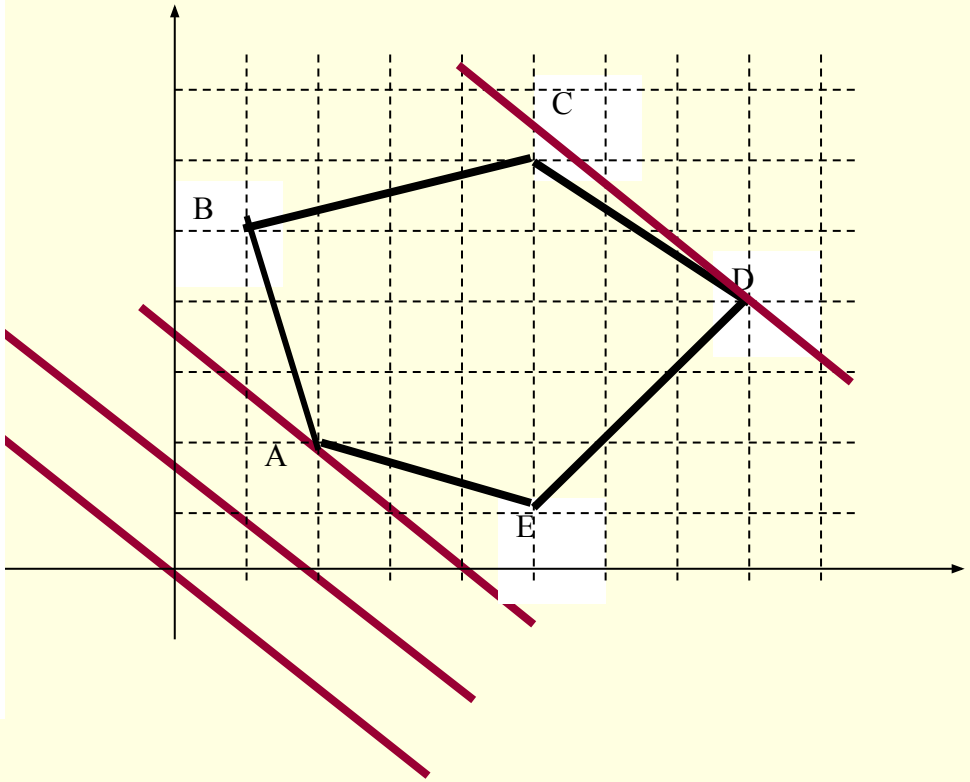
$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 8$$



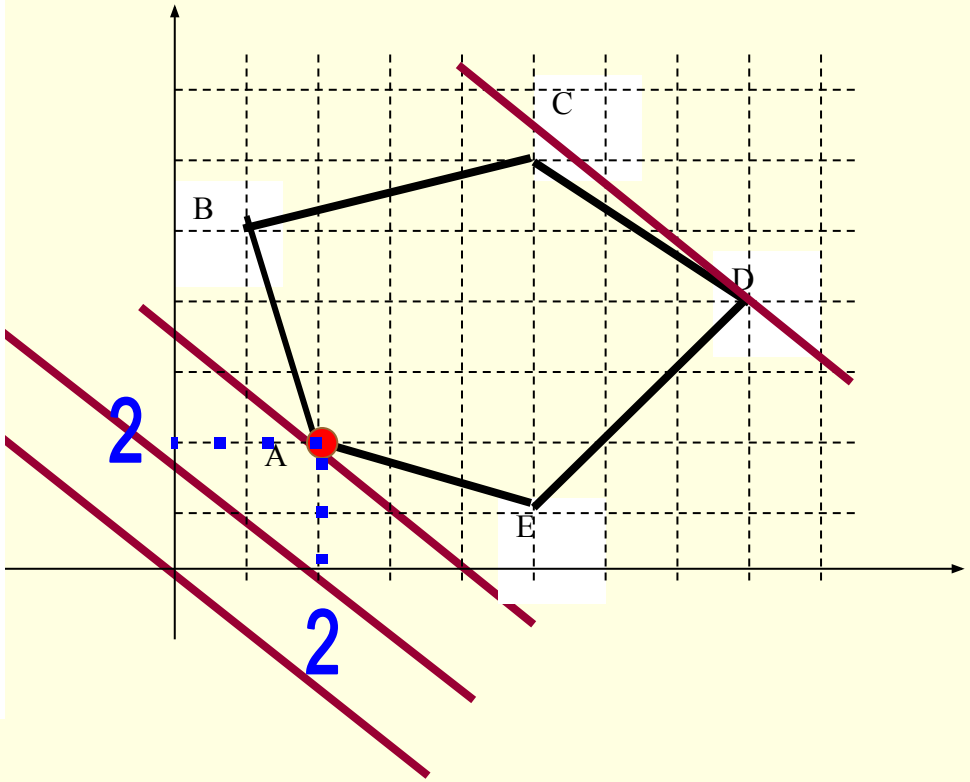
# Графиком целевой функции является семейство параллельных прямых

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$
$$3x_1 + x_2 \geq 8$$
$$x_1 - 4x_2 \leq 19$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 28$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 8$$



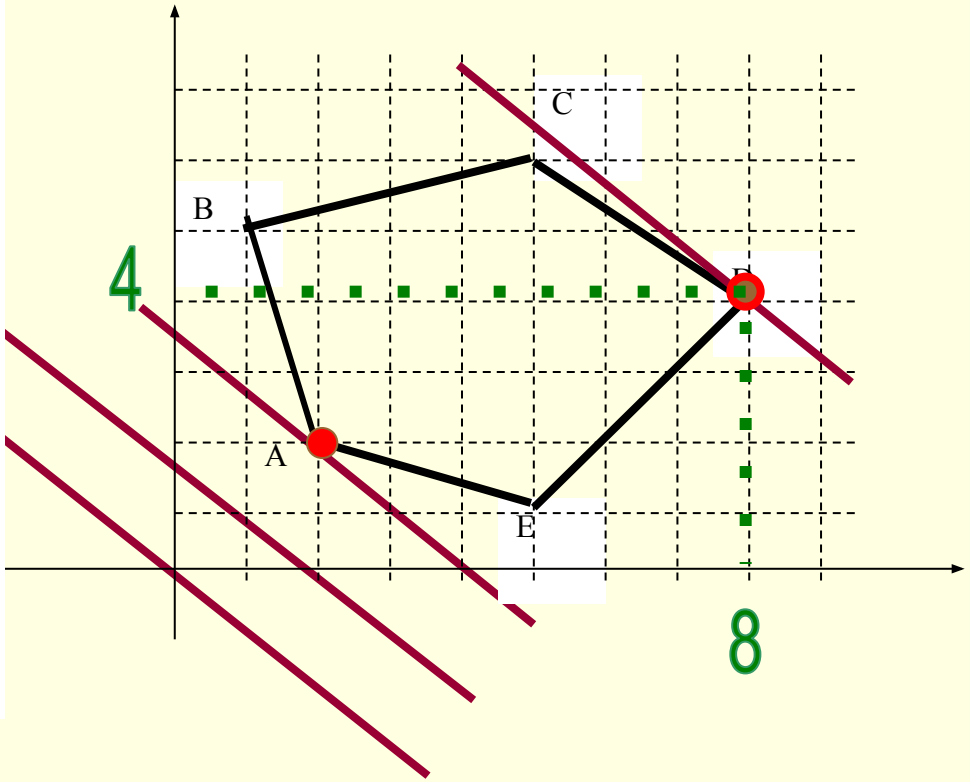
# Точка входа – точка минимума

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$
$$3x_1 + x_2 \geq 8$$
$$x_1 - 4x_2 \leq 19$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 28$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 8$$



# Точка выхода – точка максимума

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$
$$3x_1 + x_2 \geq 8$$
$$x_1 - 4x_2 \leq 19$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 28$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 8$$



# СПОСОБ ЖОРДАНОВЫХ ИСКЛЮЧЕНИЙ (СИМПЛЕКСНЫЙ)

Симплексный метод требует преобразования имеющейся модели к каноническому виду.

1)каждое неравенство должно быть приведено к виду **≥0**,

2)уравнение – **приравнено** к **0**.

**3)целевая функция** должна **стремиться к минимуму.**

# Последовательное преобразование Жордановой таблицы

Задача считается решенной, если коэффициенты при переменных в **целевой** строке **не отрицательны**, и при этом все **свободные члены** дополнительных переменных также **не отрицательны**.

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | | | 81 |
| $Y_2$ | | | 19 |
| $Y_3$ | | | 2/8 |
| $Y_4$ | | | 4 |
| $Y_5$ | | | 18 |
| Z | 1/5 | 11 | 0 |

Все преобразования таблиц основаны на так называемых разрешающих элементах.

# Правила выбора разрешающего элемента

1. Разрешающий элемент не может находиться в столбце свободных членов и в строке целевой функции. Он не может быть равным нулю.

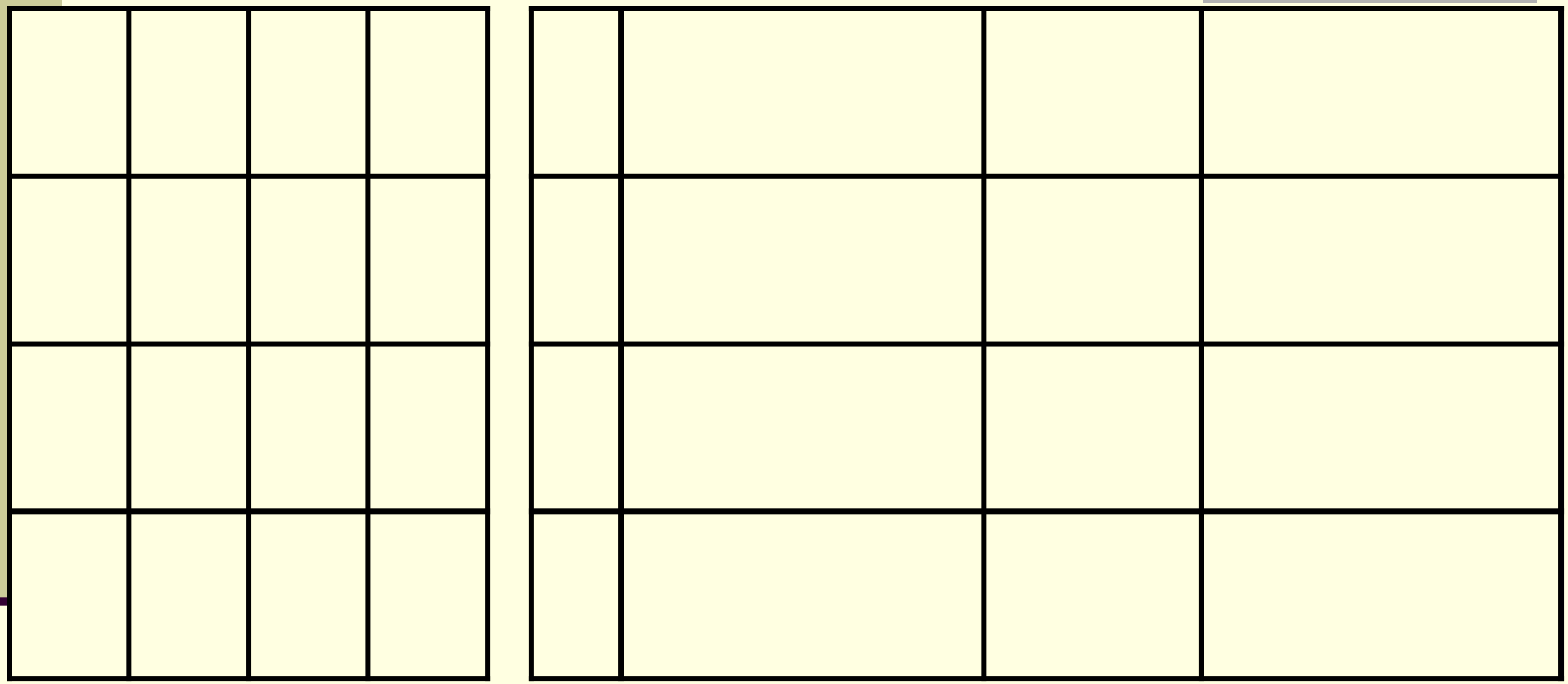
2. Любой **отрицательный элемент в столбце свободных членов** определяет возможную разрешающую **строку**.

   **Наименьшее** отношение соответствующего свободного элемента ко всем **положительным** элементам этой же строки определит разрешающий элемент. Следует учесть все такие строки, если их несколько.

3. Любой **отрицательный элемент целевой строки** определяет возможный разрешающий **столбец**. **Наибольшее** из всех возможных отношений соответствующих свободных членов к **отрицательным** элементам такого столбца и определит разрешающий элемент.

После выбора разрешающего элемента ячейки Жордановой таблицы пересчитывают также по определенным правилам и переходят к следующей таблице.

**Предыдущая таблица** **Последующая таблица**



**Предыдущая таблица** **Последующая таблица**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $x_j$ | |
| | a | b | c |
| $y_i$ | d | R | e |
| | f | g | h |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Предыдущая таблица** **Последующая таблица**

| | | $x_j$ | |
|---|---|---|---|
| | a | b | c |
| $y_i$ | d | R | e |
| | f | g | h |

| | | $y_i$ | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| $x_j$ | | | |
| | | | |

Меняем заголовки строки и столбца, соответствующие R

**Предыдущая таблица**

| | | $x_j$ | |
|---|---|---|---|
| | **a** | **b** | **c** |
| $y_i$ | **d** | **R** | **e** |
| | **f** | **g** | **h** |

**Последующая таблица**

| | | $y_i$ | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| $x_j$ | | $\frac{1}{R}$ | |
| | | | |

На место R ставим **обратную** величину

**Предыдущая таблица**

| | | $x_j$ | |
|---|---|---|---|
| | a | b | c |
| $y_i$ | d | R | e |
| | f | g | h |

**Последующая таблица**

| | | $y_i$ | |
|---|---|---|---|
| | | $\frac{b}{R}$ | |
| $x_j$ | | $\frac{1}{R}$ | |
| | | $\frac{g}{R}$ | |

Разрешающий столбец делим на R

**Предыдущая таблица** **Последующая таблица**

| | | $x_j$ | |
|---|---|---|---|
| | **a** | **b** | **c** |
| $y_i$ | **d** | **R** | **e** |
| | **f** | **g** | **h** |

| | | $y_i$ | |
|---|---|---|---|
| | | $\frac{b}{R}$ | |
| $x_j$ | $\frac{d}{-R}$ | $\frac{1}{R}$ | $\frac{e}{-R}$ |
| | | $\frac{g}{R}$ | |

Разрешающую строку делим на число, **противоположное** R

**Предыдущая таблица** **Последующая таблица**

| | | $x_j$ | |
|---|---|---|---|
| | a | b | c |
| $y_i$ | d | R | e |
| | f | g | h |

| | | $y_i$ | |
|---|---|---|---|
| | $\frac{a \cdot R - b \cdot d}{R}$ | $\frac{b}{R}$ | $\frac{c \cdot R - b \cdot e}{R}$ |
| $x_j$ | $\frac{d}{-R}$ | $\frac{1}{R}$ | $\frac{e}{-R}$ |
| | $\frac{f \cdot R - d \cdot g}{R}$ | $\frac{g}{R}$ | $\frac{h \cdot R - g \cdot e}{R}$ |

Остальные элементы находим
по ***правилу прямоугольника***

# Основная форма представления задачи линейного программирования

Исходная форма

$Z=x_1+x_2 \rightarrow \min$

$3x_1+x_2 \geq 8$

$x_1-4x_2 \leq 19$

$2x_1+3x_2 \leq 28$

$x_1-x_2 \leq 4$

$x_1+3x_2 \geq 8$

Каноническая форма

# Основная форма представления задачи линейного программирования

Исходная форма

$Z=x_1+x_2 \rightarrow \min$

$3x_1+x_2 \geq 8$

$x_1-4x_2 \leq 19$

$2x_1+3x_2 \leq 28$

$x_1-x_2 \leq 4$

$x_1+3x_2 \geq 8$

Каноническая форма

$Z=x_1+x_2 \rightarrow \min$

$3x_1 + x_2 - 8 \geq 0$

$x_1 - 4x_2 - 19 \leq 0$

$2x_1+3x_2-28 \leq 0$

$x_1 - x_2 - 4 \leq 0$

$x_1+3x_2 - 8 \geq 0$

# Основная форма представления задачи линейного программирования

| Исходная форма | Каноническая форма |
| --- | --- |
| $Z=x_1+x_2\rightarrow\min$ | $Z=x_1+x_2\rightarrow\mathbf{min}$ |
| $3x_1+x_2\geq 8$ | $3x_1+x_2-8\geq 0$ |
| $x_1-4x_2\leq 19$ | $-x_1+4x_2+19\geq 0$ |
| $2x_1+3x_2\leq 28$ | $-2x_1-3x_2+28\geq 0$ |
| $x_1-x_2\leq 4$ | $-x_1+x_2+4\geq 0$ |
| $x_1+3x_2\geq 8$ | $x_1+3x_2-8\geq 0$ |

# Основная форма представления задачи линейного программирования

Исходная форма

$Z=x_1+x_2\rightarrow min$

$3x_1+x_2\geq 8$

$x_1-4x_2\leq 19$

$2x_1+3x_2\leq 28$

$x_1-x_2\leq 4$

$x_1+3x_2\geq 8$

Каноническая форма

$Z=x_1+x_2\rightarrow min$

$\mathbf{y_1}=3x_1+x_2-8$

$\mathbf{y_2}=-x_1+4x_2+19$

$\mathbf{y_3}=-2x_1-3x_2+28$

$\mathbf{y_4}=-x_1+x_2+4$

$\mathbf{y_5}=x_1+3x_2-8$

# Все коэффициенты канонической формы заносят в Жорданову таблицу

- В заголовках столбцов этой таблицы ставят имена определяемых переменных: $x_1$ , $x_2$,

  а также заголовок столбца свободных членов всех ограничений или, его еще называют столбцом единиц.

- В заголовках строк таблицы записывают имена введенных, дополнительных переменных: $y_1$, $y_2$,$y_3$, $y_4$, $y_5$ и имя целевой функции $Z$.

- При заполнении таблицы обязательно учитывать знаки каждого коэффициента.

# Для нашей задачи таблица будет выглядеть следующим образом

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

# Для нашей задачи таблица будет выглядеть следующим образом

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

# Для нашей задачи таблица будет выглядеть следующим образом

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

# Для нашей задачи таблица будет выглядеть следующим образом

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

# Для нашей задачи таблица будет выглядеть следующим образом

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

# Для нашей задачи таблица будет выглядеть следующим образом

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

# Для нашей задачи таблица будет выглядеть следующим образом

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

# Для нашей задачи таблица будет выглядеть следующим образом

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

# Рассмотрим первую таблицу нашей задачи

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | 1 | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

Находим разрешающий элемент: -8/3, **-8/1**, **-8/1**,-8/3

# Меняем заголовки

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | **3** | **1** | -8 |
| $Y_2$ | **-1** | **4** | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | | |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | | 4/1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | | 0*1-1*(-8) |

# На место разрешающего элемента пишем обратный

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | 1/1 | |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | | 4/1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | | 0*1-1*(-8) |

# Столбец делим на разрешающий элемент

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | **1/1** | |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | **4/1** | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | **-3/1** | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | **1/1** | 4/1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | **3/1** | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | **1/1** | 0*1-1*(-8) |

# Сроку делим на (– R)

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | 4/1 | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | -3/1 | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | 1/1 | 4/1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | 3/1 | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | 1/1 | 0*1-1*(-8) |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | **3** | **1** | -8 |
| $Y_2$ | **-1** | **4** | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| **$X_2$** | **-3/1** | **1/1** | **-(-8)/1** |
| **$Y_2$** | **(-1*1-3*4)/1** | **4/1** | |
| **$Y_3$** | | **-3/1** | |
| **$Y_4$** | | **1/1** | |
| **$Y_5$** | | **3/1** | |
| **Z** | | **1/1** | |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | **3** | **1** | -8 |
| $Y_2$ | **-1** | **4** | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | **4** |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | (-1*1-3*4)/1 | 4/1 | |
| $Y_3$ | | -3/1 | |
| $Y_4$ | | 1/1 | (4*1-1*(-8))/1 |
| $Y_5$ | | 3/1 | |
| Z | | 1/1 | |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | 4/1 | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | -3/1 | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | 1/1 | 4*1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | 3/1 | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | 1/1 | 0*1-1*(-8) |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | 4/1 | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | -3/1 | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | 1/1 | 4/1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | 3/1 | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | 1/1 | 0*1-1*(-8) |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | 4/1 | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | -3/1 | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | 1/1 | 4/1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | 3/1 | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | 1/1 | 0*1-1*(-8) |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | 4/1 | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | -3/1 | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | 1/1 | 4/1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | 3/1 | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | 1/1 | 0*1-1*(-8) |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | 4/1 | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | -3/1 | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | 1/1 | |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | 3/1 | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | 1/1 | 0*1-1*(-8) |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | 4/1 | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | -3/1 | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | 1/1 | 4*1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | 3/1 | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | 1/1 | 0*1-1*(-8) |

# Остальные элементы находим по правилу прямоугольника

| | $X_1$ | $X_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 3 | **1** | -8 |
| $Y_2$ | -1 | 4 | 19 |
| $Y_3$ | -2 | -3 | 28 |
| $Y_4$ | -1 | 1 | 4 |
| $Y_5$ | 1 | 3 | -8 |
| Z | 1 | 1 | 0 |

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3/1 | 1/1 | -(-8)/1 |
| $Y_2$ | -1*1-3*4 | 4/1 | 19*1-4*(-8) |
| $Y_3$ | -2*1-3*(-3) | -3/1 | 28*1-(-3)*(-8) |
| $Y_4$ | -1*1-3*1 | 1/1 | 4/1-1*(-8) |
| $Y_5$ | 1*1-3*3 | 3/1 | -8*1-3*(-8) |
| Z | 1*1-3*1 | 1/1 | 0*1-1*(-8) |

# Вторая таблица:

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3 | 1 | 8 |
| $Y_2$ | -13 | 4 | 51 |
| $Y_3$ | 7 | -3 | 4 |
| $Y_4$ | -4 | 1 | 12 |
| $Y_5$ | -8 | 3 | 16 |
| Z | **-2** | 1 | 8 |

**Есть отрицательный элемент в последней строке**

**Наибольшее** из всех возможных отношений соответствующих свободных членов к **отрицательным** элементам такого столбца

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3 | 1 | 8 |
| $Y_2$ | -13 | 4 | 51 |
| $Y_3$ | 7 | -3 | 4 |
| $Y_4$ | -4 | 1 | 12 |
| $Y_5$ | -8 | 3 | 16 |
| Z | -2 | 1 | 8 |

-8/3

**Наибольшее** из всех возможных отношений соответствующих свободных членов к **отрицательным** элементам такого столбца

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3 | 1 | 8 |
| $Y_2$ | -13 | 4 | 51 |
| $Y_3$ | 7 | -3 | 4 |
| $Y_4$ | -4 | 1 | 12 |
| $Y_5$ | -8 | 3 | 16 |
| Z | -2 | 1 | 8 |

-51/13, -8/3

**Наибольшее** из всех возможных отношений соответствующих свободных членов к **отрицательным** элементам такого столбца

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3 | 1 | 8 |
| $Y_2$ | -13 | 4 | 51 |
| $Y_3$ | 7 | -3 | 4 |
| $Y_4$ | -4 | 1 | 12 |
| $Y_5$ | -8 | 3 | 16 |
| Z | -2 | 1 | 8 |

-12/4, -51/13, -8/3

**Наибольшее** из всех возможных отношений соответствующих свободных членов к **отрицательным** элементам такого столбца

| | $X_1$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3 | 1 | 8 |
| $Y_2$ | -13 | 4 | 51 |
| $Y_3$ | 7 | -3 | 4 |
| $Y_4$ | -4 | 1 | 12 |
| $Y_5$ | -8 | 3 | 16 |
| Z | -2 | 1 | 8 |

-16/8, -12/4, -51/13, -8/3; наибольшее число **-16/8=-2**

# Разрешающий элемент (– 8 )

| | $\mathbf{X_1}$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3 | 1 | 8 |
| $Y_2$ | -13 | 4 | 51 |
| $Y_3$ | 7 | -3 | 4 |
| $Y_4$ | -4 | 1 | 12 |
| $\mathbf{Y_5}$ | -8 | 3 | 16 |
| Z | -2 | 1 | 8 |

# Третья таблица:

| | $Y_5$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | | 2 |
| $Y_2$ | | | 25 |
| $Y_3$ | | | 18 |
| $Y_4$ | | | 4 |
| $X_1$ | -1/8 | 3/8 | 2 |
| Z | 2/8 | 2/8 | 4 |

# Третья таблица:

| | $Y_5$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | | 2 |
| $Y_2$ | | | 25 |
| $Y_3$ | | | 18 |
| $Y_4$ | | | 4 |
| $X_1$ | -1/8 | 3/8 | 2 |
| Z | 2/8 | 2/8 | 4 |

В последней таблице в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, поэтому она демонстрирует так называемое «допустимое» решение.

Кроме того, в последней таблице в строке целевой функции также нет отрицательных элементов, значит, имеющееся решение есть не только **допустимое**, но и **оптимальное**.

Заметив этот факт, мы не стали заполнять все остальные клетки таблицы, т.к. ответ уже получен.

# Третья таблица:

| | $Y_5$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | | 2 |
| $Y_2$ | | | 25 |
| $Y_3$ | | | 18 |
| $Y_4$ | | | 4 |
| $X_1$ | -1/8 | 3/8 | 2 |
| Z | 2/8 | 2/8 | 4 |

В последней таблице в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, поэтому она демонстрирует так называемое «допустимое» решение.

Кроме того, в последней таблице в строке целевой функции также нет отрицательных элементов, значит, имеющееся решение есть не только **допустимое**, но и **оптимальное**.

Заметив этот факт, мы не стали заполнять все остальные клетки таблицы, т.к. ответ уже получен.

$$-2 / (-8) = 2/8$$

столбец делим на разрешающий элемент

# Третья таблица:

| | $Y_5$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | | 2 |
| $Y_2$ | | | 25 |
| $Y_3$ | | | 18 |
| $Y_4$ | | | 4 |
| $X_1$ | -1/8 | 3/8 | 2 |
| Z | 2/8 | 2/8 | 4 |

| | $\mathbf{X_1}$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3 | 1 | 8 |
| $Y_2$ | -13 | 4 | 51 |
| $Y_3$ | 7 | -3 | 4 |
| $Y_4$ | -4 | 1 | 12 |
| $\mathbf{Y_5}$ | -8 | 3 | 16 |
| Z | -2 | 1 | 8 |

$$( 1* (-8) - 3* (-2))/(-8) = (-8+6)/(-8)= - 2/( - 8) = 2/8$$

# Третья таблица:

| | $Y_5$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | | 2 |
| $Y_2$ | | | 25 |
| $Y_3$ | | | 18 |
| $Y_4$ | | | 4 |
| $X_1$ | -1/8 | 3/8 | 2 |
| Z | 2/8 | 2/8 | 4 |

| | $\mathbf{X_1}$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | -3 | 1 | 8 |
| $Y_2$ | -13 | 4 | 51 |
| $Y_3$ | 7 | -3 | 4 |
| $Y_4$ | -4 | 1 | 12 |
| $\mathbf{Y_5}$ | -8 | 3 | 16 |
| Z | -2 | 1 | 8 |

# Третья таблица:

| | $Y_5$ | $Y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | | | 2 |
| $Y_2$ | | | 25 |
| $Y_3$ | | | 18 |
| $Y_4$ | | | 4 |
| $X_1$ | -1/8 | 3/8 | 2 |
| Z | 2/8 | 2/8 | 4 |

В последней таблице в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, поэтому она демонстрирует так называемое «допустимое» решение.

Кроме того, в последней таблице в строке целевой функции также нет отрицательных элементов, значит, имеющееся решение есть не только **допустимое**, но и **оптимальное**.

# Оформление результата решения

Результат решения определяют из последней таблицы следующим образом:

- переменная, стоящая в заголовке строки равна свободному члену этой строки,
- переменная в заголовке столбца принимается равной нулю.

Таким образом, по нашей задаче решением будет следующий результат:

$$X_1=2,\ X_2=2,$$

$$Y_1=0,\ Y_2=25,\ Y_3=18,\ Y_4=4,\ Y_5=0,\ Z_{min}=4.$$

# Проверка:

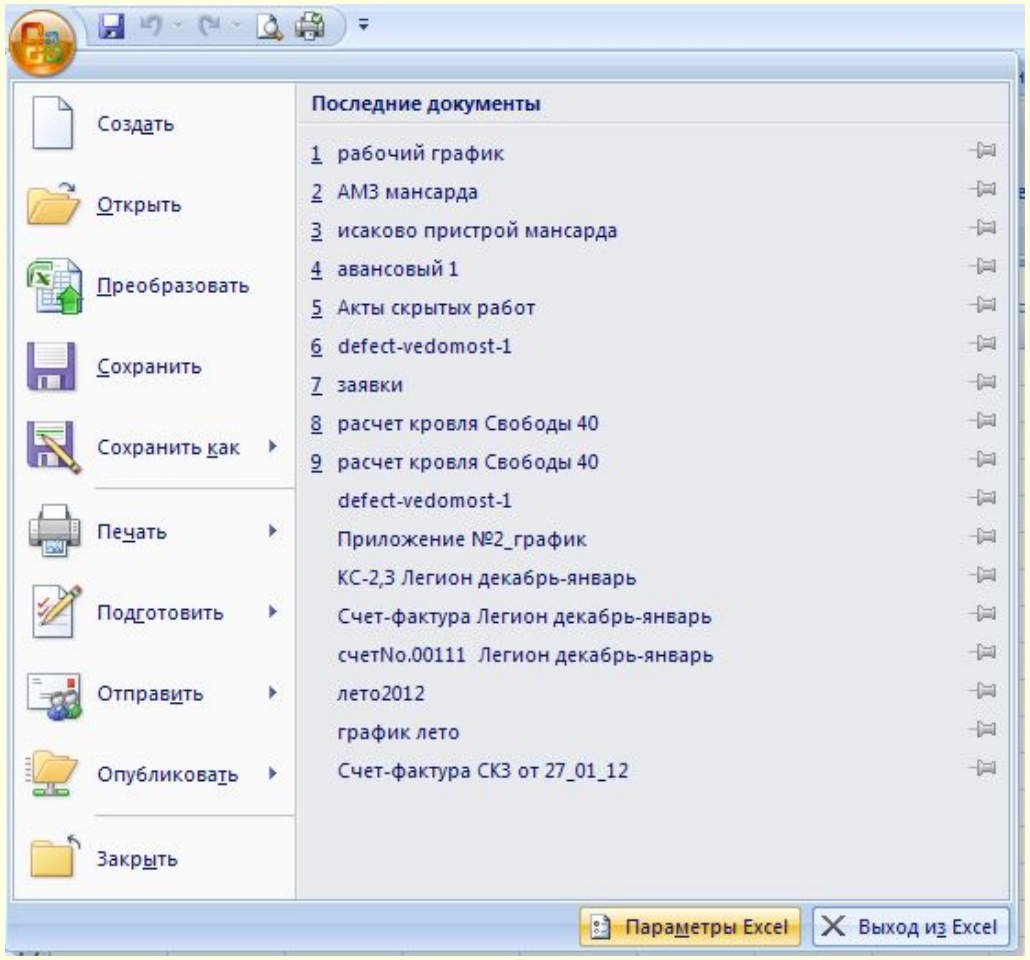
- 3*2+2=8, 8=8, различия левой и правой частей нет, значит $Y_1$=0, и в последней таблице $Y_1$ стоит в заголовке столбца.
- 2-4*2=-6<19, $Y_2$=25, но то же самое и по последней таблице.
- 2*2+3*2=10<28 на 18, следовательно, $Y_3$=18, так же и в таблице.
- 2-2=0<4 на 4, $Y_4$=4, что подтверждается таблицей.
- 2+3*2=8, 8=8, $Y_5$=0.
- Наконец, z=2+2=4, но и по таблице тот же результат.

Таким образом, полученное решение удовлетворяет **всем ограничениям** задачи и обеспечивает минимум целевой функции равный 4.

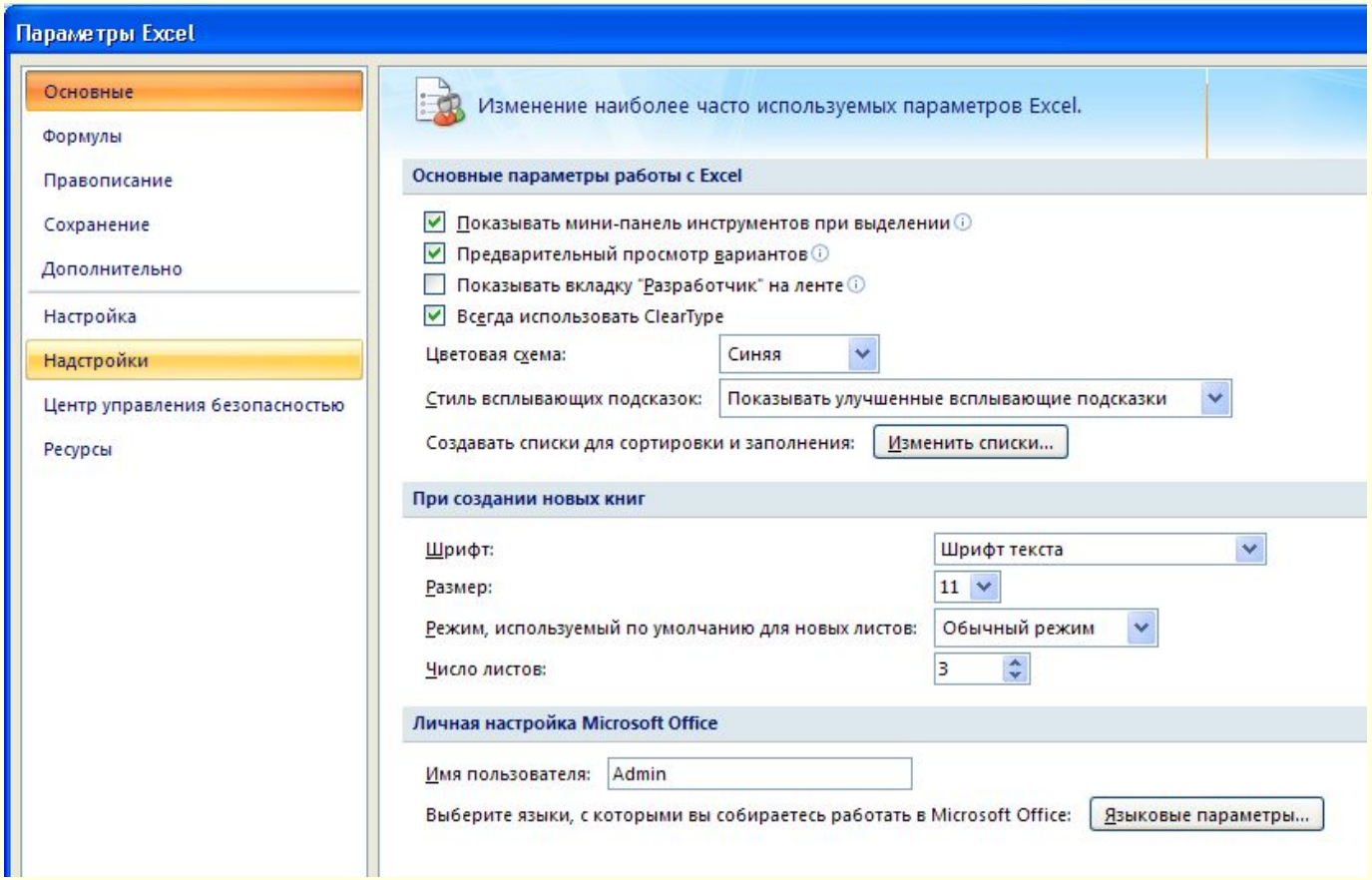
# Решение задач линейного программирования в Excel

- В настоящее время наиболее мощным средством решения таких задач на компьютере является пакет Excel с его надстройкой «Поиск решения».
- Для решения задачи в Excel необходимо правильно поместить математическую модель по ячейкам электронной таблицы при этом целесообразно придерживаться примерно следующей схемы заполнения ячеек

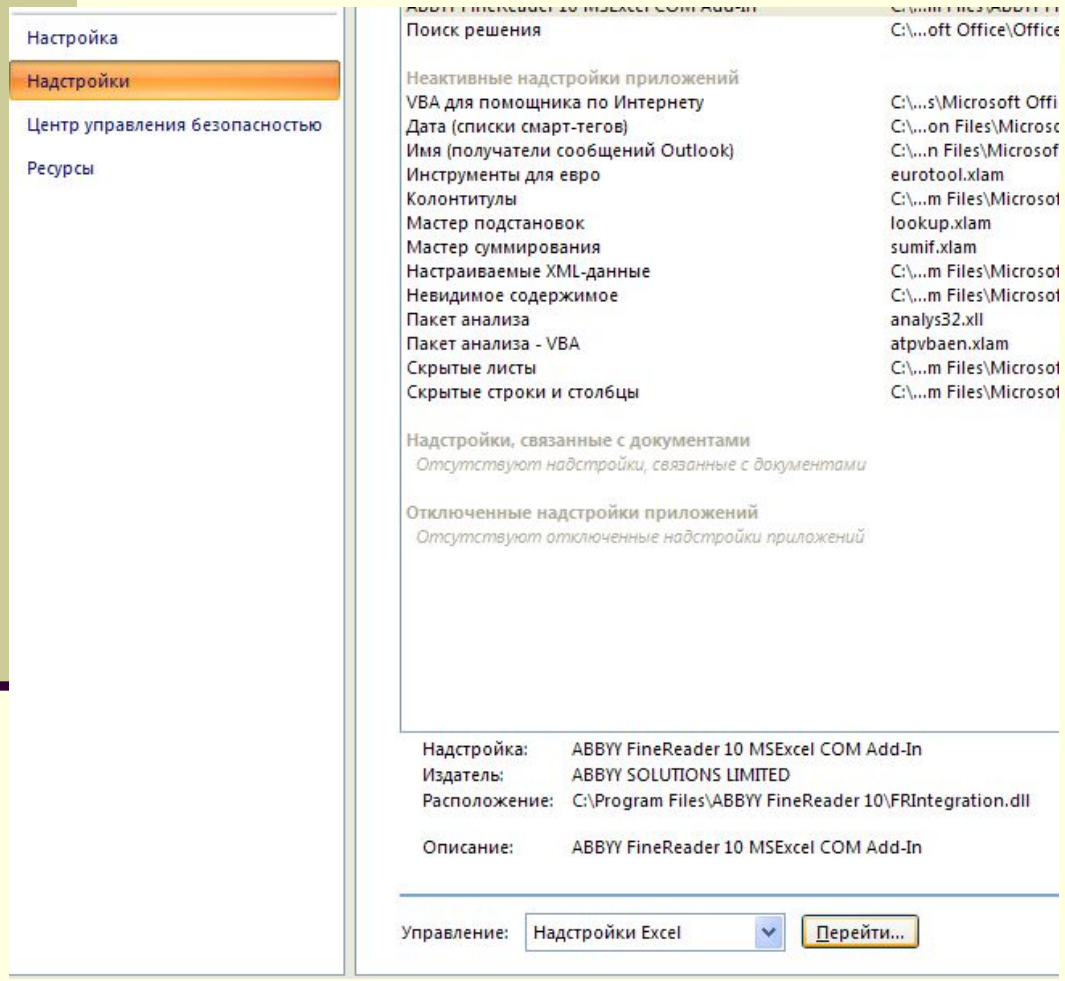
# Установка Поиска решения

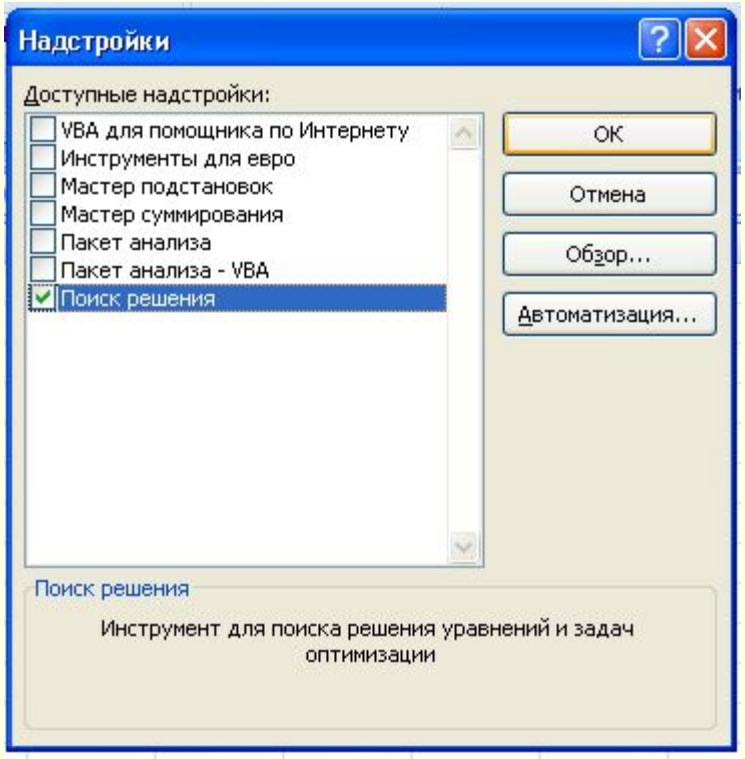


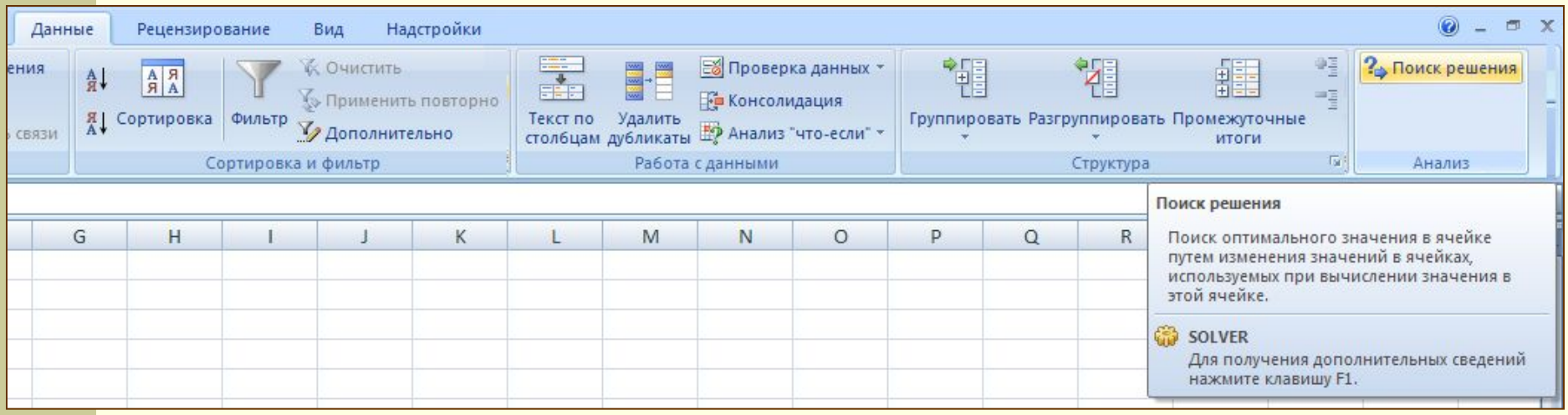
# Установка Поиска решения

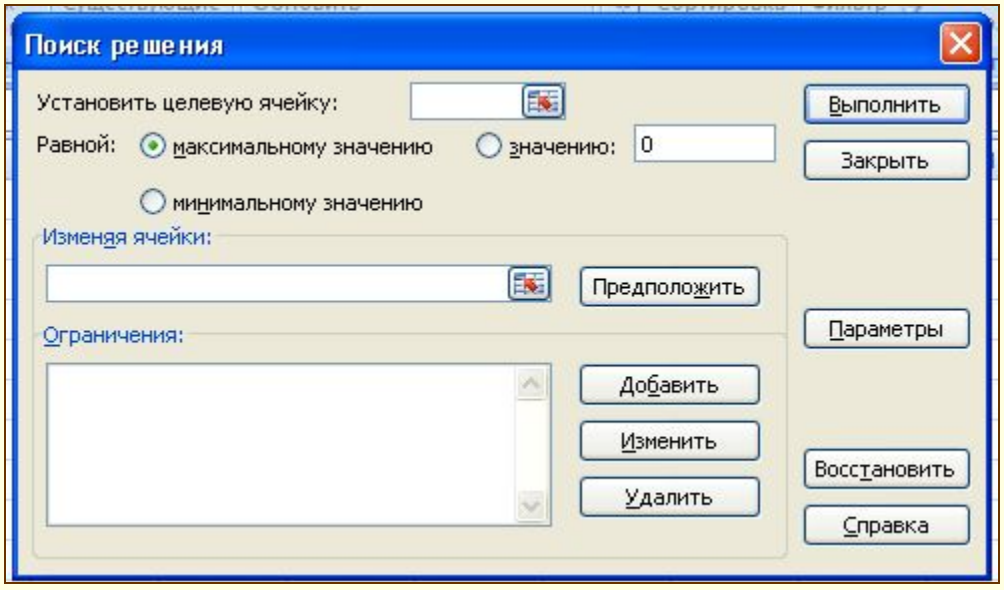


# Установка Поиска решения

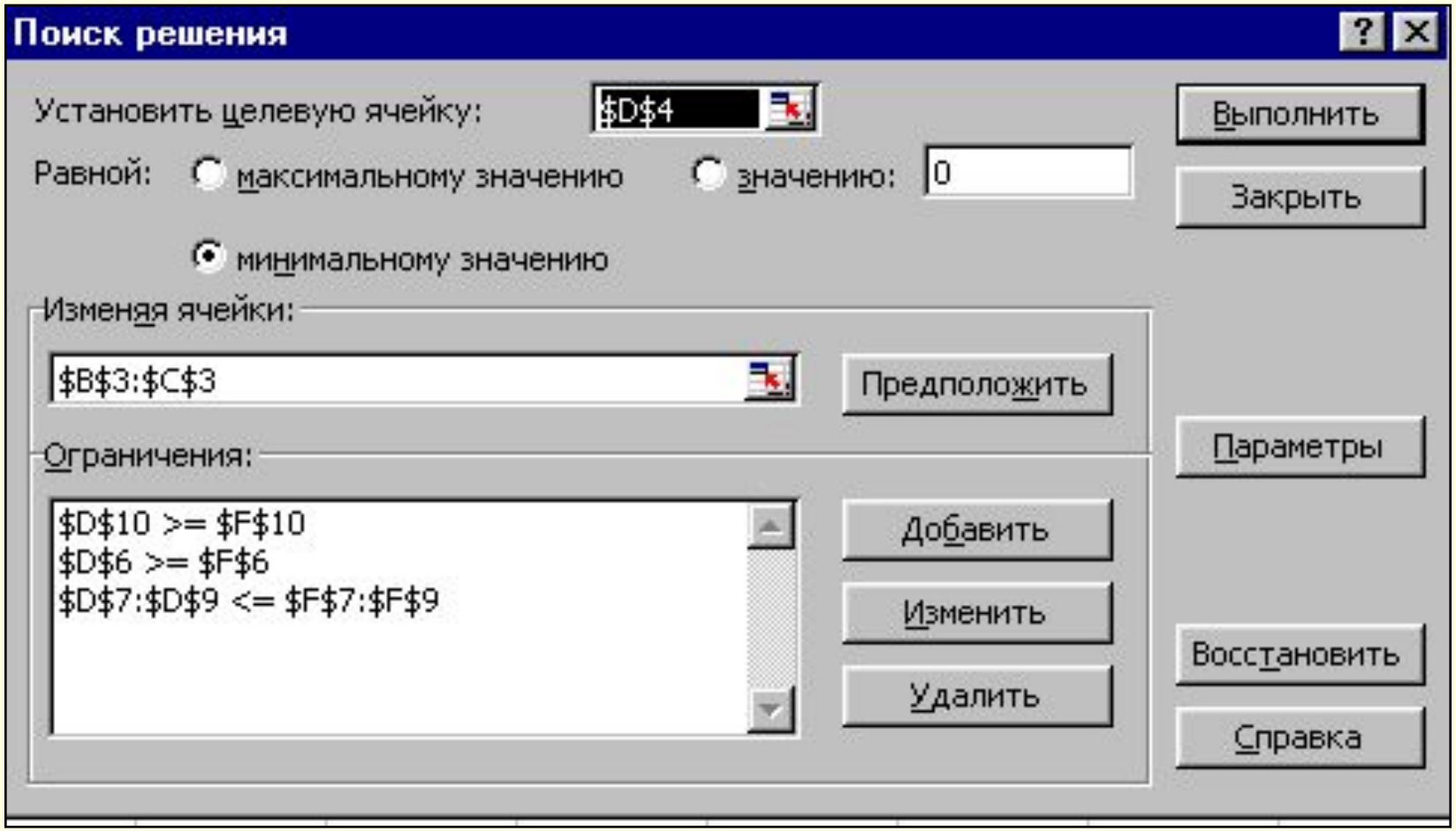



Данные
Рецензирование
Вид
Надстройки
Очистить
Применить повторно
Дополнительно
Сортировка
Фильтр
Сортировка и фильтр
Текст по столбцам
Удалить дубликаты
Проверка данных
Консолидация
Анализ "что-если"
Работа с данными
Группировать
Разгруппировать
Промежуточные итоги
Структура
Поиск решения
Анализ
G H I J K L M N O P Q R
Поиск решения
Поиск оптимального значения в ячейке путем изменения значений в ячейках, используемых при вычислении значения в этой ячейке.
SOLVER
Для получения дополнительных сведений нажмите клавишу F1.


Поиск решения
Установить целевую ячейку:
Равной:
максимальному значению
значению:
0
минимальному значению
Изменяя ячейки:
Предположить
Ограничения:
Добавить
Изменить
Удалить
Выполнить
Закрыть
Параметры
Восстановить
Справка

# Окно Поиска решения



# Результат

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Задача | | | | | |
| 2 | переменны | X1 | X2 | | | |
| 3 | значения | 2 | 2 | Z | | |
| 4 | коэф. | 1 | 1 | 4 | | |
| 5 | | ограничения | | формулы | знак | Объем |
| 6 | 1-ое | 3 | 1 | 8 | >= | 8 |
| 7 | 2-ое | 1 | -4 | -6 | <= | 19 |
| 8 | 3-е | 2 | 3 | 10 | <= | 28 |
| 9 | 4-ое | 1 | -1 | 0 | <= | 4 |
| 10 | 5-ое | 1 | 3 | 8 | >= | 8 |

- В ячейке D4 имеем минимальное значение целевой функции равное 4. Оптимальные значения переменных в ячейках B3 и C3 равны по 2.
- Все ограничения выполняются. В частности, 2-ое ограничение: по его формуле результат равен –6, а его объем равен 19, следовательно, левая часть меньше правой на 25, но именно такой же результат был получен и предыдущим способом.