теория управляемых процессов

Рекуррентные соотношения Беллмана

Введение

- Метод динамического программирования – один из наиболее мощных и широко известных математических методов современной теории управления, был предложен в конце 50-х годов американским математиком Р. Беллманом
- Используется для процессов в экологии и управлении качеством с дискретным значениям времени для многошаговых процессов управления, которым могут отвечать дни, месяцы или годы

Рассматриваемые вопросы

- Параметры управляемой системы
- Расчет соотношений Беллмана (прямой ход)
- Расчет управляющих коэффициентов (обратный ход)
- Расчет эффективности вектора управления

Параметры управляемой системы

- Эффективное управление реконструкцией производства – увеличение объемов выпуска продукции за счет замены устаревшего оборудования более производительным
- Исходные данные
  - Периодов реконструкции – 6
  - Средства на реконструкцию – S
  - Замена оборудования – 600 рублей
  - Дополнительная прибыль – 200 рублей
- Доля средств на продолжение реконструкции – X_i=?, i=1,2,…,6

Расчет соотношений Беллмана (прямой ход)

- Первый период - расчет
- Новых станков
- Дополнительной прибыли
- Средства на продолжение реконструкции
- Накопление средств

$$n_1 = \frac{S}{600}$$

$$q_1 = n_1 \cdot 200$$

$$f_1 = q_1 \cdot x_1$$

$$w_1 = q_1 \cdot (1 - x_1)$$

Второй период

- Новых станков – n_2
- Дополнительная прибыль – q_2
- Продолжение реконструкции – f_2
- Накопление средств – w_2

$$n_2 = n_1 + \frac{f_1}{600} \Rightarrow n_2 = n_1 + \frac{q_1 \cdot x_1}{600} \Rightarrow n_1 + \frac{n_1 \cdot 200 \cdot x_1}{600} \Rightarrow n_1 + \frac{1}{3} \cdot x_1 \cdot n_1$$

$$n_2 = n_1 + \frac{1}{3} \cdot x_1 \cdot n_1$$

$$q_2 = n_2 \cdot 200$$

$$f_2 = q_2 \cdot x_2$$

$$w_2 = q_2 \cdot (1 - x_2) \Rightarrow n_2 \cdot 200 \cdot (1 - x_2)$$

Третий период

- Новых станков – n_3
- Накопление средств – w_3

$$n_3 = n_2 + \frac{1}{3} \cdot x_2 \cdot n_2$$

$$w_3 = n_3 \cdot 200 \cdot (1 - x_3)$$

Остальные периоды (соотношения Беллмана)

- Новых станков – n_i
- Накопление средств – w_i

$$n_i = n_{i-1} + \frac{1}{3} \cdot x_{i-1} \cdot n_{i-1}$$

$$w_i = n_i \cdot 200 \cdot (1 - x_i)$$

Расчет коэффициентов (обратный ход)

- **Шестой период** - расчет
- Накопление средств
- Значение управляющего коэффициента x_6
  - x_6=0 – только накопление

$$w_6 = n_6 \cdot 200 \cdot (1 - x_6) \Rightarrow 200 \cdot n_6 - 200 \cdot n_6 \cdot x_6$$

$$0 \Rightarrow x_6 = 0$$

$$w_6 = 200 \cdot n_6$$

$$x_6 = 0$$

Пятый период

- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_5
  - x_5=0 – только накопление

$$w_5 = n_5 \cdot 200 \cdot (1 - x_5) + 200 \cdot \quad n_6$$

$$n_5 + \frac{1}{3} \cdot x_5 \cdot n_5$$

$$w_5 = n_5 \cdot 200 \cdot (1 - x_5) + 200 \cdot \left(n_5 + \frac{1}{3} \cdot x_5 \cdot n_5 \right)$$

$$w_5 = n_5 \cdot 200 - n_5 \cdot 200 \cdot x_5 + 200 \cdot n_5 + \frac{200}{3} \cdot x_5 \cdot n_5$$

$$w_5 = 400 \cdot n_5 - \frac{400}{3} \cdot x_5 \cdot n_5 \Rightarrow w_5 = 400 \cdot n_5$$

$$0 \Rightarrow x_5 = 0$$

Четвертый период

- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_4
  - x_4=0 – только накопление

$$w_4 = n_4 \cdot 200 - n_4 \cdot 200 \cdot x_4 + 400 \cdot n_4 + \frac{400}{3} \cdot x_4 \cdot n_4$$

$$w_4 = 600 \cdot n_4 - \underbrace{\frac{200}{3} \cdot x_4 \cdot n_4}_{0 \Rightarrow x_4 = 0} \Rightarrow w_4 = 600 \cdot n_4$$

Третий период

- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_3
  - $0 \le x_3 \le 1$ – любой допустимый вариант

$$w_3 = n_3 \cdot 200 - n_3 \cdot 200 \cdot x_3 + 600 \cdot n_3 + \frac{600}{3} \cdot x_3 \cdot n_3$$

$$w_3 = 800 \cdot n_3$$

Второй период

- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_2
  - x_2 – только реконструкция

$$w_2 = n_2 \cdot 200 - n_2 \cdot 200 \cdot x_2 + 800 \cdot n_2 + \frac{800}{3} \cdot x_2 \cdot n_2$$

$$w_2 = 1000 \cdot n_2 + \frac{200}{3} \cdot x_2 \cdot n_2 \Rightarrow w_2 = \frac{3200}{3} \cdot n_2$$

$$x_2 = 1$$

Первый период

- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_1
  - x_1 – только реконструкция

$$w_1 = n_1 \cdot 200 - n_1 \cdot 200 \cdot x_1 + \frac{3200}{3} \cdot n_1 + \frac{\frac{3200}{3}}{3} \cdot x_1 \cdot n_1$$

$$w_1 = \frac{3800}{3} \cdot n_1 + \frac{1400}{9} \cdot x_1 \cdot n_1 \Rightarrow w_1 = \frac{12800}{9} \cdot n_1$$

$$x_1 = 1$$

Расчет эффективности вектора управления

- Определяем эффективность вложения средств
- Определяем периоды реконструкции и накопления

$$w_1 = \frac{12800}{9} \cdot \frac{n_1}{S/600} \Rightarrow w_1 = \frac{64}{27} \cdot S$$

$$\{x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0{,}5; x_4 = 0; x_5 = 0; x_6 = 0;\}$$

Варианты заданий

Вариант	1	Вариант	2	Вариант	3	Вариант	4
Замена оборудования	25	Замена оборудования	36	Замена оборудования	27	Замена оборудования	32
Дополнительная прибыль	49	Дополнительная прибыль	53	Дополнительная прибыль	41	Дополнительная прибыль	53
Вариант	5	Вариант	6	Вариант	7	Вариант	8
Замена оборудования	36	Замена оборудования	37	Замена оборудования	23	Замена оборудования	33
Дополнительная прибыль	51	Дополнительная прибыль	51	Дополнительная прибыль	43	Дополнительная прибыль	47
Вариант	9	Вариант	10	Вариант	11	Вариант	12
Замена оборудования	23	Замена оборудования	35	Замена оборудования	29	Замена оборудования	23
Дополнительная прибыль	43	Дополнительная прибыль	49	Дополнительная прибыль	44	Дополнительная прибыль	47