

**ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ**

**Лекция**

**по учебной дисциплине «Цифровая схемотехника и  
обработка сигналов»**

**(Д-0205-1)**

**Тема № 11: «Фильтры с бесконечной импульсной  
характеристикой»**

**Занятие № 44: «Синтез БИХ-фильтров методом  
билинейного Z-преобразования»**

Руководитель занятия – доцент кафедры, к.т.н., доцент,  
полковник Филимонов Василий Александрович

г. Санкт-Петербург

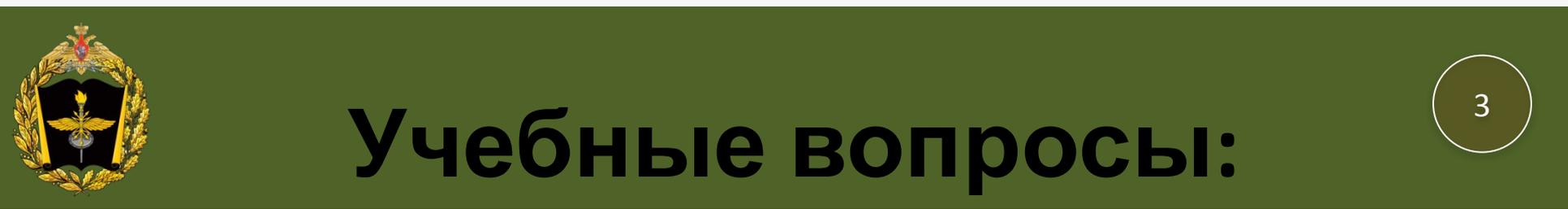
2018





# Учебные цели:

1. Изучить содержание билинейного  $Z$ -преобразования.
2. Изучить методику синтеза цифровых БИХ-фильтров при билинейном  $Z$ -преобразовании.



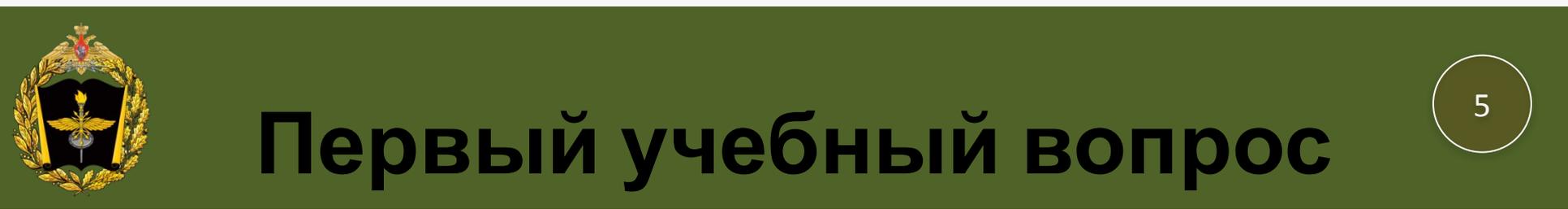
# Учебные вопросы:

1. Определение билинейного  $Z$ -преобразования.
2. Свойства билинейного  $Z$ -преобразования.
3. Методика синтеза БИХ-фильтров.



# Литература для самостоятельной работы обучаемых:

1. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций./  
Авторы: А. И. Солони́на, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов,  
Е. Б. Соловьёва/ Изд 2-е испр. и перераб. – СПб, БХВ,  
2005. – 768 с. стр. 499 – 504, 507 – 516 .



# Первый учебный вопрос

# Определение билинейного Z-преобразования



# Первый учебный вопрос

$$z = e^{pT}$$

$$p = \frac{1}{T} \ln z$$

$$\ln z = 2 \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{2n+1} + \dots \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



# Первый учебный вопрос

$$z = e^{pT}$$

$$p = \frac{1}{T} \ln z$$

$$\ln z = 2 \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{2n+1} + \dots \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$



# Первый учебный вопрос

$$z = e^{pT}$$

$$p = \frac{1}{T} \ln z$$

$$\ln z = 2 \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{2n+1} + \dots \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \rightarrow \gamma = 2/T \rightarrow p = \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p}$$

$$H(p) \Big|_{p = \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H(z)$$



# Второй учебный вопрос

9

## Свойства билинейного $Z$ -преобразования



# Второй учебный вопрос

## 1. Однозначное отображение $p$ -плоскости на $z$ -

плоскость: действительная ось однозначно отображается в единичную

окружность:

$$z = re^{j\omega T} \Big|_{r=1} = e^{j\omega T}; \quad p = \sigma + j\Omega \Big|_{\sigma=0} = j\Omega$$

$$z = \frac{\gamma + j\Omega}{\gamma - j\Omega} = re^{j\arg(z)} = \sqrt{\frac{\gamma^2 + \Omega^2}{\gamma^2 + \Omega^2}} e^{j\varphi(\Omega)} = 1e^{j\varphi(\Omega)}$$

$r=1$

$$\arg(z) = \varphi(\Omega) = \arctg \frac{\Omega}{\gamma} - \arctg \frac{-\Omega}{\gamma} = 2\arctg \frac{\Omega}{\gamma} = 2\arctg \frac{\Omega T}{2}$$

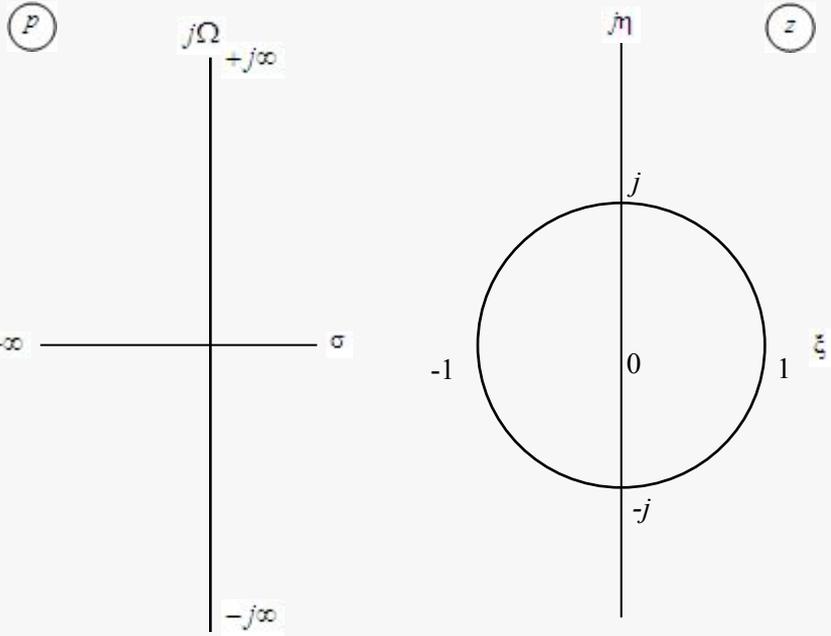


Рис. 1. Отображение  $p$ -плоскости на  $z$ -плоскость при билинейном  $Z$ -преобразовании

# Второй учебный вопрос

## 1. Однозначное отображение $p$ -плоскости на $z$ -

плоскость: вещественная ось однозначно отображается в единичную

окружность:

$$z = re^{j\omega T} \Big|_{r=1} = e^{j\omega T}; \quad p = \sigma + j\Omega \Big|_{\sigma=0} = j\Omega$$

$$z = \frac{\gamma + j\Omega}{\gamma - j\Omega} = re^{j\arg(z)} = \sqrt{\frac{\gamma^2 + \Omega^2}{\gamma^2 + \Omega^2}} e^{j\varphi(\Omega)} = 1e^{j\varphi(\Omega)}$$

$$\arg(z) = \varphi(\Omega) = \arctg \frac{\Omega}{\gamma} - \arctg \frac{-\Omega}{\gamma} = 2\arctg \frac{\Omega}{\gamma} = 2\arctg \frac{\Omega T}{2}$$

• Отображение точек на  $Z$ -

плоскость:

$$\Omega = 0; \quad \varphi(\Omega) = 0; \quad z = e^{j\varphi(\Omega)} = 1$$

$$\Omega = \pm\infty; \quad \varphi(\Omega) = \pm 2\arctg(\infty) = \pm 2\frac{\pi}{2} = \pm\pi; \quad z = e^{j\varphi(\Omega)} = e^{\pm j\pi} = -1$$

$$\Omega = \pm \frac{2}{T} = \pm\gamma; \quad \varphi(\Omega) = 2\arctg(\pm\gamma/\gamma) = \pm 2\arctg(1) = \pm 2\frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2};$$

$$z = e^{j\varphi(\Omega)} = e^{\pm j\pi/2} = \pm j$$

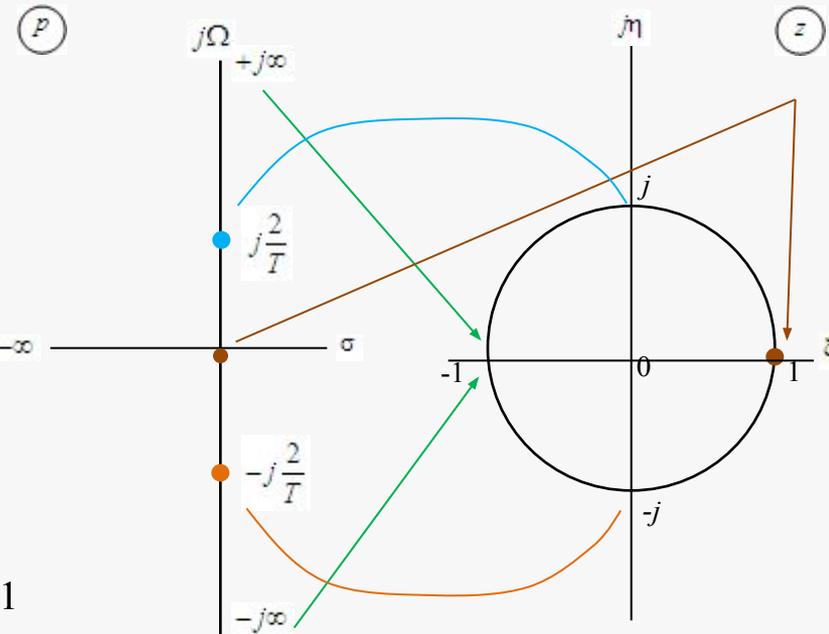


Рис. 1. Отображение  $p$ -плоскости на  $z$ -плоскость при билинейном  $Z$ -преобразовании



# Второй учебный вопрос

## 1. Однозначное отображение $p$ -плоскости на $z$ -плоскость

Полная ось  $p$  однозначно отображается в единичную окружность:

$$z = re^{j\omega T} \Big|_{r=1} = e^{j\omega T}; \quad p = \sigma + j\Omega \Big|_{\sigma=0} = j\Omega$$

$$z = \frac{\gamma + j\Omega}{\gamma - j\Omega} = re^{j\arg(z)} = \sqrt{\frac{\gamma^2 + \Omega^2}{\gamma^2 + \Omega^2}} e^{j\varphi(\Omega)} = 1e^{j\varphi(\Omega)}$$

$$\arg(z) = \varphi(\Omega) = \arctg \frac{\Omega}{\gamma} - \arctg \frac{-\Omega}{\gamma} = 2\arctg \frac{\Omega}{\gamma} = 2\arctg \frac{\Omega T}{2}$$

- Отображение точек на  $Z$ -плоскость:

$\Omega = 0; \quad \varphi(\Omega) = 0; \quad z = e^{j\varphi(\Omega)} = 1$

$\Omega = \pm\infty; \quad \varphi(\Omega) = \pm 2\arctg(\infty) = \pm 2\frac{\pi}{2} = \pm\pi; \quad z = e^{j\varphi(\Omega)} = e^{\pm j\pi} = -1$

$\Omega = \pm \frac{2}{T} = \pm\gamma; \quad \varphi(\Omega) = 2\arctg(\pm \gamma/\gamma) = \pm 2\arctg(1) = \pm 2\frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2};$

$z = e^{j\varphi(\Omega)} = e^{\pm j\pi/2} = \pm j$

- Левая  $p$ -полуплоскость однозначно отображается внутрь единичного круга, а правая  $p$ -полуплоскость — вне его

$$r = |z| = \left| \frac{\gamma + \sigma + j\Omega}{\gamma - \sigma - j\Omega} \right| = \sqrt{\frac{(\gamma + \sigma)^2 + \Omega^2}{(\gamma - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

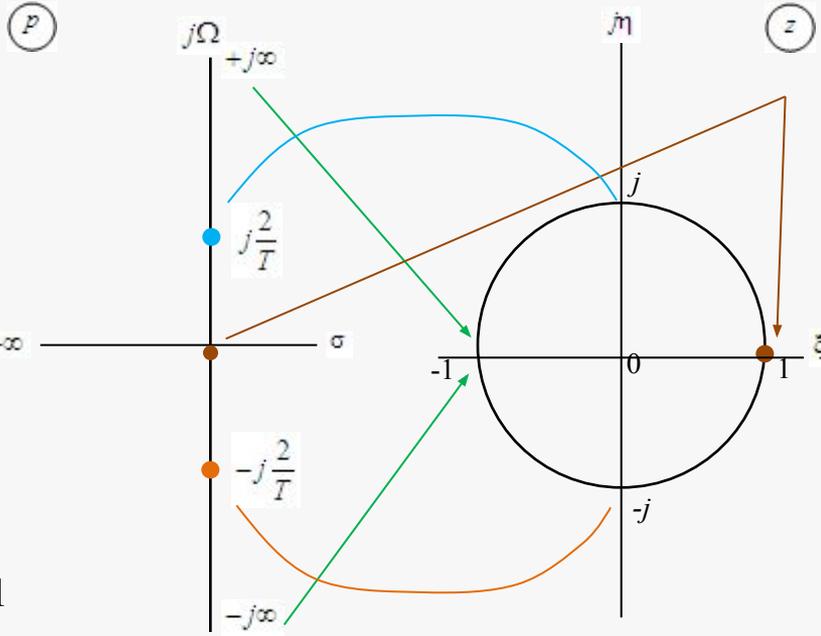
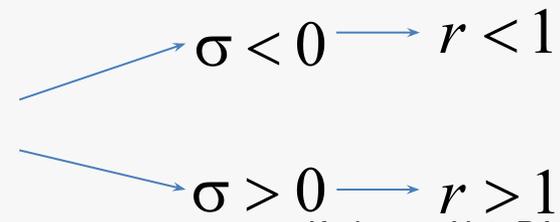


Рис. 1. Отображение  $p$ -плоскости на  $z$ -плоскость при билинейном  $Z$ -преобразовании

# Второй учебный вопрос



## 1. Однозначное отображение $p$ -плоскости на $z$ -плоскость

Числовая ось однозначно отображается в единичную окружность:

$$z = re^{j\omega T} \Big|_{r=1} = e^{j\omega T}; \quad p = \sigma + j\Omega \Big|_{\sigma=0} = j\Omega$$

$$z = \frac{\gamma + j\Omega}{\gamma - j\Omega} = re^{j\arg(z)} = \sqrt{\frac{\gamma^2 + \Omega^2}{\gamma^2 + \Omega^2}} e^{j\varphi(\Omega)} = 1e^{j\varphi(\Omega)}$$

$$\arg(z) = \varphi(\Omega) = \arctg \frac{\Omega}{\gamma} - \arctg \frac{-\Omega}{\gamma} = 2\arctg \frac{\Omega}{\gamma} = 2\arctg \frac{\Omega T}{2}$$

• Отображение точек на  $Z$ -плоскость:  
 $\Omega = 0; \quad \varphi(\Omega) = 0; \quad z = e^{j\varphi(\Omega)} = 1$

$\Omega = \pm\infty; \quad \varphi(\Omega) = \pm 2\arctg(\infty) = \pm 2\frac{\pi}{2} = \pm\pi; \quad z = e^{j\varphi(\Omega)} = e^{\pm j\pi} = -1$

$\Omega = \pm \frac{2}{T} = \pm\gamma; \quad \varphi(\Omega) = 2\arctg(\pm \gamma/\gamma) = \pm 2\arctg(1) = \pm 2\frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2};$

$$z = e^{j\varphi(\Omega)} = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$$

• Левая  $p$ -полуплоскость однозначно отображается внутрь единичного круга, а правая  $p$ -полуплоскость — вне его

$$r = |z| = \left| \frac{\gamma + \sigma + j\Omega}{\gamma - \sigma - j\Omega} \right| = \sqrt{\frac{(\gamma + \sigma)^2 + \Omega^2}{(\gamma - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

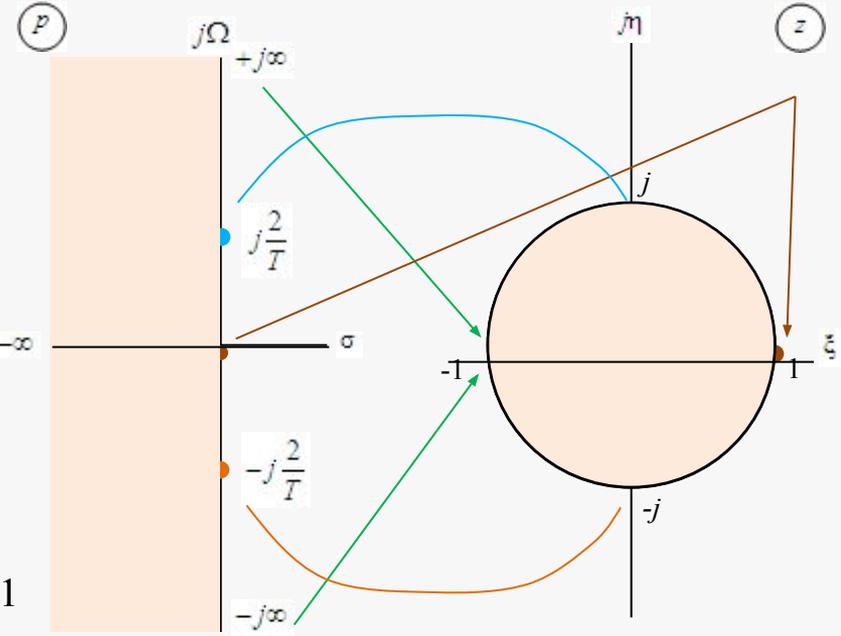
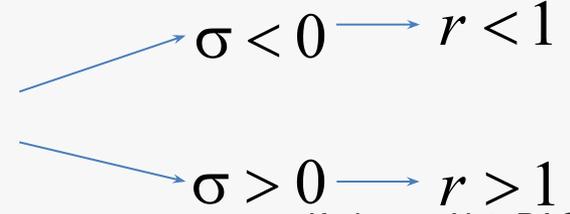


Рис. 1. Отображение  $p$ -плоскости на  $z$ -плоскость при билинейном  $Z$ -преобразовании

# Второй учебный вопрос

2. Цифровой фильтр устойчив, если устойчив его аналоговый прототип.
3. Соотношение между аналоговыми  $\Omega$  и цифровыми  $\omega$  частотами принципиально нелинейно, т. е. шкала частот деформируется.

$$p = j\Omega; \quad z = e^{j\omega T}$$

$$j\Omega = \frac{2(1 - e^{-j\omega T})}{T(1 + e^{-j\omega T})} = \frac{2e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{T e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})} = j \frac{2(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{T(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})}$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}; \quad \omega = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \frac{\Omega T}{2}$$

# Второй учебный вопрос

2. Цифровой фильтр устойчив, если устойчив его аналоговый прототип.
3. Соотношение между аналоговыми  $\Omega$  и цифровыми  $\omega$  частотами принципиально нелинейно, т. е. шкала частот деформируется.

$$p = j\Omega; \quad z = e^{j\omega T}$$

$$j\Omega = \frac{2(1 - e^{-j\omega T})}{T(1 + e^{-j\omega T})} = \frac{2e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{T e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})} = j \frac{2(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{T(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})}$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}; \quad \omega = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \frac{\Omega T}{2}$$

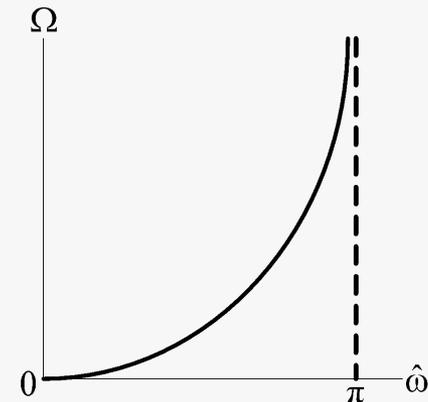


Рис. 2. Связь между аналоговыми и цифровыми частотами

# Второй учебный вопрос

2. Цифровой фильтр устойчив, если устойчив его аналоговый прототип.
3. Соотношение между аналоговыми  $\Omega$  и цифровыми  $\omega$  частотами принципиально нелинейно, т. е. шкала частот деформируется.

$$p = j\Omega; \quad z = e^{j\omega T}$$

$$j\Omega = \frac{2(1 - e^{-j\omega T})}{T(1 + e^{-j\omega T})} = \frac{2e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{Te^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})} = j \frac{2(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{T(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})}$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}; \quad \omega = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \frac{\Omega T}{2}$$

4. Сохраняются свойства оптимальности АЧХ аналогового прототипа вследствие однозначности отображения частотной оси в единичную окружность.

5. Порядок цифрового фильтра равен порядку аналогового прототипа, т. е. количество их полюсов одинаково.

Количество нулей ЦФ совпадает с количеством нулей прототипа, учитывая и нуль прототипа на бесконечности.

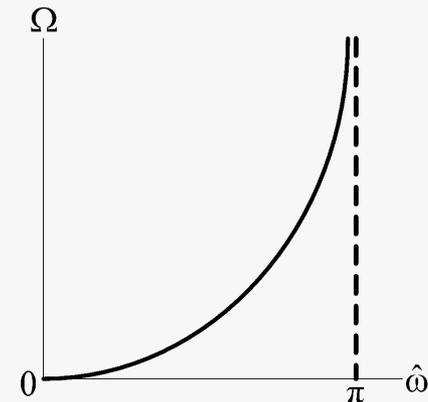


Рис. 2. Связь между аналоговыми и цифровыми частотами



# Второй учебный вопрос

## Пример 1

$$H(p) = \frac{1}{p+a};$$

$$p_* = -a; \quad p_{\infty} = \infty$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{\gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a} = \frac{1+z^{-1}}{(\gamma+a) - (\gamma-a)z^{-1}}$$

$$z_* = \frac{\gamma-a}{\gamma+a}; \quad z_{\infty} = -1$$

# Второй учебный вопрос

## Пример 1

$$H(p) = \frac{1}{p+a};$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{\gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a} = \frac{1+z^{-1}}{(\gamma+a) - (\gamma-a)z^{-1}}$$

$$p_* = -a; \quad p_{\infty} = \infty$$

$$z_* = \frac{\gamma-a}{\gamma+a}; \quad z_{\infty} = -1$$

6. Деформация шкалы частот означает, что метод билинейного Z-преобразования:
- пригоден лишь в тех случаях, когда требования к АЧХ фильтра-прототипа задаются ступенчатой функцией частоты, что свойственно частотно-избирательным фильтрам (НЧ, ВЧ, ПФ, РФ);
  - не пригоден для синтеза корректирующих фильтров (фильтров с произвольными АЧХ), фильтров с линейной ФЧХ, хотя бы прототип и обладал таким свойством, а также для сохранения импульсной характеристики прототипа: ни фазочастотная, ни импульсная характеристики аналогового прототипа не сохраняются.



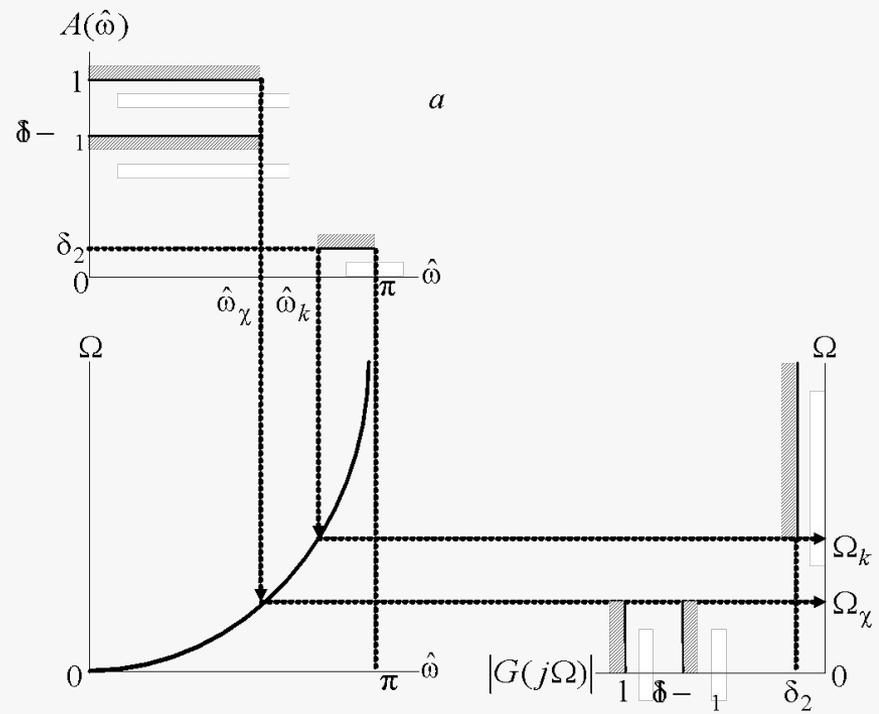
# Третий учебный вопрос

## Методика синтеза цифрового фильтра при билинейном $Z$ - преобразовании



# Третий учебный вопрос

1. Задаются требования к цифровому фильтру (рис. 3, а) с указанием типа аппроксимации АЧХ
2. Формулируются требования к аналоговому прототипу (рис. 3, б, в).



**Рис. 3.** Задание требований к цифровому фильтру и аналоговому прототипу: требования к ЦФ (а), преобразование цифровых частот в аналоговые (б), требования к аналоговому прототипу (в)

# Третий учебный вопрос

1. Задаются требования к цифровому фильтру (рис. 3, а) с указанием типа аппроксимации АЧХ

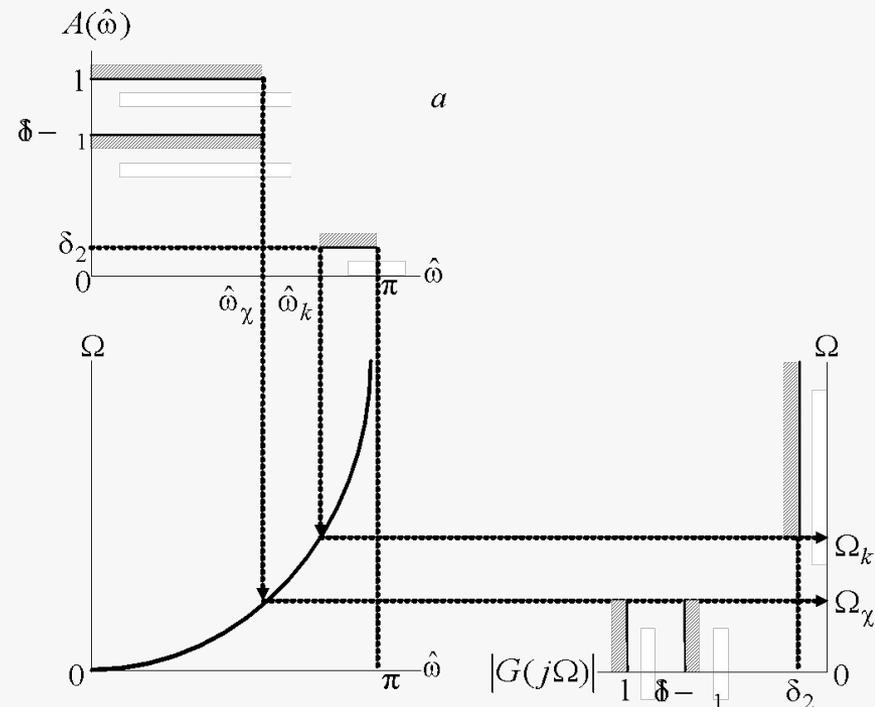
2. Формулируются требования к аналоговому прототипу (рис. 3, б, в).

3. Рассчитываются по справочнику или аналитически (по формулам) нули и полюсы прототипа:

4. Нули и полюсы прототипа пересчитываются в z-область по формуле

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p}$$

5. По комплексно-сопряженным нулям  $z_{\mathbb{N}(k+1)} = z_{\mathbb{N}k}^*$  и комплексно-сопряженным полюсам  $z_{*(k+1)} = z_{*k}^*$  формируются полиномы второй степени с вещественными коэффициентами, которые затем используются в качестве числителей и знаменателей биквадратных звеньев соответственно.



**Рис. 3.** Задание требований к цифровому фильтру и аналоговому прототипу: требования к ЦФ (а), преобразование цифровых частот в аналоговые (б), требования к аналоговому прототипу (в)



# Третий учебный вопрос

$$\left. \begin{aligned} z_{*k} &= \xi_{*k} + j\eta_{*k}; \\ z_{*k+1} &= \xi_{*k} - j\eta_{*k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1 + z_{*k}z^{-1})(1 + z_{*k+1}z^{-1}) = 1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2};$$

$$a_{1k} = -2\xi_{*k}; \quad a_{2k} = \xi_{*k}^2 + \eta_{*k}^2$$

# Третий учебный вопрос

$$\left. \begin{aligned} z_{*k} &= \xi_{*k} + j\eta_{*k}; \\ z_{*k+1} &= \xi_{*k} - j\eta_{*k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1 + z_{*k}z^{-1})(1 + z_{*k+1}z^{-1}) = 1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2};$$

$$a_{1k} = -2\xi_{*k}; \quad a_{2k} = \xi_{*k}^2 + \eta_{*k}^2$$

6. По правилу близости добротностей нуля и полюса формируются  $K/2$  биквадратных звеньев вида

$$H_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

$$Q_k = \frac{r_k \hat{\omega}_k}{1 - r_k^2}$$

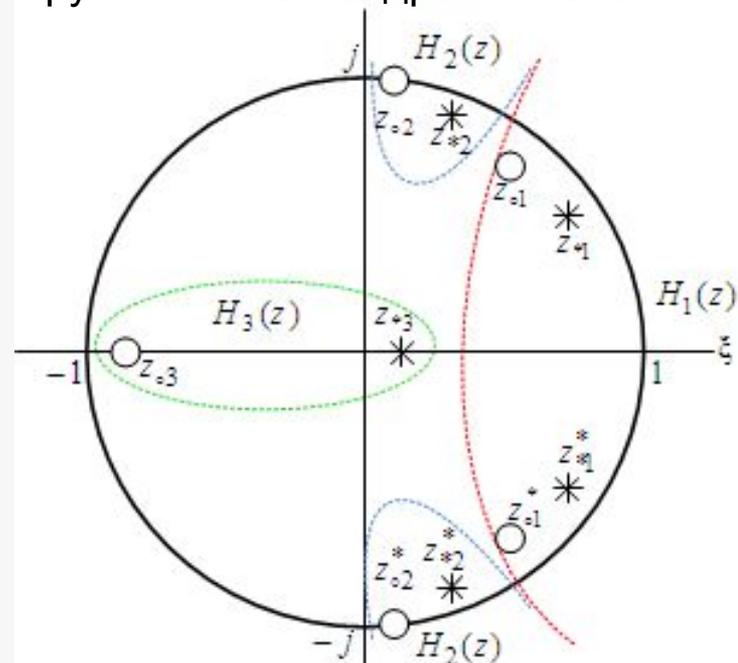


Рис. 4. Принцип объединения нулей и полюсов

в биквадратные звенья

Кафедра №2, ВАС

# Третий учебный вопрос

$$\left. \begin{aligned} z_{*k} &= \xi_{*k} + j\eta_{*k}; \\ z_{*k+1} &= \xi_{*k} - j\eta_{*k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1 + z_{*k}z^{-1})(1 + z_{*k+1}z^{-1}) = 1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2};$$

$$a_{1k} = -2\xi_{*k}; \quad a_{2k} = \xi_{*k}^2 + \eta_{*k}^2$$

6. По правилу близости добротностей нуля и полюса формируются  $K/2$  биквадратных звеньев вида

$$H_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad Q_k = \frac{r_k \hat{\omega}_k}{1 - r_k^2}$$

$$Q_1 = \frac{r_1 \hat{\omega}_1}{1 - r_1^2} = \frac{0,8 \cdot \pi/6}{1 - 0,64} \approx 1,16$$

$$Q_3 = \frac{r_3 \hat{\omega}_3}{1 - r_3^2} = \frac{0,21 \cdot 0}{1 - 0,0441} = 0$$

$$Q_2 = \frac{r_2 \hat{\omega}_2}{1 - r_2^2} = \frac{0,85 \cdot 0,4\pi}{0,2775} \approx 3,85$$

$$Q_3 < Q_1 < Q_2$$

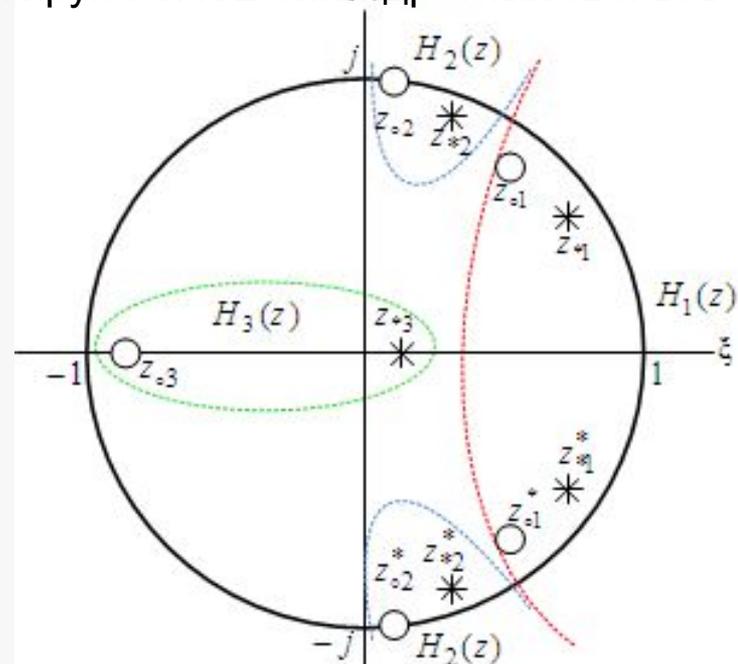


Рис. 4. Принцип объединения нулей и полюсов

# Третий учебный вопрос

$$\left. \begin{aligned} z_{*k} &= \xi_{*k} + j\eta_{*k}; \\ z_{*k+1} &= \xi_{*k} - j\eta_{*k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1 + z_{*k}z^{-1})(1 + z_{*k+1}z^{-1}) = 1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2};$$

$$a_{1k} = -2\xi_{*k}; \quad a_{2k} = \xi_{*k}^2 + \eta_{*k}^2$$

6. По правилу близости добротностей нуля и полюса формируются  $K/2$  биквадратных звеньев вида

$$H_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad Q_k = \frac{r_k \hat{\omega}_k}{1 - r_k^2}$$

$$Q_1 = \frac{r_1 \hat{\omega}_1}{1 - r_1^2} = \frac{0,8 \cdot \pi/6}{1 - 0,64} \approx 1,16$$

$$Q_3 = \frac{r_3 \hat{\omega}_3}{1 - r_3^2} = \frac{0,21 \cdot 0}{1 - 0,0441} = 0$$

$$Q_2 = \frac{r_2 \hat{\omega}_2}{1 - r_2^2} = \frac{0,85 \cdot 0,4\pi}{0,2775} \approx 3,85$$

$$Q_3 < Q_1 < Q_2$$

$$H(z) = H_3(z)H_1(z)H_2(z)$$

8. Для каждого звена, во избежание переполнения его сумматора, рассчитывается коэффициент масштабирования

$$\mu_k$$

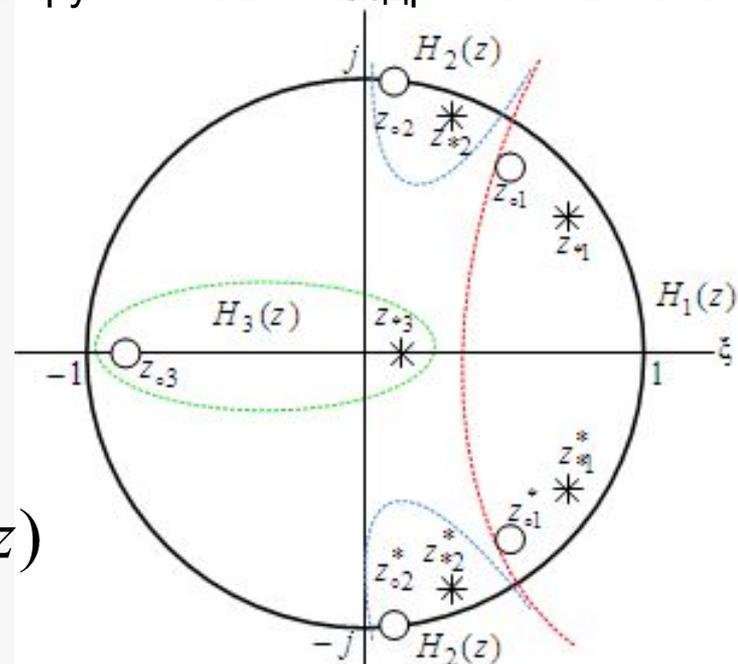


Рис. 4. Принцип объединения нулей и полюсов

в биквадратные звенья



# Заключение

Изученный метод синтеза БИХ-фильтров используется очень широко, в том числе и для синтеза цифровых фазовых корректоров. Однако и у него есть свои ограничения на применения: невозможно синтезировать фильтры, согласованные с сигналом, амплитудные корректоры.



***ЛЕКЦИЯ ЗАВЕРШЕНА!***

