Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка

- Однородные дифференциальные уравнения
- Линейные дифференциальные уравнения
- Уравнения Бернулли

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $y = f(x, y)$ называется ***однородной функцией*** n – ого порядка, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель k вся функция умножится на k^n:

$$f(k \cdot x; k \cdot y) = k^n \cdot f(x; y)$$

Например, функция $f(x; y) = x^2 - 2xy$

является однородной функцией второго порядка, так как:

$$f(k \cdot x; k \cdot y) = (kx)^2 - 2(kx)(ky) = k^2 \cdot (x^2 - 2xy) = k^2 \cdot f(x; y)$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x; y) \qquad (1)$$

называется ***однородным***, если $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Однородное дифференциальное уравнение вида *(1)* приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки:

$$\frac{y}{x} = t; \quad y = xt;$$

$$y' = t' \cdot x + t$$

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \qquad (2)$$

Уравнение *(2)* будет однородным, если $P(x;\,y)$ и $Q(x;\,y)$ – однородные функции одинакового порядка.

При интегрировании уравнения вида *(2)* можно сначала привести его к виду *(1)* или сразу сделать подстановку:

$$y = xt; \qquad dy = x \cdot dt + t \cdot dx$$

Пример.

$$\left(x^2-y^2\right)\cdot dx+2xy\cdot dy=0$$

Уравнение является однородным, так как функции:

$P(x;y)=x^2-y^2;\quad Q(x;y)=2xy$ *- однородные второго порядка*

Пусть: $y=xt;\quad dy=x\cdot dt+t\cdot dx$

$$\left(x^2-(xt)^2\right)\cdot dx+2x(xt)\cdot(xdt+tdx)=0\ \Longrightarrow$$

$$x^2dx-x^2t^2dx+2x^3tdt+2x^2t^2dx=0\qquad\Longrightarrow$$

$$x^2(1+t^2)dx=-2x^3tdt\quad\Longrightarrow\int\frac{dx}{x}=\int-\frac{2tdt}{1+t^2}\ \Longrightarrow$$

$$\ln|x|=-\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{1+t^2}\ \Longrightarrow\ln|x|=-\ln\left|t^2+1\right|+\ln C\ \Longrightarrow x=\frac{C}{t^2+1}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{C=x\cdot\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)}$$

Линейные дифференциальные уравнения

ДУ первого порядка называется ***линейным***, если его можно записать в виде:

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)} \qquad (3)$$

<u>Метод Бернулли.</u>

Решение уравнения ищется в виде произведения двух функций, то есть с помощью подстановки:

$$\boxed{y = u \cdot v}$$

Где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции, причем одна из них произвольная функция, не равная нулю.

Подставим в уравнение (3): $y = u \cdot v \;\Rightarrow\; y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u' \cdot v + \left[u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v\right] = q(x) \quad \Rightarrow$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + p(x) \cdot v\right) = q(x) \qquad (*)$$

Подберем функцию $v(x)$ так, чтобы выражение, стоящее в скобках было равно нулю, то есть решим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x) \cdot v = 0$$

Подставим найденную функцию $v(x)$ в уравнение $(*)$

$$u' \cdot v + u \quad 0 \qquad) = q(x) \;\Rightarrow\; u' \cdot v = q(x)$$

Получим еще одно уравнение с разделяющимися переменными, решив которое найдем функцию $u(x)$

Пример.

$$y' + 2xy = 4x$$

Положим: $y = u \cdot v; \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$= 0$

$$u' \cdot v + \left[u \cdot v' + 2x \cdot u \cdot v\right] = 4x \Rightarrow u' \cdot v + u \cdot \left(v' + 2x \cdot v\right) = 4x \Rightarrow$$

$$v' + 2x \cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2x \cdot v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int 2x dx \Rightarrow$$

$$\ln|v| = -x^2 \Rightarrow \boxed{v = e^{-x^2}}$$

*При нахождении функции v(x) произвольная постоянная **С** не прибавляется*

$$u' \cdot v = 4x \Rightarrow u' \cdot e^{-x^2} = 4x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \cdot e^{x^2} \Rightarrow$$

$$\int du = \int 4x \cdot e^{x^2} dx \Rightarrow u = 2\int e^{x^2} d\left(x^2\right) \Rightarrow \boxed{u = 2e^{x^2} + C}$$

*При нахождении функции u(x) произвольная постоянная **С** прибавляется*

Таким образом, общее решение уравнения:

$$y = u \cdot v = \left(2e^{x^2} + C\right) \cdot e^{-x^2} \Rightarrow \boxed{y = 2 + C \cdot e^{-x^2}}$$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n} \quad (4)$$

Называется ***уравнением Бернулли***.

Уравнение Бернулли решается также, как и линейное уравнение методом Бернулли.