

Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка

- Однородные дифференциальные уравнения
- Линейные дифференциальные уравнения
- Уравнения Бернулли

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $y = f(x, y)$ называется **однородной функцией** n – ого порядка, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель k вся функция умножится на k^n :

$$f(k \cdot x; k \cdot y) = k^n \cdot f(x; y)$$

Например, функция $f(x; y) = x^2 - 2xy$

является однородной функцией второго порядка, так как:

$$f(k \cdot x; k \cdot y) = (kx)^2 - 2(kx)(ky) = k^2 \cdot (x^2 - 2xy) = k^2 \cdot f(x; y)$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x; y) \quad (1)$$

называется **однородным**, если $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Однородное дифференциальное уравнение вида (1) приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки:

$$\frac{y}{x} = t; \quad y = xt;$$

$$y' = t' \cdot x + t$$

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) будет однородным, если $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – однородные функции одинакового порядка.

При интегрировании уравнения вида (2) можно сначала привести его к виду (1) или сразу сделать подстановку:

$$y = xt; \quad dy = x \cdot dt + t \cdot dx$$

Пример.

$$(x^2 - y^2) \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$$

Уравнение является однородным, так как функции:

$$P(x; y) = x^2 - y^2; \quad Q(x; y) = 2xy \quad - \text{однородные второго порядка}$$

$$\text{Пусть: } y = xt; \quad dy = x \cdot dt + t \cdot dx$$

$$(x^2 - (xt)^2) \cdot dx + 2x(xt) \cdot (xdt + tdx) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 dx - x^2 t^2 dx + 2x^3 t dt + 2x^2 t^2 dx = 0 \Rightarrow$$

$$x^2(1 + t^2) dx = -2x^3 t dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -\frac{2t dt}{1 + t^2} \Rightarrow$$

$$\ln|x| = -\int \frac{d(t^2 + 1)}{1 + t^2} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|t^2 + 1| + \ln C \Rightarrow x = \frac{C}{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow C = x \cdot \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right)$$

Линейные дифференциальные уравнения

ДУ первого порядка называется *линейным*, если его можно записать в виде:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (3)$$

Метод Бернулли.

Решение уравнения ищется в виде произведения двух функций, то есть с помощью подстановки:

$$y = u \cdot v$$

Где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции, причем одна из них произвольная функция, не равная нулю.

Подставим в уравнение (3): $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u' \cdot v + [u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v] = q(x) \Rightarrow$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = q(x) \quad (*)$$

Подберем функцию $v(x)$ так, чтобы выражение, стоящее в скобках было равно нулю, то есть решим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x) \cdot v = 0$$

Подставим найденную функцию $v(x)$ в уравнение (*)

$$u' \cdot v + u \cdot 0 = q(x) \Rightarrow u' \cdot v = q(x)$$

Получим еще одно уравнение с разделяющимися переменными, решив которое найдем функцию $u(x)$

Пример.

$$y' + 2xy = 4x$$

Положим: $y = u \cdot v$; $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u' \cdot v + (u \cdot v' + 2x \cdot u \cdot v) = 4x \Rightarrow u' \cdot v + u \cdot (v' + 2x \cdot v) = 4x \Rightarrow$$

$$v' + 2x \cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2x \cdot v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int 2x dx \Rightarrow$$

$$\ln|v| = -x^2 \Rightarrow v = e^{-x^2}$$

При нахождении функции $v(x)$
произвольная постоянная C

$$u' \cdot v = 4x \Rightarrow u' \cdot e^{-x^2} = 4x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \cdot e^{x^2}$$

$$\int du = \int 4x \cdot e^{x^2} dx \Rightarrow u = 2 \int e^{x^2} d(x^2) \Rightarrow u = 2e^{x^2} + C$$

Таким образом, общее решение уравнения:

$$y = u \cdot v = (2e^{x^2} + C) \cdot e^{-x^2} \Rightarrow y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n \quad (4)$$

Называется **уравнением Бернулли**.

Уравнение Бернулли решается также, как и линейное уравнение методом Бернулли.