ФГБОУ ВО «Курский государственный медицинский университет» Минздрава России

МЕДИКО-ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Дисциплина «**Математика**»

Специальность *33.02.01 Фармация*

Лекция №5. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики.

Лектор: преподаватель
Пыжова Евгения Валерьевна

Курск 2020

План

1. События.
2. Комбинации событий. Противоположные события.
3. Вероятность события.
4. Сложение вероятностей.
5. Независимые события. Умножение вероятностей.
6. Статистическая вероятность.
7. Элементы математической статистики

1.
События.

Всё, что происходит или не происходит в реальной действительности, называют явлениями, или событиями.

Раздел математики, называемый **теорией вероятностей**, занимается исследованием закономерностей в массовых явлениях.

Событие называют случайным по отношению к некоторому испытанию (опыту), если в ходе этого испытания оно может произойти, а может и не произойти.

Например, если испытание состоит в одном бросании игрального кубика, то в ходе этого испытания возможны следующие события (исходы испытания): на верхней грани кости окажется число 1, число 2... число 6.

Случайные события обычно обозначаются начальными буквами латинского алфавита: A, B, C и др.

Событие называют достоверным по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие обязательно произойдёт.

Например, достоверным событием будет появление одного из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игральной кости.

Событие называют невозможным по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие заведомо не произойдёт.

Например, невозможным событием является выпадение числа 7 при бросании обычного игрального кубика.

В результате некоторого испытания обязательно происходит одно из взаимоисключающих друг друга событий, причём каждое из них не разделяется на более простые. Такие события называют элементарными событиями (или элементарными исходными испытаниями).

Пример:

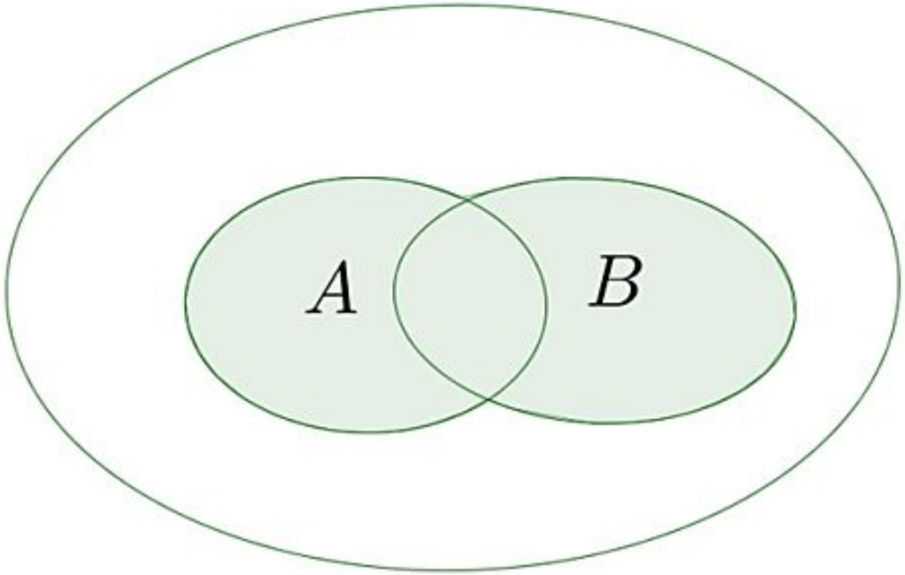
при бросании монеты существуют два элементарных события: появление орла и появление решки.

Рассмотренные в последнем примере события **несовместны** (появление одного из них исключает появление другого), **единственно возможны** (обязательно произойдёт одно из них) и **равновозможны** (у каждого из них шансы появиться равны).

2. Комбинации событий. Противоположные события.

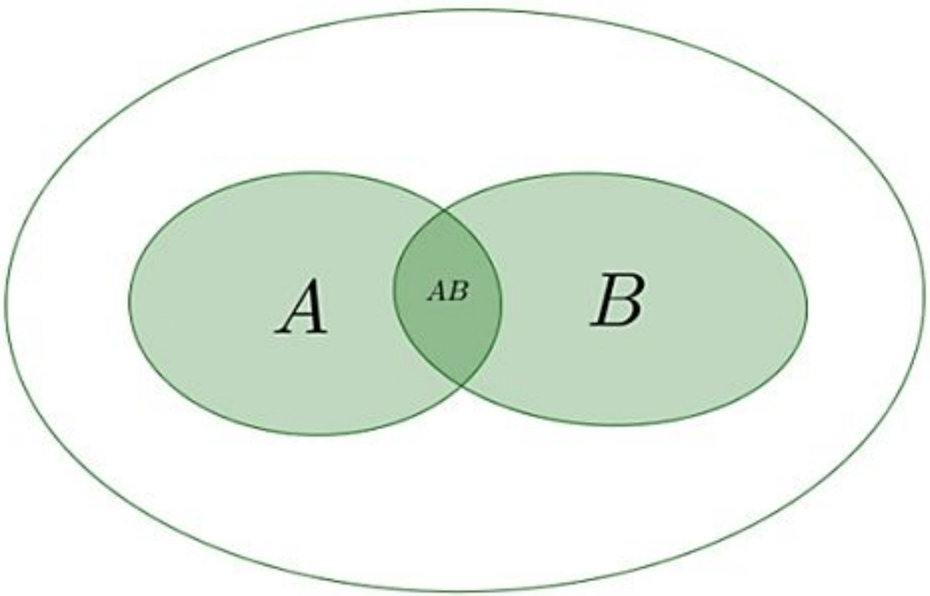
Суммой (объединением) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A+B$ (или $A \cup B$).

На рисунке с помощью кругов Эйлера проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — $A+B$ событие.



Произведением (пересечением) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходят оба эти события. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).

Рисунок иллюстрирует с помощью кругов Эйлера произведение событий A и B: темнее закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие AB.

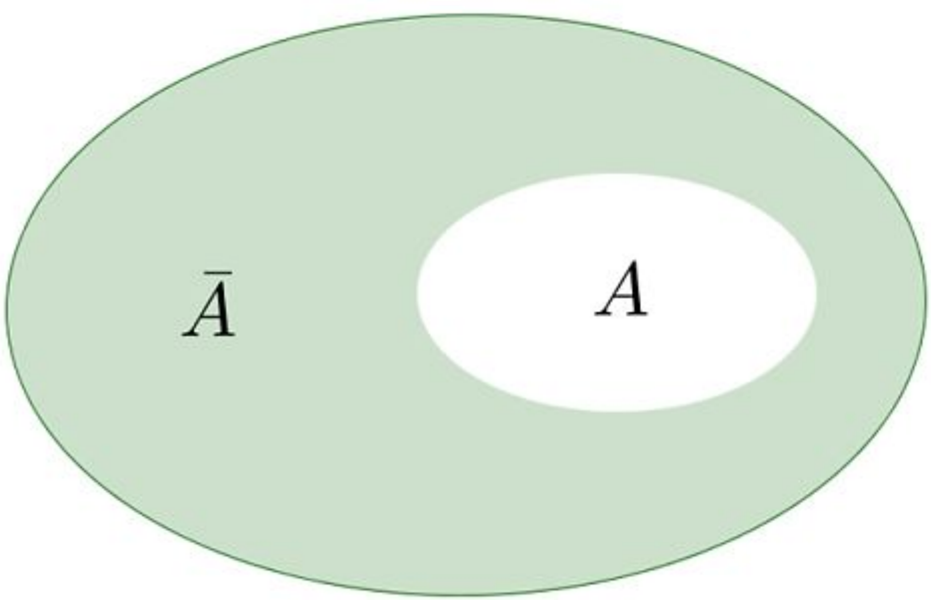


События A и B называют равными (равносильными) и пишут $A = B$, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B.

Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, а событие B — выпало наибольшее из возможных чисел, то $A = B$.

Событие $\overline{A}$ называют противоположным событию A, если событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

На рисунке проиллюстрирована взаимосвязь событий A и $\overline{A}$ на множестве всех элементарных исходов испытания (событие $\overline{A}$ изображено закрашенной областью).



Теория вероятностей — это область математики, которая изучает случайные события и общие свойства событий, процессов.

В теории вероятностей эксперименты называются **опытами**, а возможные результаты — **исходами**.

Пример:

монету бросают три раза и записывают, какой стороной вверх она падает — гербом (г) или цифрой (ц). Найти множество исходов.

1-й бросок	*2-й бросок*	*3-й бросок*	*Исходы*
цифра	*цифра*	*цифра*	*ццц*
цифра	*цифра*	*герб*	*ццг*
цифра	*герб*	*цифра*	*цгц*
цифра	*герб*	*герб*	*цгг*
герб	*цифра*	*цифра*	*гцц*
герб	*цифра*	*герб*	*гцг*
герб	*герб*	*цифра*	*ггц*
герб	*герб*	*герб*	*ггг*

Множество исходов этого опыта состоит из 8 равносильно возможных исходов.

Любое утверждение о результате опыта, правильность которого возможно проверить, называется событием.

Например, события — это «выпадет цифра» и «выпадет герб».

События обозначаются большими буквами.
Например, событие A — выпадет цифра.

Событие, которое не может произойти, называется невозможным событием.

Например, при броске обычного игрового кубика выпадет 14 пунктов.

Событие, которое происходит всегда, называется достоверным событием.

Например, при броске монеты выпадет герб или цифра (других возможностей нет).

3. Вероятность события.

Если все исходы опыта одинаково возможны, то вероятность $P(A)$ любого события A можно вычислить по формуле:

$$P(A) = \frac{\text{количество исходов, благоприятных событию А}}{\text{количество всех возможных исходов}}.$$

Вероятность противоположного события можно вычислить по формуле: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Бросается игровой кубик. Событие A — выпадет цифра 2. Ранее уже было вычислено, что $P(A) = \frac{1}{6}$.

Противоположное событие $\overline{A}$ — не выпадет цифра 2 (т. е. выпадет 1, 3, 4, 5 или 6).

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Эту формулу удобно использовать, если у опыта много исходов.

Пример:

в корзине лежат 100 пронумерованных шариков. Какова вероятность, что не вынут шарик под номером 6?

Событие A — вынут мячик № 6.

Событие $\overline{A}$ — вынутый мячик не будет под номером 6.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

4. Сложение вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

События являются несовместными, или несовместимыми если появление одного из них исключает появление другого.

В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

Пример:

1 способ. *Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A+B$ — появление цветного шара. Очевидно, что*

$P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};$

$P(B)=\frac{4}{9}.$

Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}.$$

Следствие. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.* $P(A)+P(\overline{A})=1$.

5. Независимые события. Умножение вероятностей.

События A и B называются **независимыми**, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Событие A называется **зависимым** от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Часто о независимости событий удаётся судить на основании того, как организован опыт, в котором они происходят. Независимые события появляются тогда, когда опыт состоит из нескольких независимых испытаний (как, например, было в рассмотренном опыте с бросанием двух игральных костей). Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий A и B проверяется с помощью формулы:

события A и B называют **независимыми**, если выполняется равенство $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример:

рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A *— на первой кости выпало* 5 *очков,* B *— на второй кости выпало* 5 *очков. Выясним, будут ли события* A *и* B *независимыми.*

Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A*) не влияет на событие* B *и на его вероятность. И наоборот, наступление или не наступление события* B *не влияет на вероятность события* A*. Таким образом,*

$P(A)=\frac{1}{6}$ и $P(B)=\frac{1}{6}$.

Событие AB *состоит в совместном наступлении событий* A *и* B*. Элементарные исходы испытания — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания* $n=6\cdot 6=36$*. Среди них присутствует лишь одна пара (*5 *и* 5 *очков), благоприятствующая событию* AB*, т. е.* $m=1$*. Таким образом,*

$P(AB)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)$*, т. е. события* A *и* B *независимые.*

Рассмотрим испытание, в котором вероятность наступления случайного события A равна $P(A)$.

Обрати внимание!

Нам известна формула $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, где $\overline{A}$ — событие, противоположное событию A.

Значит, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Будем рассматривать исходное испытание как испытание только с двумя возможными исходами: один состоит в том, что событие A произойдёт, а другой состоит в том, что событие A не произойдёт, т. е. произойдёт событие $\overline{A}$. Для краткости назовём первый исход (наступление события A) «успехом», а второй исход (наступление события $\overline{A}$) — «неудачей». Вероятность «успеха» обозначим $P(A) = p$, а вероятность «неудачи» обозначим q; $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$.

Схема Бернулли

Рассматривают n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами: «успехом» и «неудачей». Вероятность «успеха» равна p, а вероятность «неудачи» равна q, $p+q=1$. Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что в этих n повторениях произойдёт ровно k «успехов».

Про n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами более кратко говорят, как об n *испытаниях Бернулли*. Точный ответ на поставленный вопрос даёт следующая теорема.

Теорема Бернулли

Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания вычисляется по формуле $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где p — вероятность «успеха», а $q=1-p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

6. Статистическая вероятность.

Проведём эксперимент:
1) бросить игровой кубик 200 раз и каждый раз записывать количество выпавших пунктов;
2) сосчитать, в скольких случаях выпало 4 пункта.
Допустим, что после подсчётов результат 4 был 32 раза.
Что можно вычислить?

Если в N независимых опытах событие A осуществляется M раз, то M называется абсолютной частотой события A, а соотношение $\frac{M}{N}$ называется относительной частотой события A.

Относительная частота события $= \dfrac{\text{количество осуществления события}}{\text{количество экспериментов}}$.

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению $W(A) = \dfrac{M}{N}$.
В наших экспериментах событие A — выпали 4 пункта. Значит, по определению:
1) абсолютная частота события A равна 32;
2) относительная частота события А $= \dfrac{32}{200}$.

Статистической вероятностью называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

Различные исследования с большим числом однотипных испытаний проводили учёные в разные годы. Наблюдая за уменьшением амплитуды колебания относительных частот события около некоторого числа при увеличении количества испытаний, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654–1705) обосновал так называемый ***закон больших чисел***.

Можно считать достоверным тот факт, что при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события A стремится к некоторому числу — вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний.

В нашем эксперименте относительная частота события $\mathrm{A} = \dfrac{32}{200}$, или статистическая вероятность

$$P(A) \approx \frac{32}{200}.$$

Якоб Бернулли

Якоб Бернулли (нем. Jakob Bernoulli) родился 6 января 1655 года в городе Базель. Родители его были преуспевающими фармацевтами.


Якоб Бернулли

В юном возрасте увлекся математикой, изучал ее вначале самостоятельно, затем совершил много поездок по Европе, для того чтобы встретиться с великими математиками своего времени. Поддерживал отношения с Гуком Бойлем, Лейбницем.

Занимался аналитической геометрией, один из основоположников вариационного исчисления. Много сделал для развития теории рядов, дифференциального исчисления, теории чисел, в честь него названы «числа Бернулли».

Увлекался изучением теории вероятности, ввел большое количество современных терминов в этом разделе математики. Именно он сформулировал первый вариант закона больших чисел.

Определил практические варианты применения статистики и комбинаторики. Его именем названо одно из основополагающих в теории комбинаторики положений «распределение Бернулли».

Также увлек математикой своего брата Иоганна. Втроем с Лейбницем они долгое время вели переписку, развивая различные области математики.

Якоб Бернулли имел должность профессора математики и физики Базельского университета, был избран иностранным членом Парижской Академии наук.

Якоб Бернулли умер 16 августа 1705 года в Базеле в возрасте 50 лет. Его вклад в развитие математики трудно переоценить. Благодарные потомки назвали в его честь кратер на Луне.

Давайте вспомним известные вам примеры, в которых информируется об итогах обработанной информации. (Средний прожиточный минимум на данный период, средняя продолжительность жизни, средняя зарплата по области, по стране; средняя успеваемость по группе, по колледжу; среднемесячная температура воздуха и т.д.)

- Экономическая статистика изучает производство и потребление разнообразных видов продукции, изменение цен, спроса и предложения на товары, прогнозирует рост и падение производства и потребления, перевозку грузов и пассажиров различными видами транспорта, природные ресурсы и многое другое
- Медицинская статистика изучает эффективность различных лекарств и методов лечения, вероятность возникновения некоторого заболевания в зависимости от возраста, пола, наследственности, условий жизни, вредных привычек, прогнозирует распространение эпидемий.
- Демографическая статистика изучает рождаемость, численность населения, его состав (возрастной, национальный, профессиональный).
- Есть еще статистика финансовая, налоговая, биологическая и т.д.

1.Статистика – это ***научное направление*** (комплекс наук), объединяющее принципы и методы работы с числовыми данными, характеризующими массовые явления.
2. Статистика – это ***отрасль практической деятельности***, направленной на сбор, обработку, анализ статистических данных.
3. Статистика – это ***совокупность статистических данных***, характеризующих какое-нибудь явление или процесс (например, статистика рождаемости и смертности в России, статистика успеваемости учащихся и т.п.).

Математическая статистика – это раздел математики который занимается **разработкой методов сбора, описания и анализа экспериментальных результатов наблюдений, массовых случайных явлений**..

Математическая статистика – наука, основанная на законах теории вероятностей. Статистические методы обработки данных из самых разных областей жизни имеют много общего. Это позволило создать универсальные научно обоснованные методы статистических исследований и проверки статистических гипотез.

Статистические характеристики – это математические понятия, с помощью которых описываются отличительные особенности и свойства совокупности данных, полученных с помощью наблюдений или каким-то другим способом.

Значение характеристик состоит еще и в том, что они **«подсказывают», с каких позиций целесообразно анализировать** имеющуюся совокупность данных.

Сбор информации: происходит массово или выборочно. При этом используется: перепись населения, отчеты предприятий, текущий учет, опросы, анкетирование, интервьюирование, наблюдения, статистика больниц, загсов и т.д.

Фундаментальными понятиями математической статистики являются ***генеральная совокупность и выборка.*** Генеральную совокупность удобно изображать с использованием круговой диаграммы, выборку – с использованием части круговой диаграммы.

Способы образования выборочной совокупности: случайная (отбирая на удачу), механическая (отбирая через определенный интервал), типическая (случайные выборки из каждой группы), серийная (разбивается на непересекающиеся серии или группы).

Обработка собранной информации.

Статистическая информация о результатах наблюдений или экспериментов может быть представлена в различных формах.

Простейшей из них является запись в порядке их появления – запись в ряд, называемый ***простым статистическим рядом*** или ***выборкой.***

Отдельные значения, составляющие этот ряд, называют ***вариантами*** или просто данными.

Понятие объема ряда

Количество вариант в ряду ***n*** называют ***объемом ряда***, или объемом выборки.

Варианты в ряду могут иметь как различные, так и одинаковые значения.

Понятие ранжированного ряда

Составить ***ранжированный ряд*** - это значит записать варианты в порядке их возрастания.

Характеристики числового ряда

Средним арифметическим (или выборочным средним) ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

Модой (Мо) называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто.

Медианой ряда, состоящего из нечетного количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине, если этот ряд упорядочить.

Медианой ряда, состоящего из четного количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда, если этот ряд упорядочить.

Для того чтобы найти **медиану** ряда чисел, нужно сначала их упорядочить — составит **ранжированный ряд** (записать в порядке убывания).

Достоинством медианы является ее большая по сравнению со средним арифметическим **«устойчивость к ошибкам».**

Медиану используют вместо средней арифметической, когда крайние варианты упорядоченного ряда (наименьшая и наибольшая) по сравнению с остальными оказываются чрезмерно большими или чрезмерно малыми.

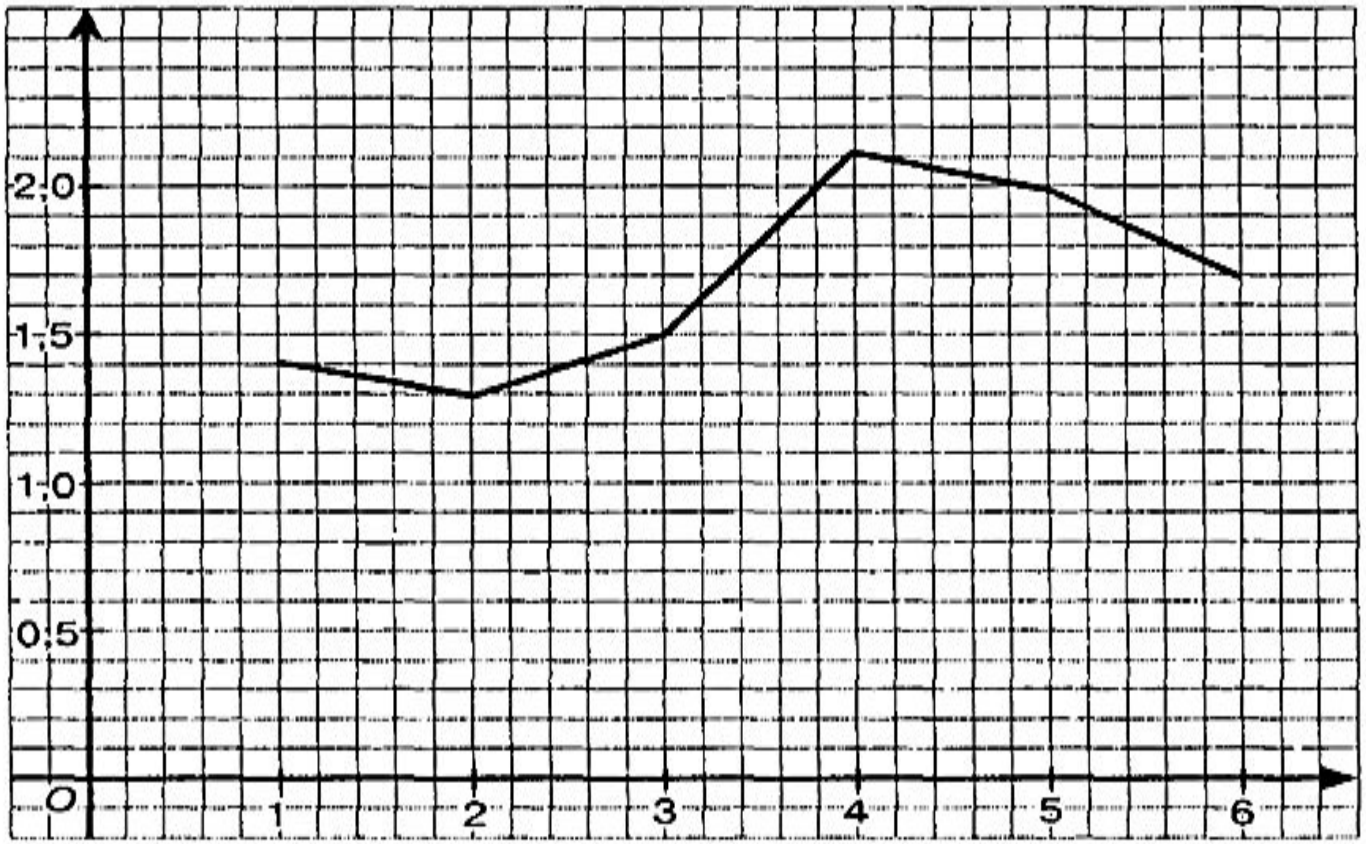
Статистические характеристики: среднее арифметическое, мода, медиана называются средними результатами измерений.
Обработанные результаты статистики можно демонстрировать графически.

Пример: В первом полугодии 2011 года завод получил прибыль в 10 млн. рублей. Распределение прибыли по месяцам показано в таблице

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Прибыль (млн р.)	1,4	1,3	1,5	2,1	2,0	1,7

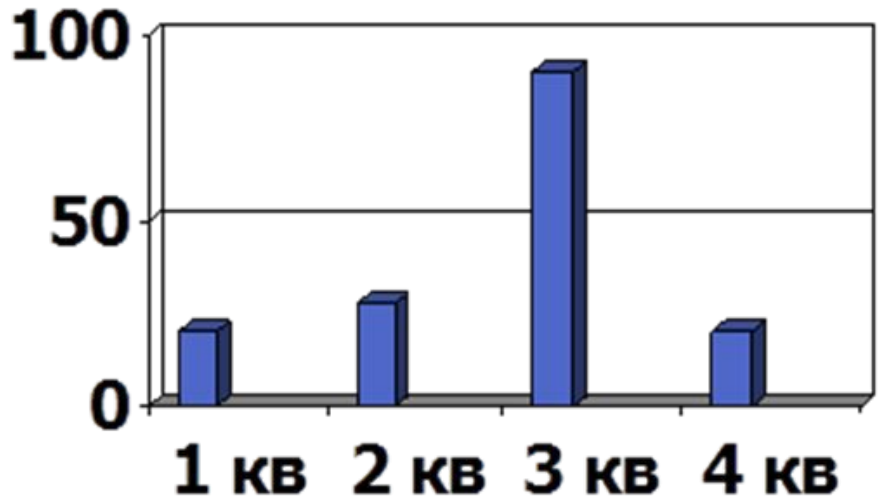
В координатной плоскости на оси абсцисс будем отмечать номер месяца (янв. – 1, февр. – 2 и т.д.). На оси ординат будем отмечать прибыль завода (в млн. руб.). Отметим точки: (1;1,4),(2;1,3),(3;1,5),(4;2,1),(5;2),(6;1,7) и соединим их последовательно отрезками.

Полученную ломаную линию называют ***полигоном частот.***

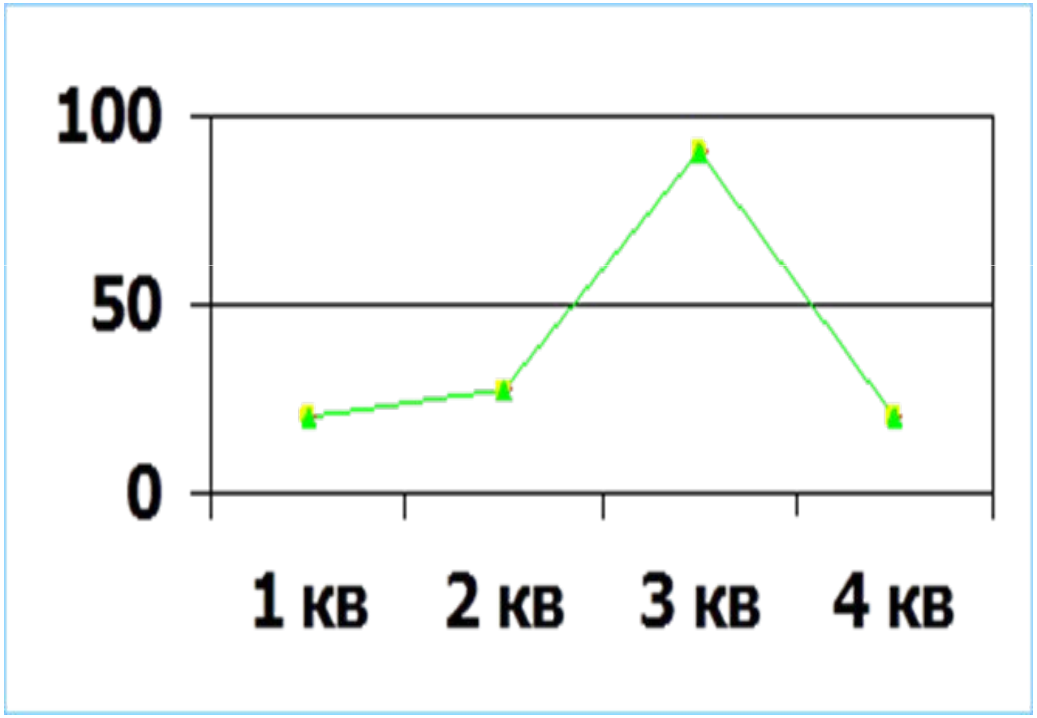


Графики статистического распределения

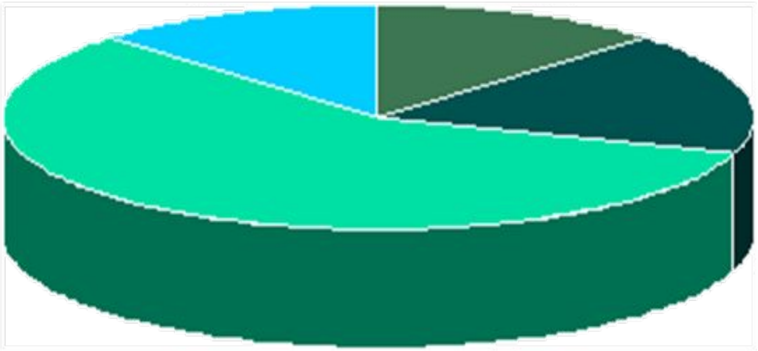
Распределение случайных величин можно задавать и демонстрировать графически.



Гистограмма – помогает наглядно сравнивать по величине несколько объектов.



Полигон частот – показывает промежутки убывания и возрастания, точки максимума и минимума.



Круговая диаграмма. Круговые диаграммы используют в тех случаях, когда нужно показать части какого-либо целого.

Существуют и другие статистические характеристики, которые называются характеристиками отклонения.
Средние характеристики числового ряда позволяют оценить его поведение «в среднем». Но это далеко не всегда полностью характеризует выборку.
Размах — это разность наибольшего и наименьшего значений ряда данных.

Чтобы получить представление о поведении числового ряда, помимо средних характеристик надо знать **характеристики разброса,** показывающие, насколько значения ряда различаются между собой, как сильно они «разбросаны» вокруг средних. Простейшей такой характеристикой является **размах.**

В реальных статистических исследованиях чаще используют другую характеристику разброса, которая сложнее вычисляется, но зато меньше подвержена колебаниям.

Так появилось понятие **дисперсии числового ряда**.
Дисперсией числового ряда называется среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего арифметического.

У дисперсии есть один существенный недостаток: если исходные значения ряда измеряются в каких-то единицах (например, в рублях), то у дисперсии эти единицы возводятся в квадрат (**«квадратные»** рубли).
Избавиться от таких странных единиц измерения можно, если использовать другую характеристику разброса — стандартное отклонение.
Стандартным (или средним квадратичным) отклонением числового ряда называется квадратный корень из дисперсии.

Основная литература

1. Омельченко, В. П. Математика : учебник / Омельченко В. П. - Москва : ГЭОТАР-Медиа, 2020. - 304 с. - ISBN 978-5-9704-5369-8. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785970453698.html
2. Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 с. — 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/81274.html

Дополнительные источники

1. Алпатов, А. В. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / А. В. Алпатов. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 с. — 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/80328.html

Периодические издания (журналы)

1. Математика в школе