Скалярное произведение векторов

Повторяем теорию:

- ***Как находят координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?***

$$\overrightarrow{AB}\left\{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right\}$$

- ***Как находят координаты середины отрезка?***

$$\frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{z_A + z_B}{2}$$

- ***Как находят длину вектора?***

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- ***Как находят расстояние между точками?***

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

- ***Как вы понимаете выражение «угол между векторами»?***

Решить задачи.

1) Дано: $A(-3;-2;4)$ $B(-4;3;2)$

Найти: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

$\sqrt{30}$

2) Дано: $A(2;-3;1)$ $B(4;-5;0)$ $C(5;0;-4)$ $D(7;-2;-3)$

Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$\overrightarrow{AB}\{2;-2;-1\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

3) Дано: **? Коллинеарны ли векторы** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$A(1;-3;4)$

$B(9;1;-2)$

$C(2;0;1)$

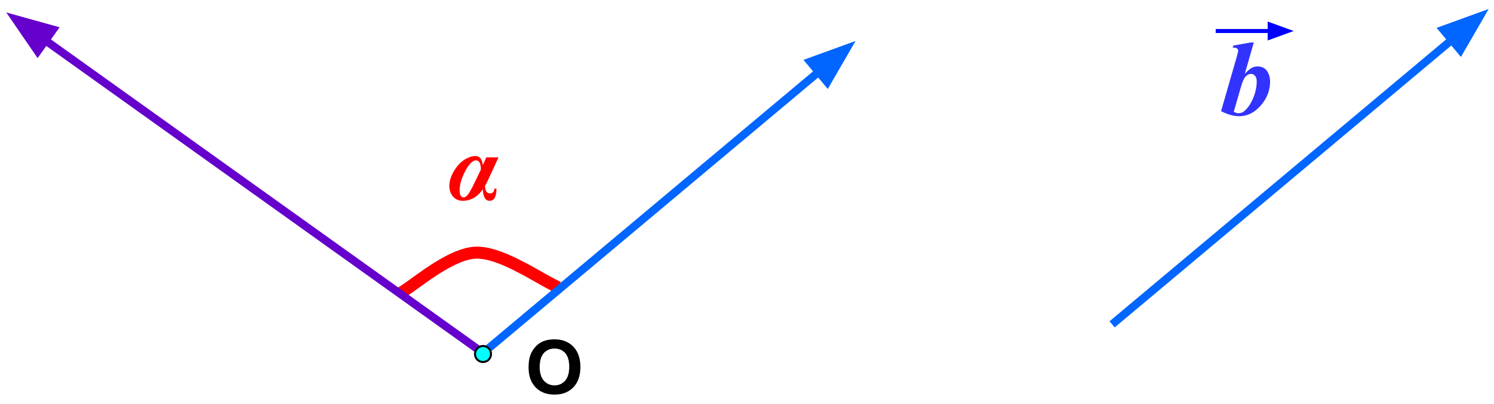
$D(4;-2;2)$

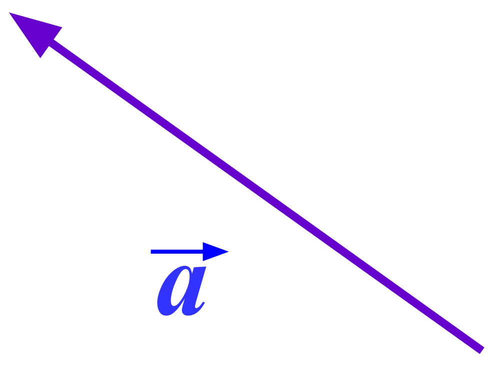
$\overrightarrow{AB}\{8;4;-6\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

Нет

ы е в е к т о р ы и м е ю т р а

Угол между векторами

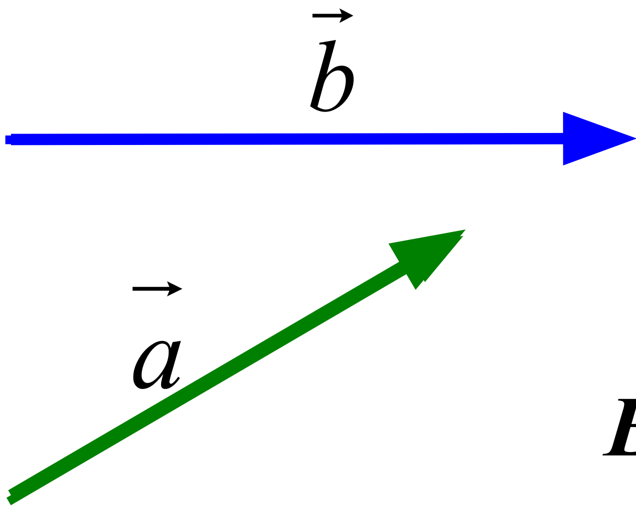




Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α .

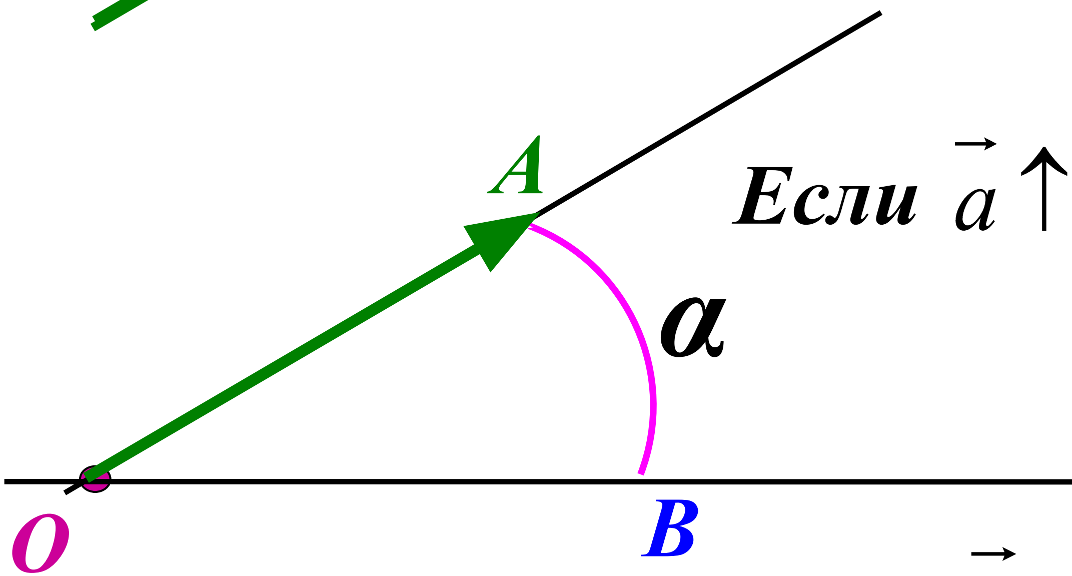
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$$

Угол между векторами.



$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \alpha$$

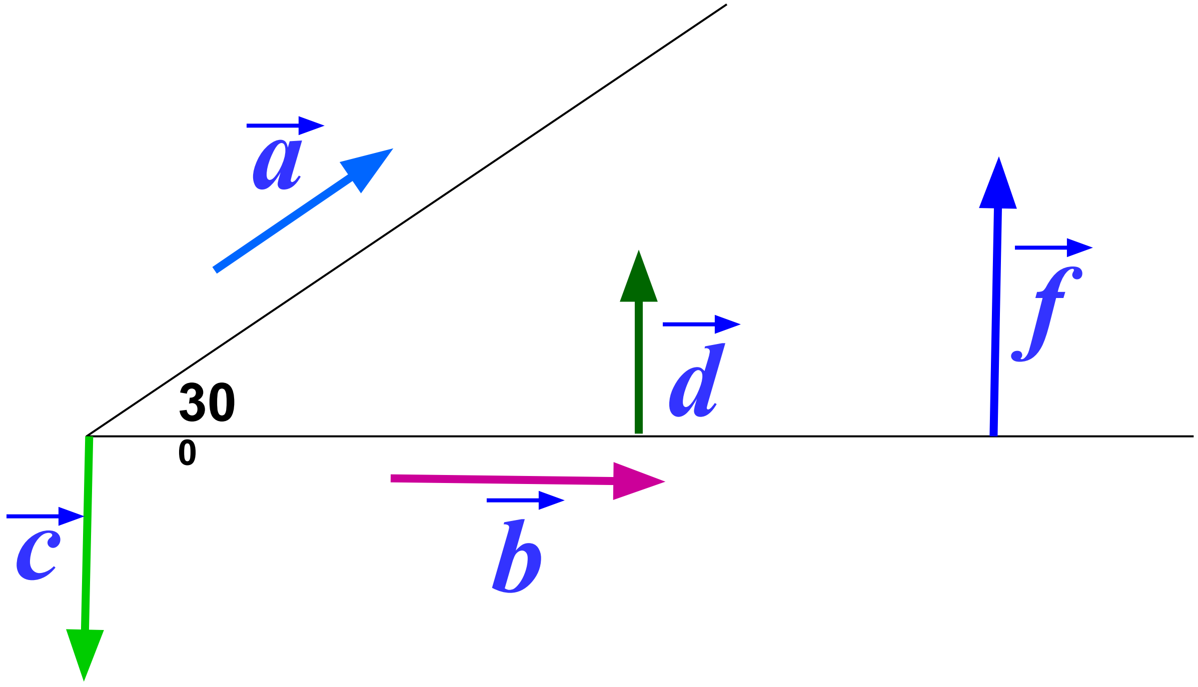


Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 0^0$

Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 180^0$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 90^0$

Найдите угол между векторами



$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30^0$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120^0$

$\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 90^0$

$\widehat{\vec{d}\,\vec{c}} = 180^0$

$\widehat{\vec{d}\,\vec{f}} = 0^0$

Определение

<u>**Скалярным произведением**</u> **двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Вспомним планиметрию…

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$***, то*** $\cos 90^0 = 0 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$

Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$***, то*** $\cos 180^0 = -1 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$

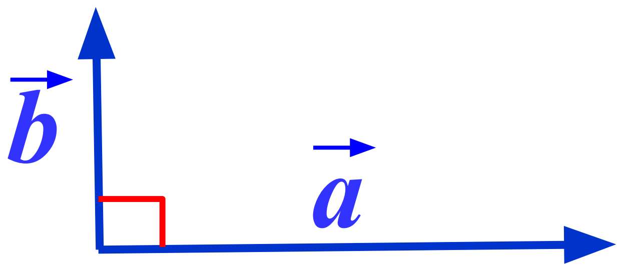
Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$***, то*** $\cos 0^0 = 1 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$

Если $\vec{a}=\vec{b}$***, то*** $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}^{\,2}}$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ***называется***

скалярным квадратом вектора

Частный случай №1



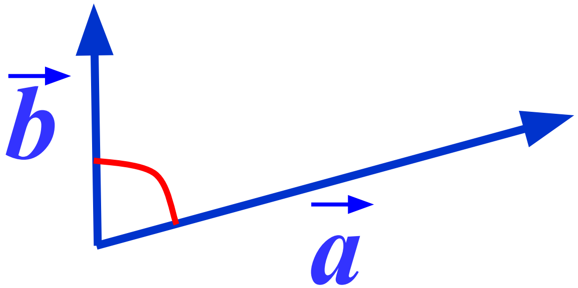
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

Частный случай №2



$$\widehat{\vec a\,\vec b} < 90^0$$

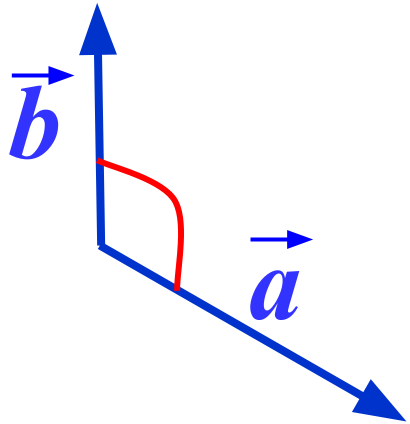
$$> 0$$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos\alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый.**

$$\vec a \cdot \vec b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec a\,\vec b} < 90^0$$

Частный случай №3



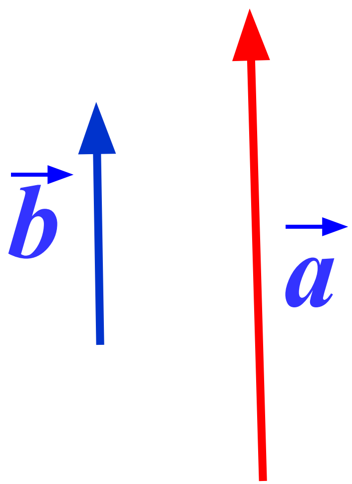
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

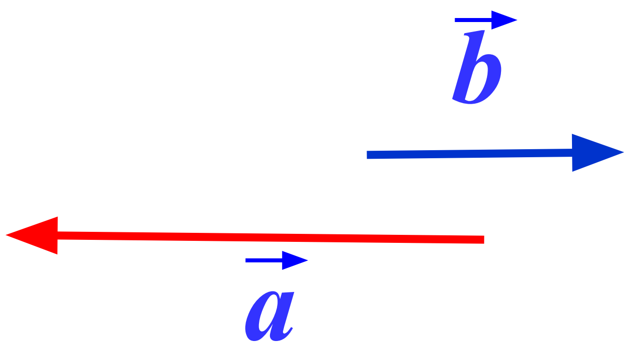
Частный случай №4



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



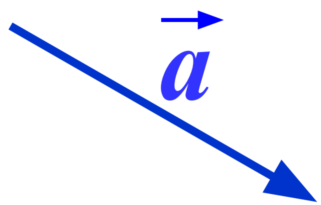
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

-1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Частный случай №5

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\overset{1}{\cos 0^0} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

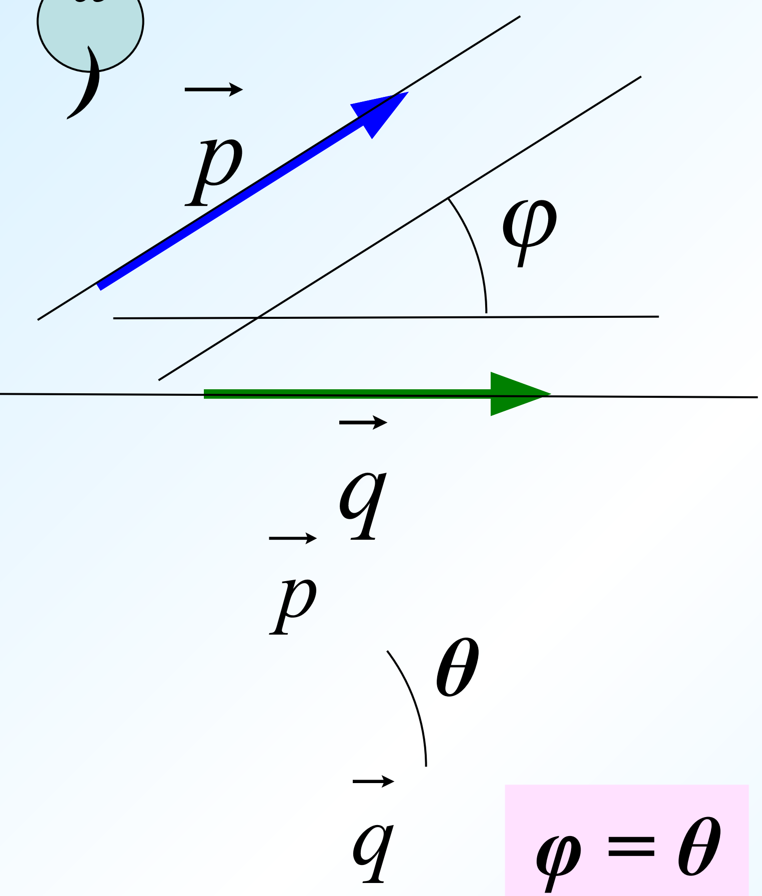
$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

№1. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

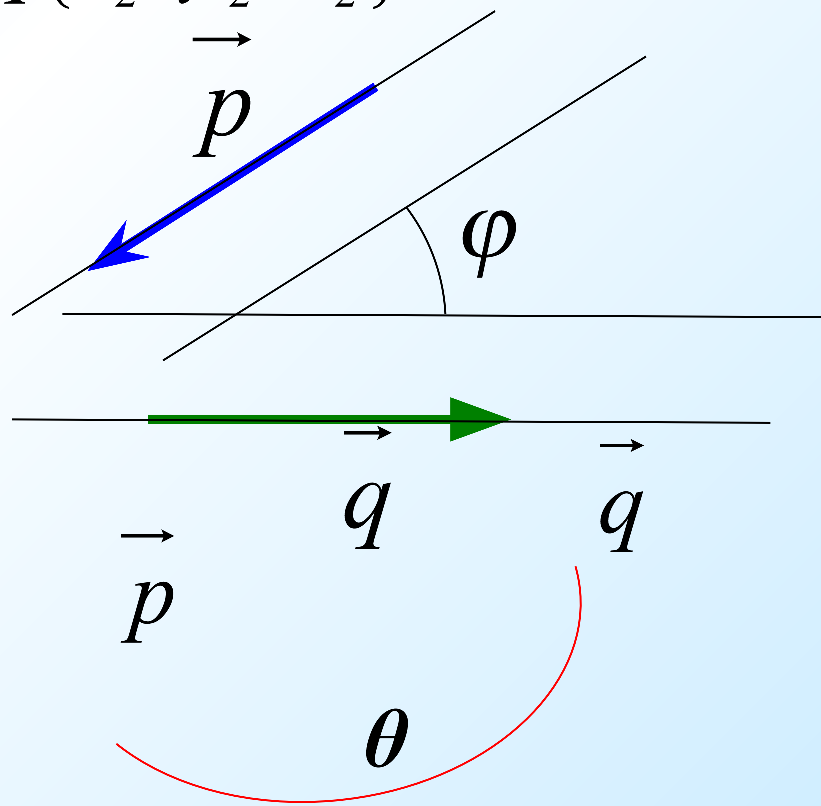
$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$

а)



$$\varphi = \theta$$

б)

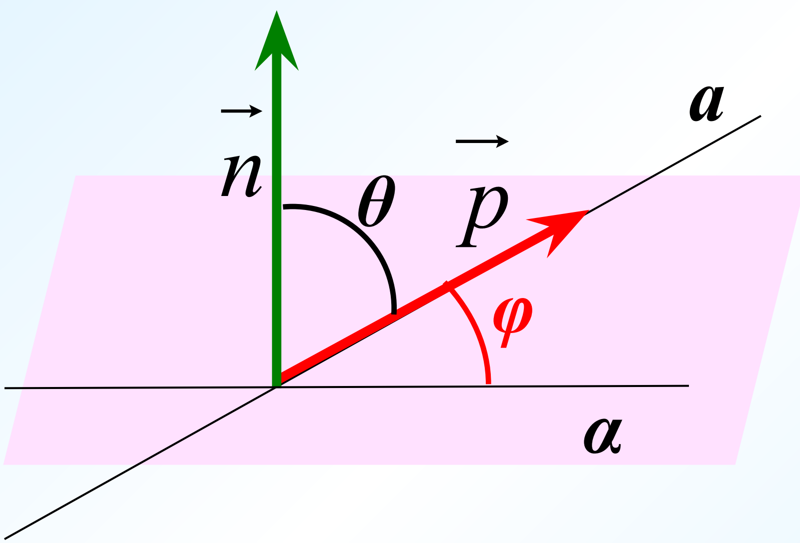


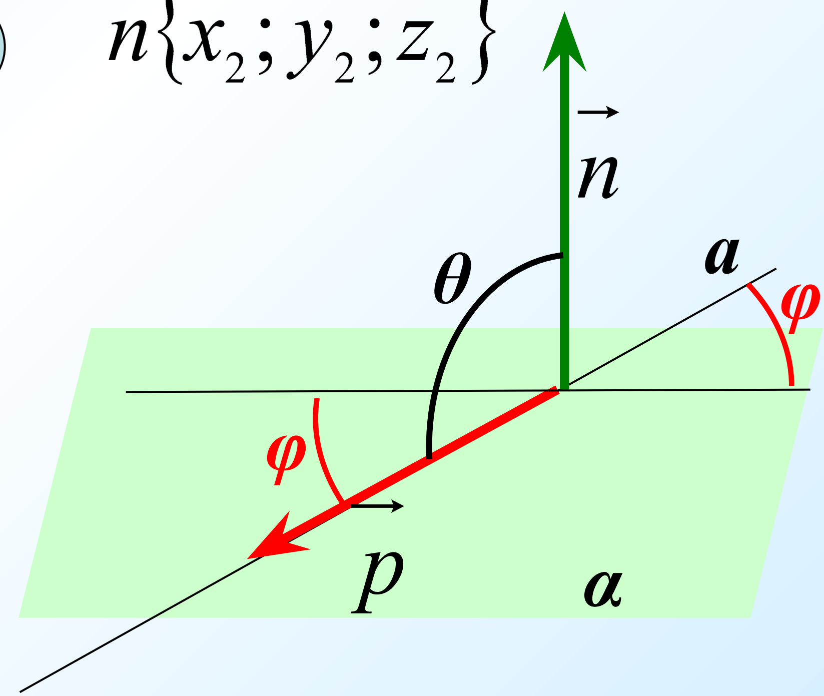
$$\varphi = 180^0 - \theta$$

Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

№2. Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости..

а) $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ **б)** $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$





Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Решение задач.

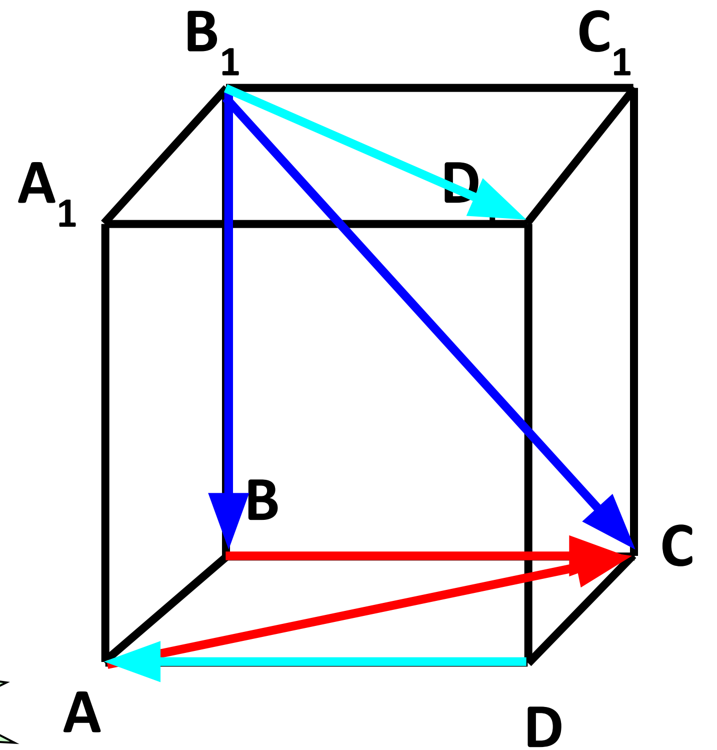
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{B_1B}$ **и** $\overrightarrow{B_1C}$ **45^0**

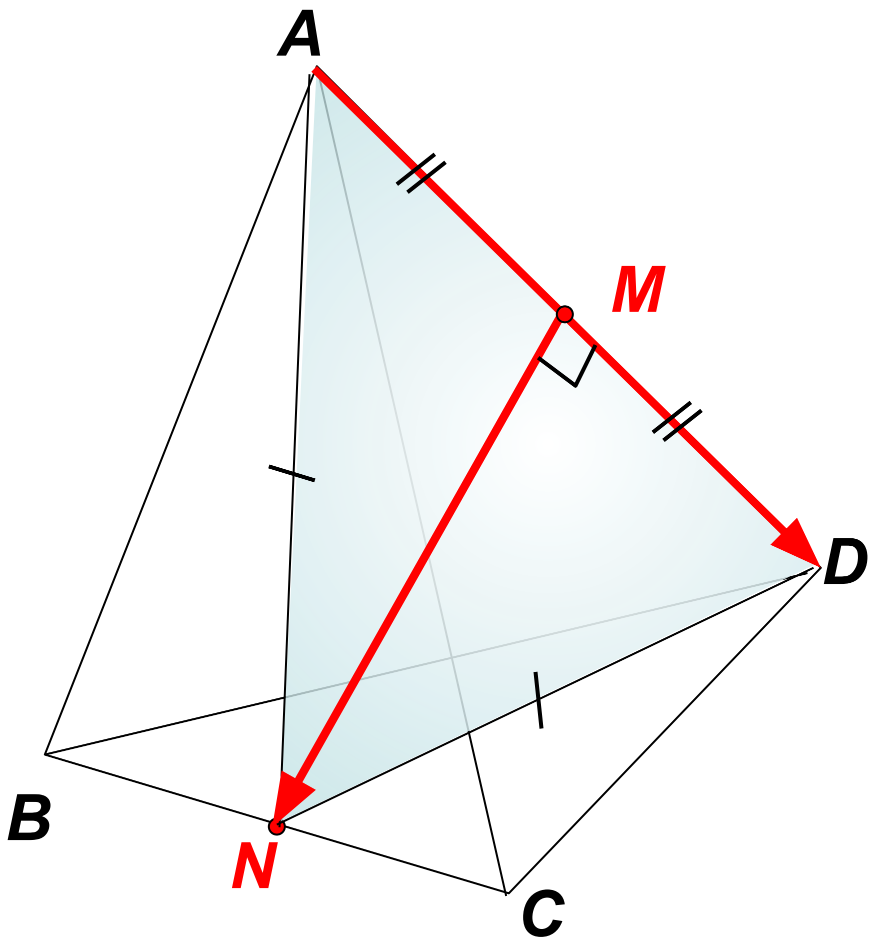
б) $\overrightarrow{BC}$ **и** $\overrightarrow{AC}$ **45^0**

в) $\overrightarrow{DA}$ **и** $\overrightarrow{B_1D_1}$ **135^0**



Задача

Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\,\{-6;\ 9;\ 5\}$ $\vec{b}\,\{-1;\ 0;\ 7\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6\cdot(-1) + 9\cdot 0 + 5\cdot 7 = 41$$

Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{0;\ 0;\ 4\}$ $\vec{b}\ \{22;\ 1;\ 8\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot 22 + 0\cdot 1 + 4\cdot 8 = 32$$

Пример №3

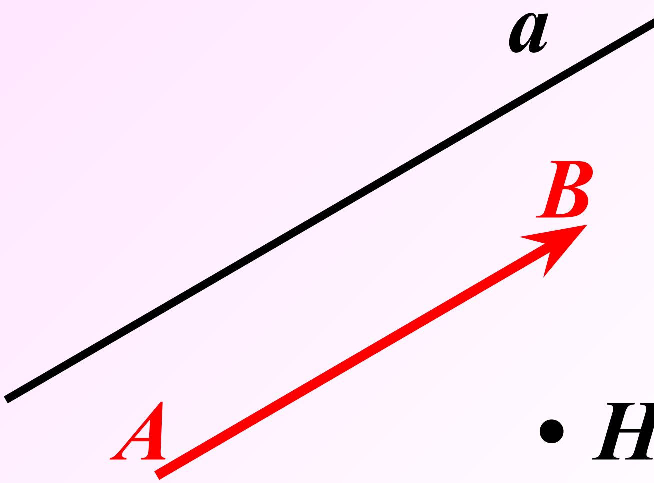
Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\,\{1; 7; 9\}$ $\vec{b}\,\{-2; 4; 0\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot(-2) + 7\cdot 4 + 9\cdot 0 = 26$$

Направляющий вектор прямой.



- *Ненулевой вектор называется* ***направляющим вектором*** *прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.*

№ 464 (а)

Дано: $A(3;-2;4)$ $B(4;-1;2)$ $C(6;-3;2)$ $D(7;-3;1)$

Найти: угол между прямыми AB и CD.

Ваши предложения…

1. **Найдем координаты векторов**

$\overrightarrow{AB}\{1;1;-2\}$ **и** $\overrightarrow{CD}\{1;0;-1\}$

2. **Воспользуемся формулой:**

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$\varphi = 30^0$

№ 466 (а)

Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

точка M принадлежит AA_1

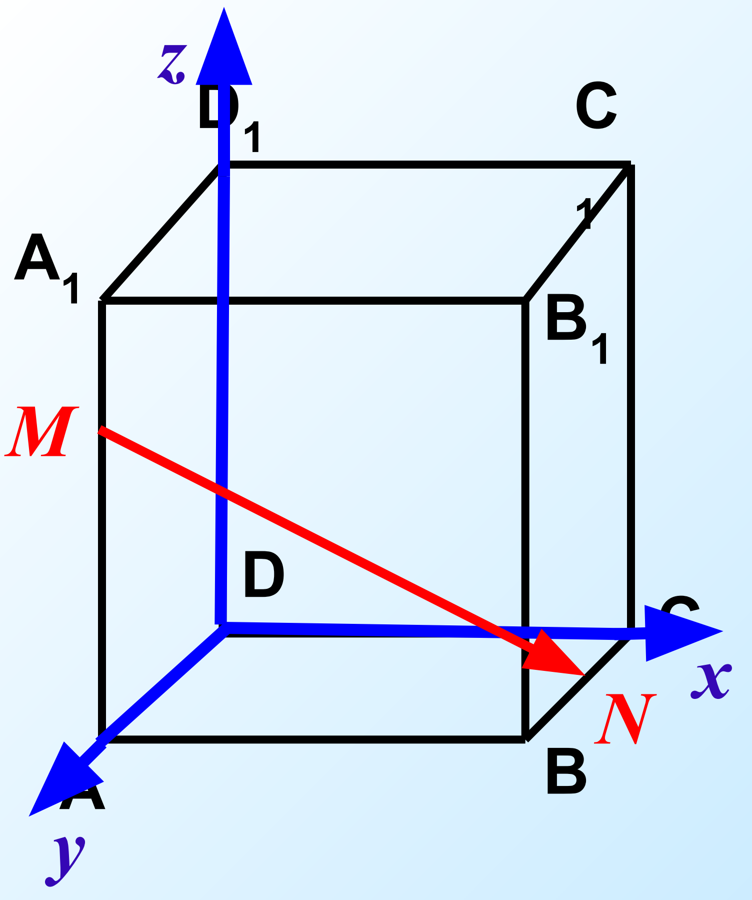
$AM : MA_1 = 3 : 1$; N – середина BC

Вычислить косинус угла между прям. MN и DD_1

1. Введем систему координат.
2. Рассмотрим DD_1 и MN.
3. Пусть $AA_1 = 4$, тогда

$M(0;4;3)$ $N(4;2;0)$

4. Найдем координаты векторов DD_1 и MN.
5. По формуле найдем cosφ.



Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$

Задача.

Дано: прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $DA = 2$; $DC = 2$; $DD_1 = 3$.

Найти угол между прямыми CB_1 и D_1B.

Ваши предложения…

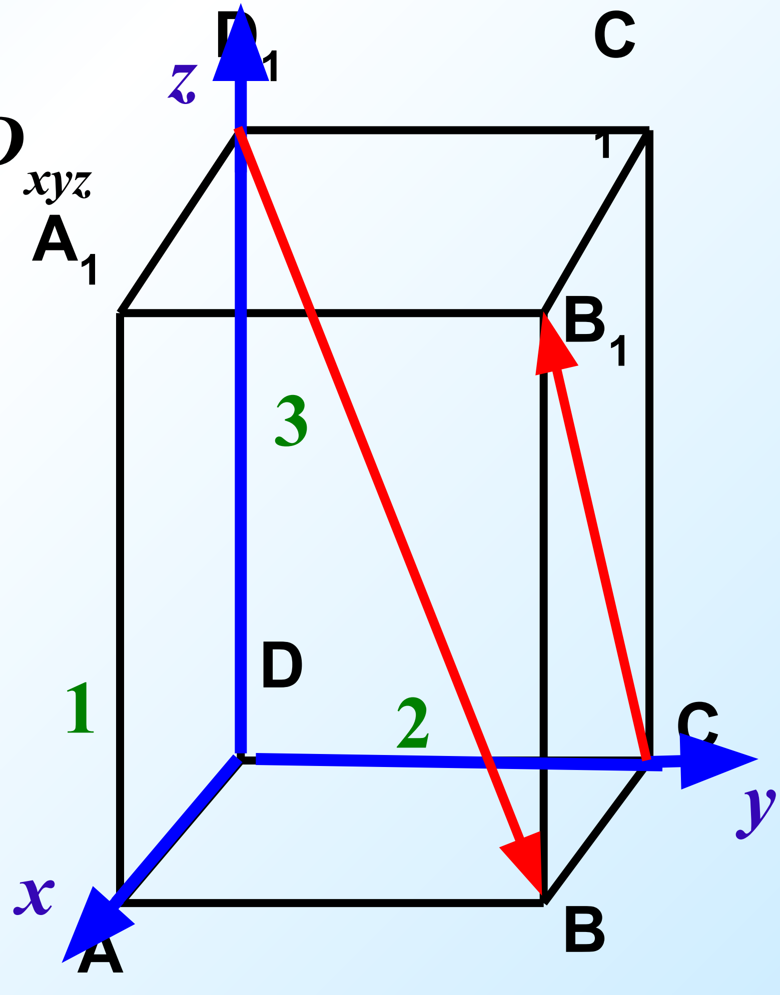
1. ***Введем систему координат D_{xyz}***
2. ***Рассмотрим направляющие прямых D_1B и CB_1.***

$$\overrightarrow{CB_1}\{1;0;3\} \qquad \overrightarrow{D_1B}\{1;2;-3\}$$

3. ***По формуле найдем cosφ.***

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$\varphi \approx 47^0 28'$$

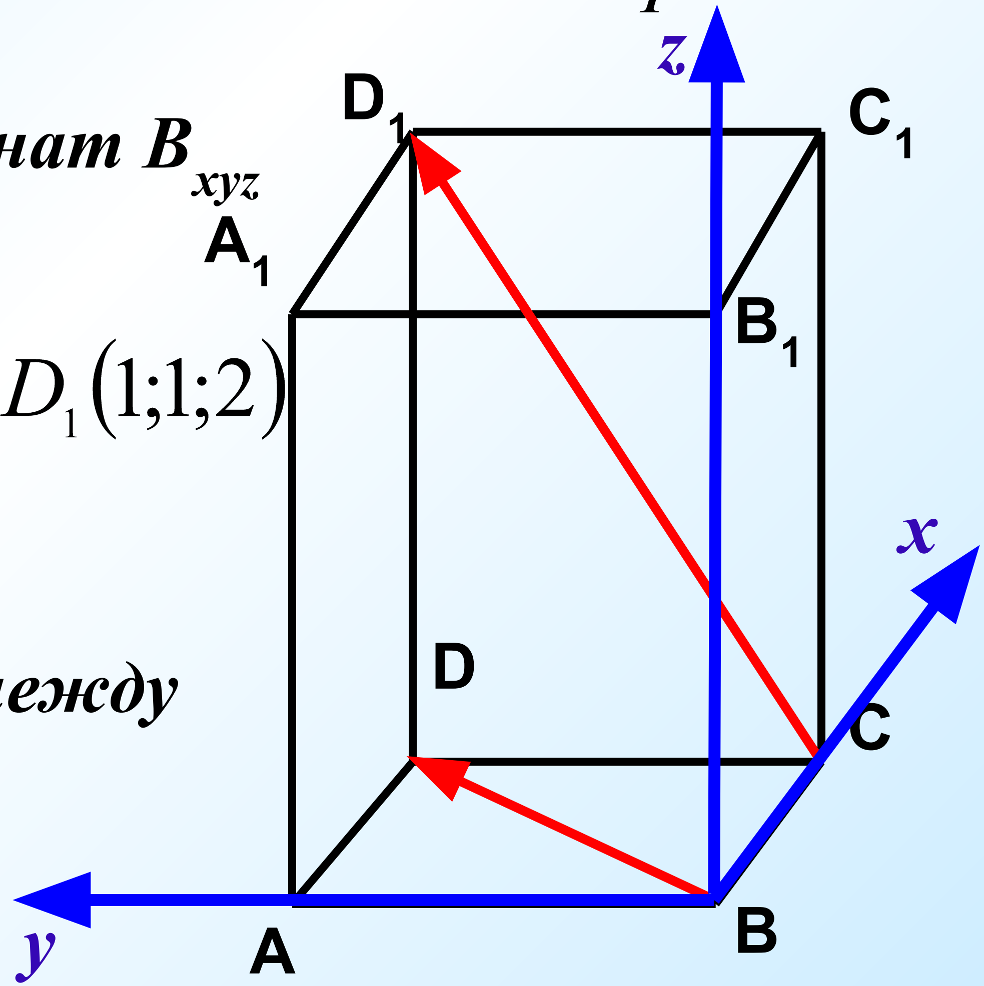


№ 467 (а)

Дано: *прямоугольный параллелепипед* $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AB = BC = ½ AA_1$

Найти угол между прямыми BD и CD_1.

1 способ:



1. *Введем систему координат* B_{xyz}
2. *Пусть* $AA_1 = 2$, *тогда* $AB = BC = 1$.

$$B(0;0;0)\ C(1;0;0)\ D(1;1;0)\ D_1(1;1;2)$$

3. *Координаты векторов:*

$$\overrightarrow{BD}\{1;1;0\} \quad \overrightarrow{CD_1}\{0;1;2\}$$

4. *Находим косинус угла между прямыми:*

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

№ 467 (а)

Дано: прямоугольный параллелепипед

$ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AB = BC = ½\ AA_1$

Найти угол между прямыми BD и CD_1.

2 способ:

1. Т.к. $CD_1 \parallel BA_1$, то углы между BD и BA_1; BD и CD_1 – равны.

2. В ΔBDA_1: $BA_1 = \sqrt{5}$, $A_1D = \sqrt{5}$

3. ΔBDA: по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} \quad BD = \sqrt{2}$$

4. По теореме косинусов:

$$A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2A_1B \cdot BD \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$