

# **Скалярное произведение векторов**

# Повторяем теорию:

- *Как находят координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?*

$$\overrightarrow{AB} \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$$

- *Как находят координаты середины отрезка?*

$$\frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{z_A + z_B}{2}$$

- *Как находят длину вектора?*

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- *Как находят расстояние между точками?*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- *Как вы понимаете выражение «угол между векторами»?*

# Решить задачи.

1) Дано:  $A(-3; -2; 4)$   $B(-4; 3; 2)$

Найти:  $|\vec{AB}|$

$\sqrt{50}$

2) Дано:  $A(2; -3; 1)$   $B(4; -5; 0)$   $C(5; 0; -4)$   $D(7; -2; -3)$

Равны ли векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ ?

$\vec{AB}\{2; -2; -1\}$

$\vec{CD}\{2; -2; 1\}$

3) Дано: ? Коллинеарны ли векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ ?

$A(1; -3; 4)$

$B(9; 1; -2)$

$C(2; 0; 1)$

$D(4; -2; 2)$

$\vec{AB}\{8; 4; -6\}$

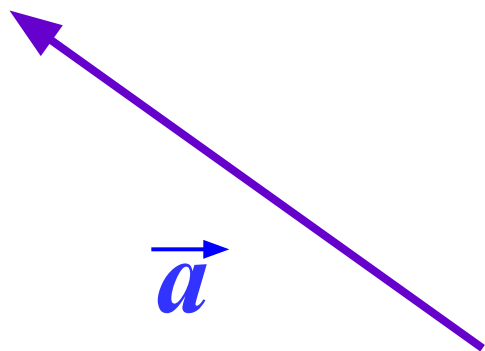
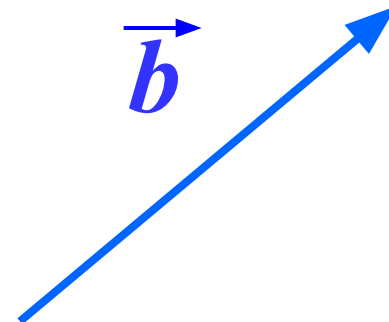
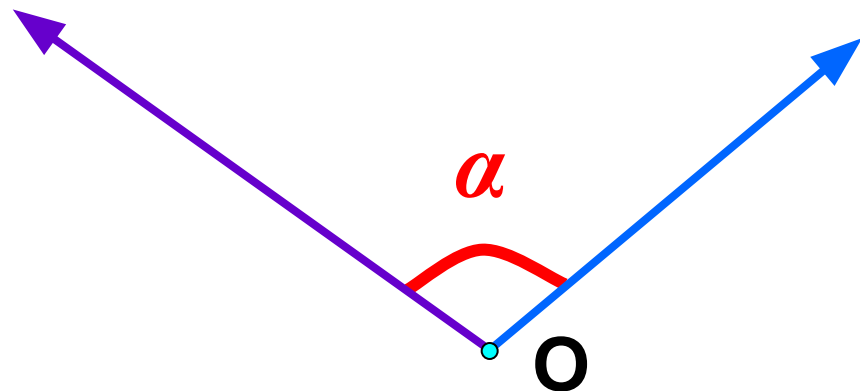
$\vec{CD}\{2; -2; 1\}$

Н

е

т

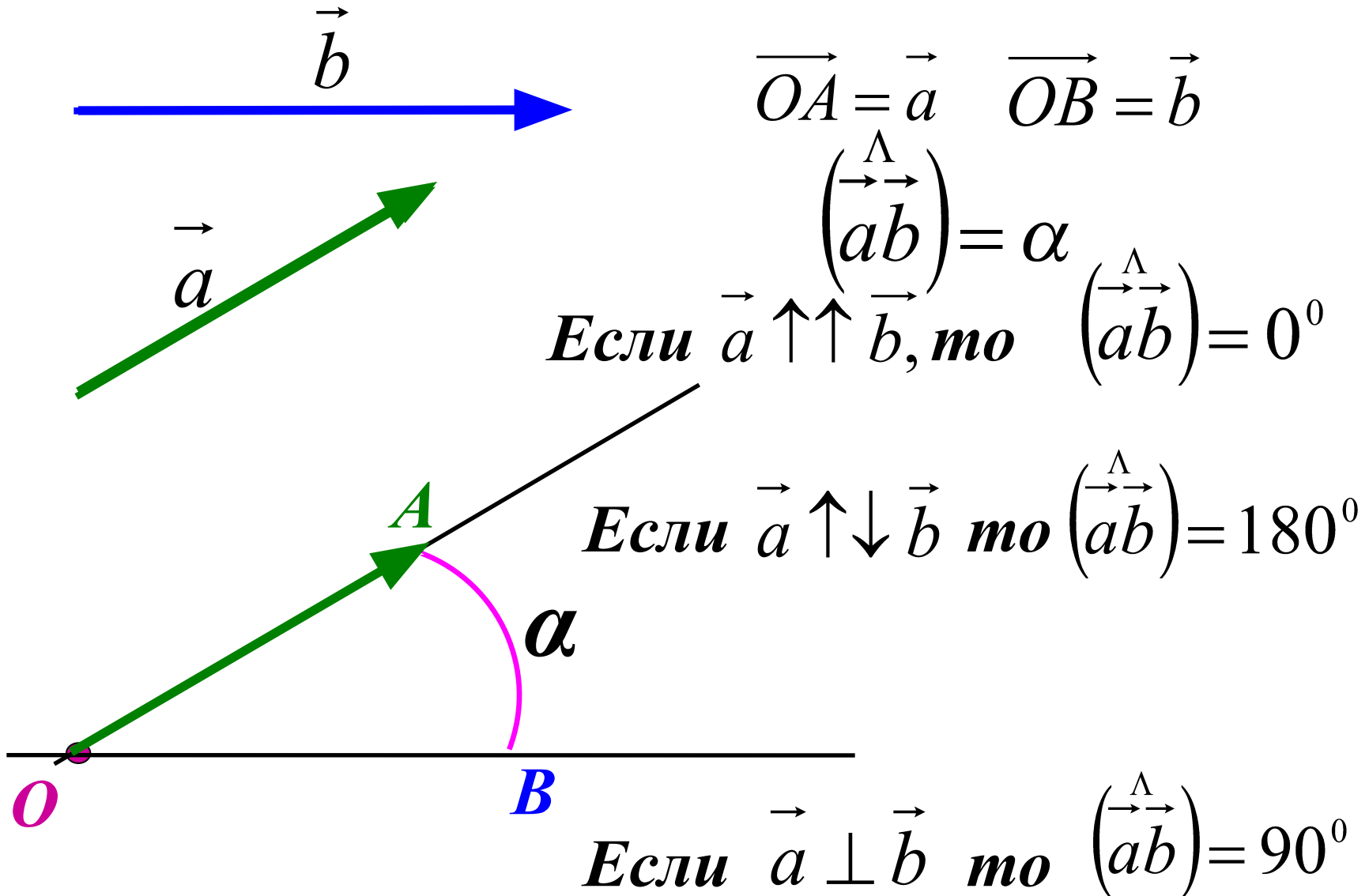
## Угол между векторами



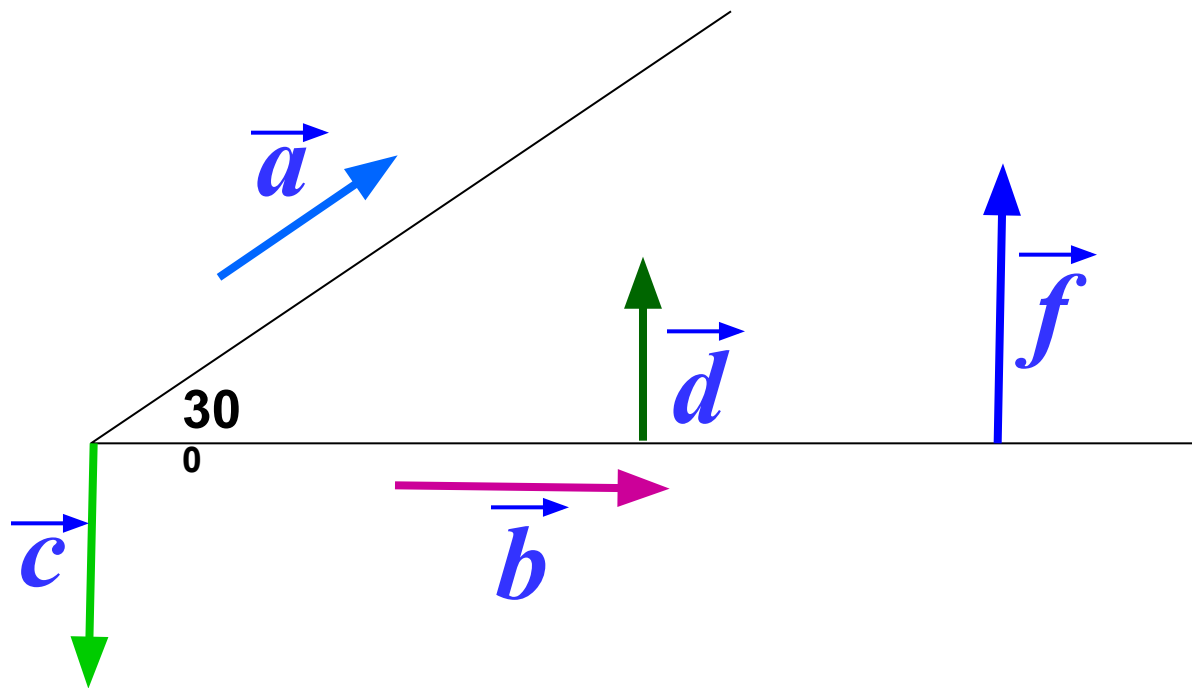
Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   
равен  $\alpha$ .

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$$

# Угол между векторами.



Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

## Определение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

## Вспомним планиметрию...

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

Если  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ , то  $\cos 180^\circ = -1 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Если  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , то  $\cos 0^\circ = 1 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

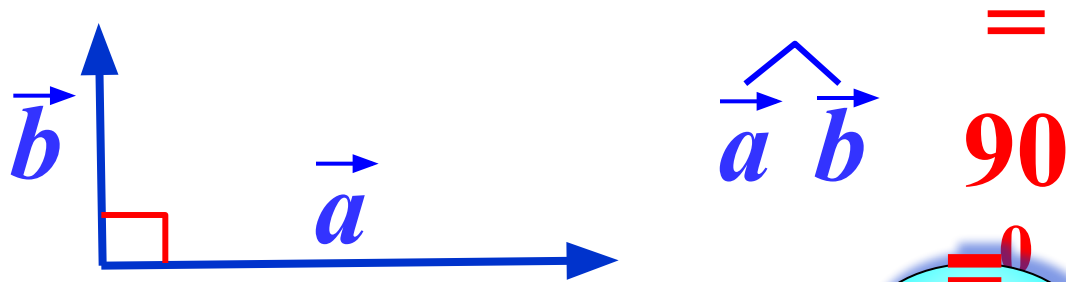
Если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 = a^2}$

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется

**скалярным квадратом вектора**



## Частный случай №1

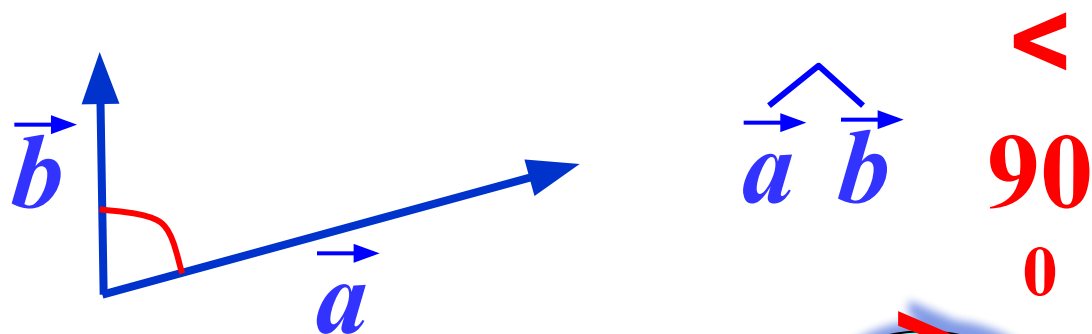


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

## Частный случай №2



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

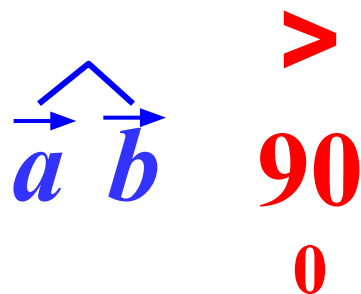
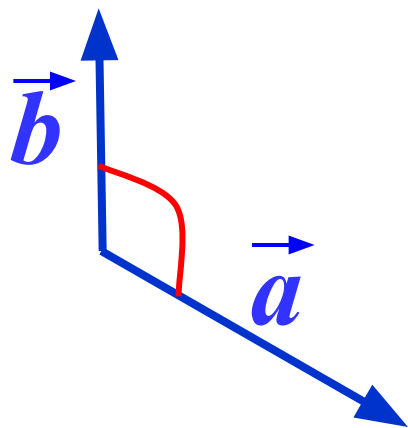
>  
0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

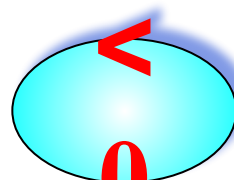
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \vec{b} < 90$$

<  
0

## Частный случай №3



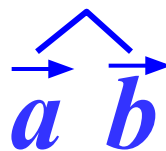
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$



<  
0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

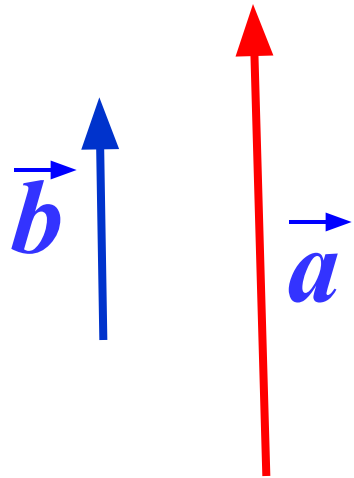
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$



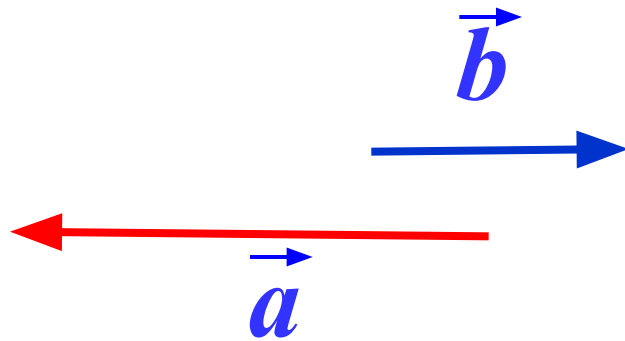
>  
90

0

## Частный случай №4



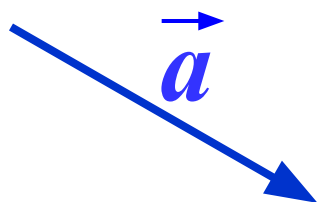
$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

## Частный случай №5

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0^0$$



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos 0^0 = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

The number 1 in the cosine term is circled in red.

Скалярное произведение  $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$  называется **скалярным квадратом** вектора  $\overrightarrow{a}$  и обозначается  $\overrightarrow{a}^2$

Таким образом,  
**скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

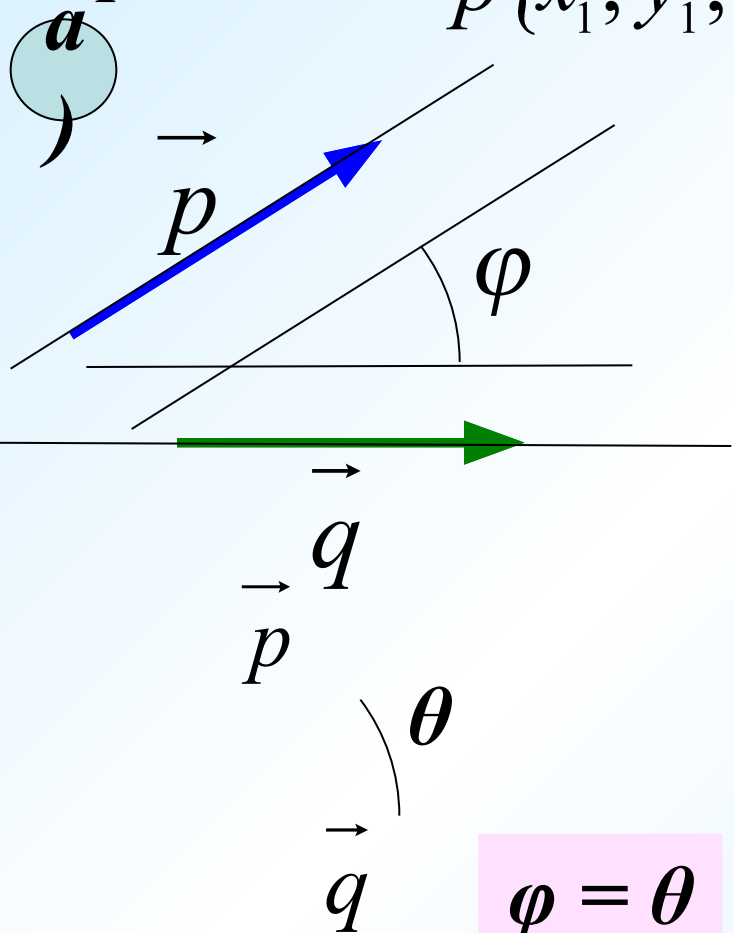
$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

# Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

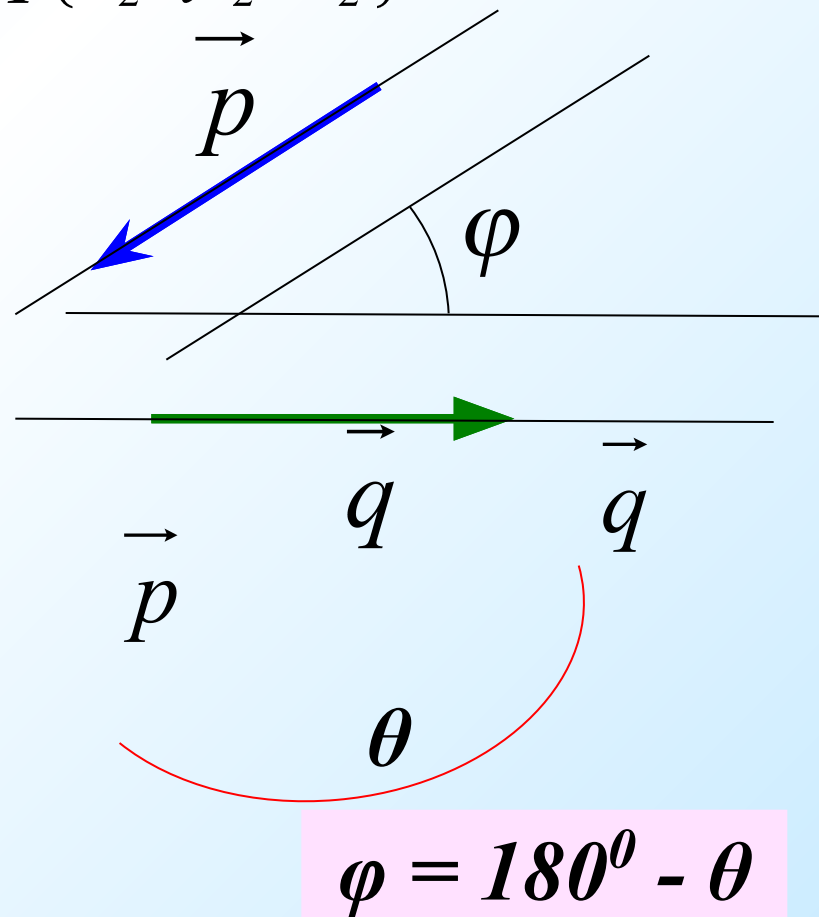
**№1. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.**

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$



**б**)



# Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

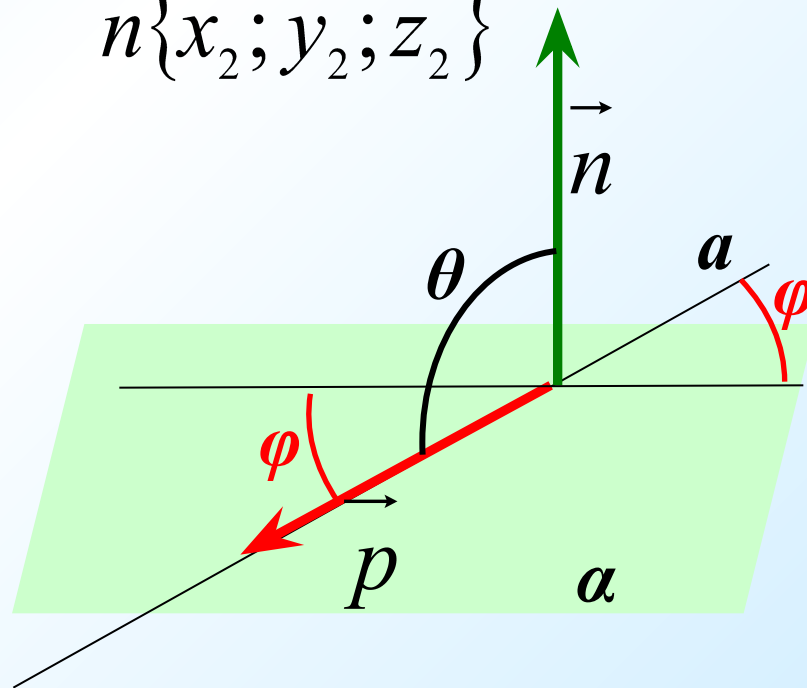
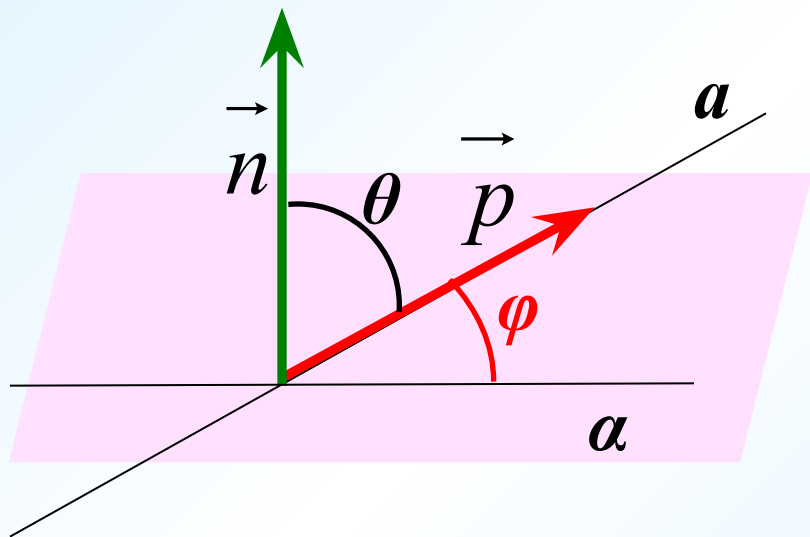
**№2. Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости..**

**а**

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

**б**

$$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$$



# Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

*Скалярное произведение двух векторов равно  
сумме произведений соответствующих  
координат этих векторов.*



# Решение задач.

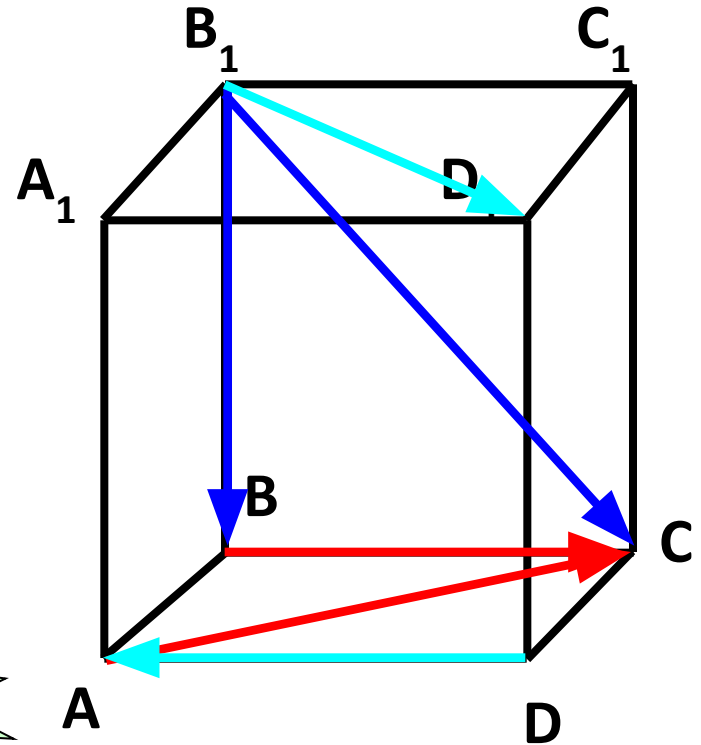
Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Найдите угол между векторами:

а)  $\overrightarrow{B_1 B}$  и  $\overrightarrow{B_1 C}$   $45^\circ$

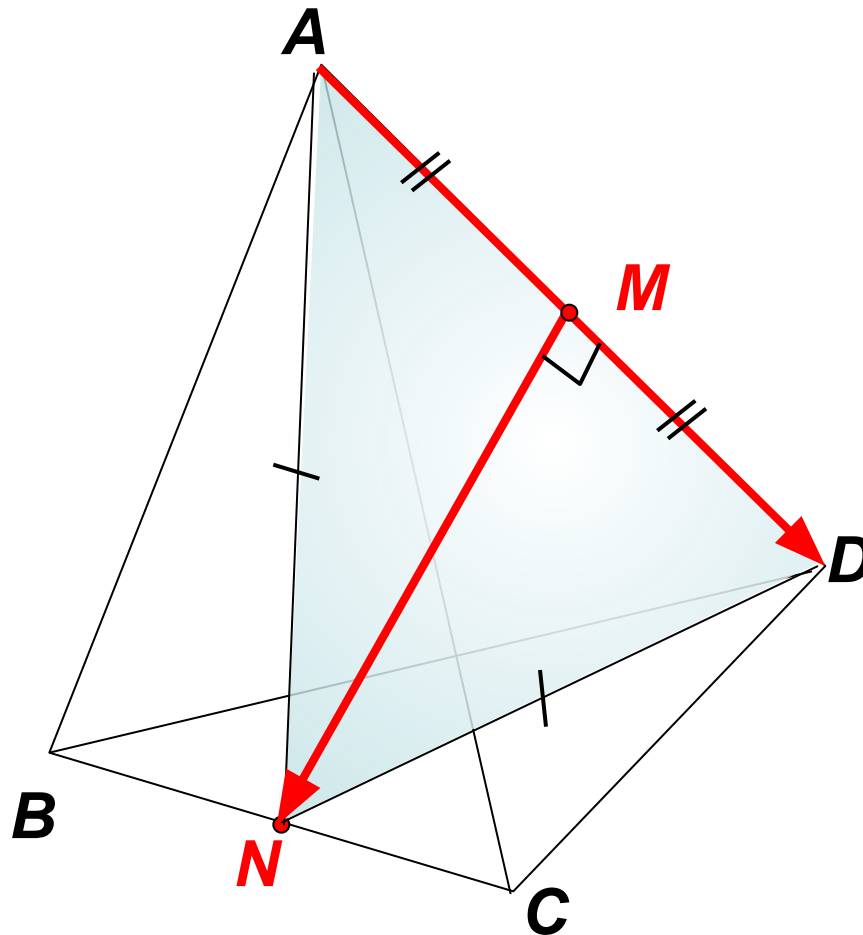
б)  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AC}$   $45^\circ$

в)  $\overrightarrow{DA}$  и  $\overrightarrow{B_1 D_1}$   $135^\circ$



## Задача

Все ребра тетраэдра  $ABCD$  равны друг другу. Точки  $M$  и  $N$  – середины ребер  $AD$  и  $BC$ . Докажите, что  $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$



Формула для нахождения  
скалярного произведения  
через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

## Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-6; 9; 5\} \qquad \vec{b} \{-1; 0; 7\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 41$$

## Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{0; 0; 4\}$$

$$\vec{b} \{22; 1; 8\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 32$$

### Пример №3

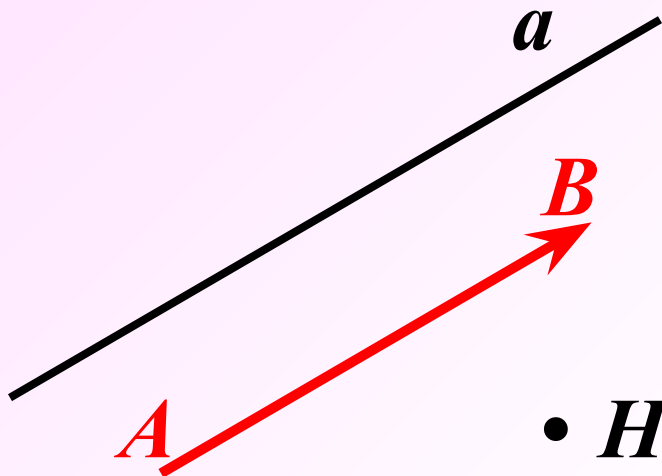
Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{1; 7; 9\} \qquad \vec{b} \{-2; 4; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 0 = 26$$

# Направляющий вектор прямой.



- *Ненулевой вектор называется **направляющим вектором** прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.*



# № 464 (а)

**Дано:**  $A(3;-2;4)$   $B(4;-1;2)$   $C(6;-3;2)$   $D(7;-3;1)$

**Найти:** угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

***Ваши предложения...***

***1. Найдем координаты векторов***

$$\overrightarrow{AB} \{1;1;-2\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CD} \{1;0;-1\}$$

***2. Воспользуемся формулой:***

$$\cos \varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi = 30^\circ$$





# № 466 (а)

Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

точка  $M$  принадлежит  $AA_1$

$AM : MA_1 = 3 : 1$ ;  $N$  – середина  $BC$

Вычислить косинус угла между прям.  $MN$  и  $DD_1$

1. Введем систему координат.

2. Рассмотрим  $DD_1$  и  $MN$ .

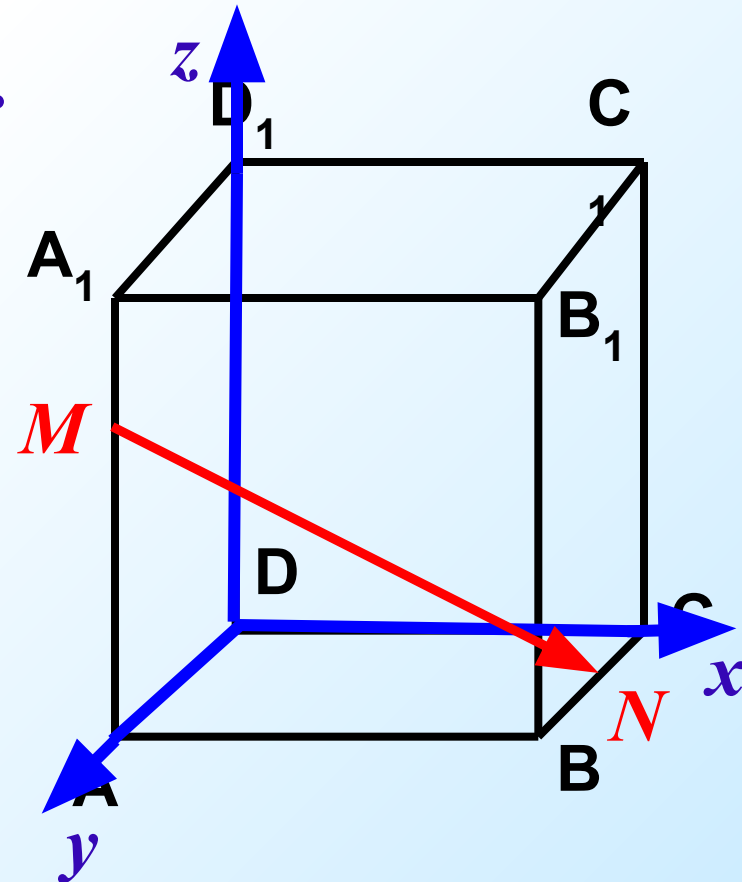
3. Пусть  $AA_1 = 4$ , тогда

$$M(0;4;3) \quad N(4;2;0)$$

4. Найдем координаты

векторов  $DD_1$  и  $MN$ .

5. По формуле найдем  $\cos\varphi$ .



**Ответ:**  $\frac{3}{\sqrt{29}}$

# Задача.

Дано: прямоугольный параллелепипед

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;  $DA = 2$ ;  $DC = 2$ ;  $DD_1 = 3$ .

Найти угол между прямыми  $CB_1$  и  $D_1B$ .

*Ваши предложения...*

1. Введем систему координат  $D_{xyz}$
2. Рассмотрим направляющие

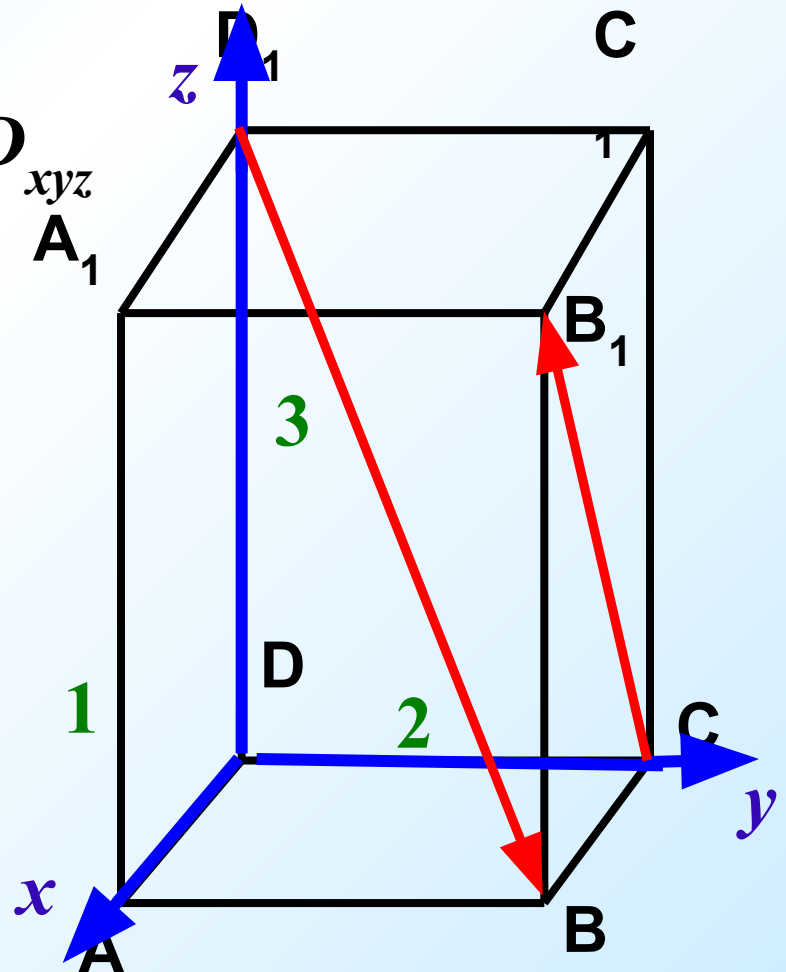
прямых  $D_1B$  и  $CB_1$ .

$$\overrightarrow{CB_1} \{1; 0; 3\} \quad \overrightarrow{D_1B} \{1; 2; -3\}$$

3. По формуле найдем  $\cos \varphi$ .

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$\varphi \approx 47^\circ 28'$$



# № 467 (а)

*Дано: прямоугольный параллелепипед*

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$$

*Найти угол между прямыми  $BD$  и  $CD_1$ .*

*1 способ:*

1. Введем систему координат  $B_{xyz}$

2. Пусть  $AA_1 = 2$ , тогда

$$AB = BC = 1.$$

$$B(0;0;0) \quad C(1;0;0) \quad D(1;1;0) \quad D_1(1;1;2)$$

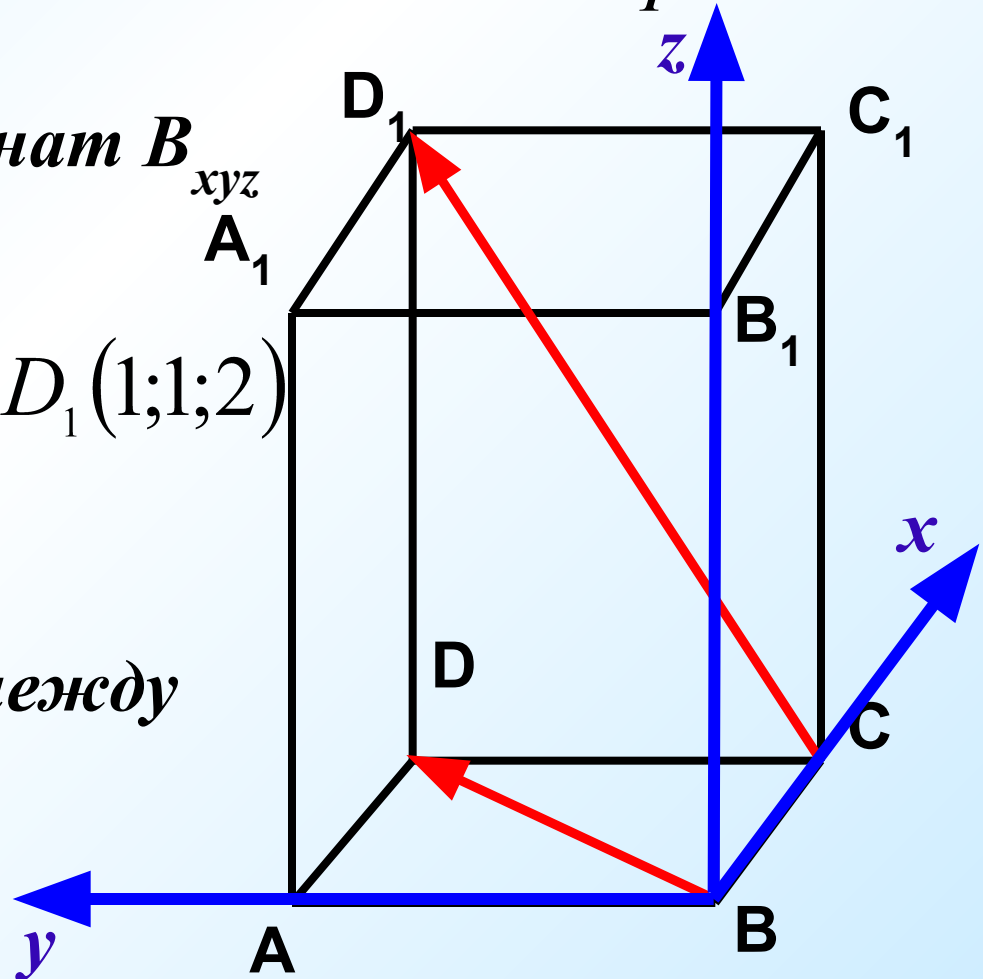
3. Координаты векторов:

$$\overrightarrow{BD} \{1;1;0\} \quad \overrightarrow{CD_1} \{0;1;2\}$$

4. Находим косинус угла между

прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



# № 467 (а)

*Дано: прямоугольный параллелепипед*

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$$

*Найти угол между прямыми  $BD$  и  $CD_1$ .*

*2 способ:*

*1. Т.к.  $CD_1 \parallel BA_1$ , то углы между  $BD$  и  $BA_1$ ;  $BD$  и  $CD_1$  — равны.*

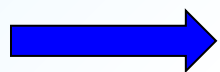
*2. В  $\triangle BDA_1$ :  $BA_1 = \sqrt{5}$ ,  $A_1D = \sqrt{5}$*

*3.  $\triangle BDA$ : по теореме Пифагора*

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} \quad BD = \sqrt{2}$$

*4. По теореме косинусов:*

$$A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2A_1B \cdot BD \cdot \cos \varphi$$



$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

