

# **Электротехника и электроника**

## **Лекция 4**

**Однофазные линейные электрические цепи  
синусоидального тока. Электродвижущие силы,  
напряжения и токи, способы получения и представления**

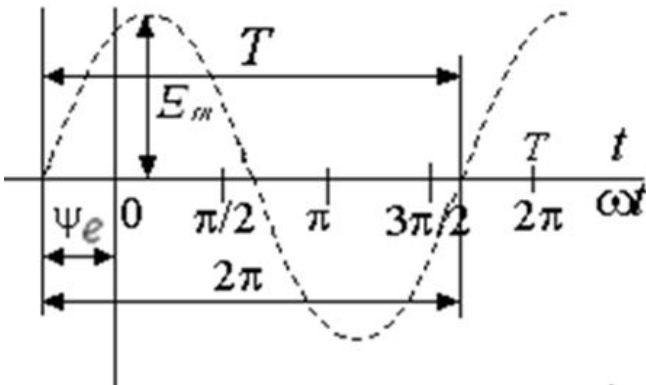
**Мириленко Андрей Петрович, к.т.н.  
кафедра Электротехники**

## Основные понятия

**Цепи синусоидального напряжения** – электрические величины изменяются по синусоидальному закону.

В частности ЭДС

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_e)$$



$e(t)$  – мгновенные значения

$E_m$  – амплитудные значения

$(\omega t + \Psi_e)$  – фаза

$\Psi_e$  – начальная фаза

$\omega = 2\pi f$  – угловая частота [рад/сек]

$f$  – частота [1/сек = Гц]

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

## Почему применяют синусоидальный ток

В практике применяются частоты переменного тока от долей герца до миллиардов герц.

В электроэнергетике стран Европы и СНГ стандартная частота 50 Гц, а в США — 60 Гц.

**Почему 50 Гц?** - компромисс

Если частота ниже 50 Гц – заметно мигание ламп и возрастают размеры оборудования. Если частоту увеличивать, то растут потери на вихревые токи, снижается КПД, увеличиваются механические нагрузки на валах.

**Почему переменный?**

- удобство производства
- удобство трансформации т.е. повышения или понижения напряжения
- снижение потерь на линиях передач.

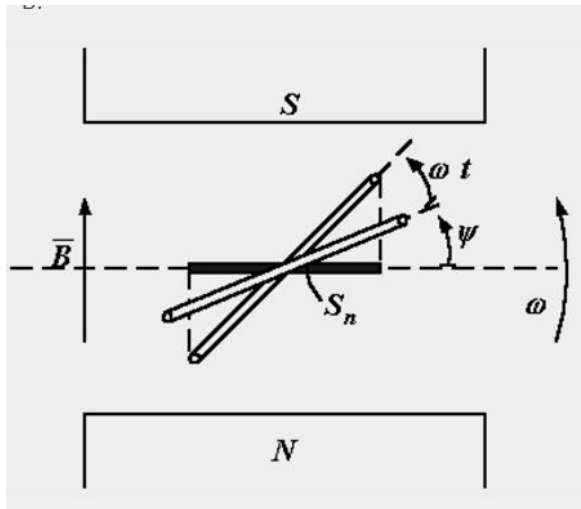
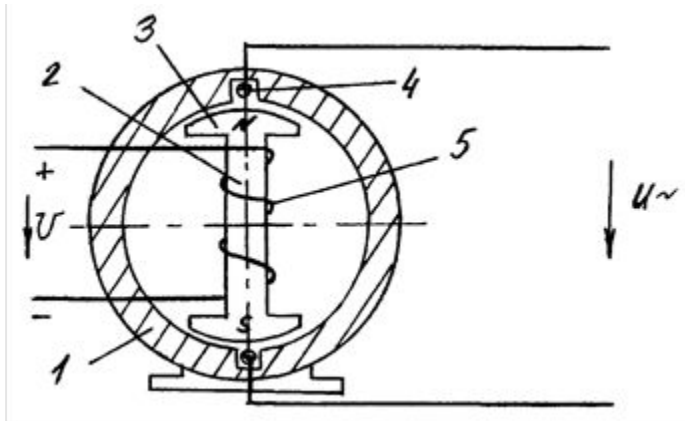
## Почему применяют синусоидальный ток

### Почему синусоидальный?

**Форма кривой** периодически изменяющегося переменного тока может быть любой (синусоидальной, пилообразной, прямоугольной и т.д.). Но в практике энергетики применяется синусоидальный ток.

- производство электроэнергии естественным образом даёт синусоидальный ток
- оптимальные условия работы электрических установок.

## Получение синусоидального напряжения

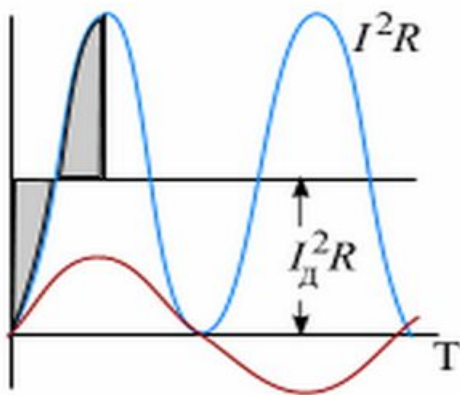


$$\Phi = B * S_n = BS \cos(\omega t + \Psi)$$

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin(\omega t + \Psi)$$

## Действующие значения синусоидального тока

Действующее значение численно равно величине постоянного тока, который протекая по некоторому резистору за то же время выделит такое же количество теплоты.



$$E_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_m \sin(\omega t) dt = \frac{E_m}{\omega t} \cos(\omega t) \Big|_0^T = 0 \text{ за полпериода}$$

$$E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E_m \sin(\omega t) dt = \frac{E_m}{\omega t} \cos(\omega t) \Big|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} E_m$$

### Переменный ток

$$Q = \int_0^T i^2 R dt = \int_0^T I_m^2 R \sin^2(\omega t) dt$$

$$Q = \int_0^T I_m^2 \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{I_m^2}{2} \left[ \int_0^T R dt + \int_0^T R \cos(2\omega t) dt \right]$$

$$Q = \frac{I_m^2 RT}{2} + 0 \Rightarrow I^2 = \frac{I_m^2}{2}$$

### Постоянный ток

$$Q = I^2 RT$$

$$I_{действ} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx I_m \times 0,7$$

# Синусоидальные функции как вектор

## Проблема:

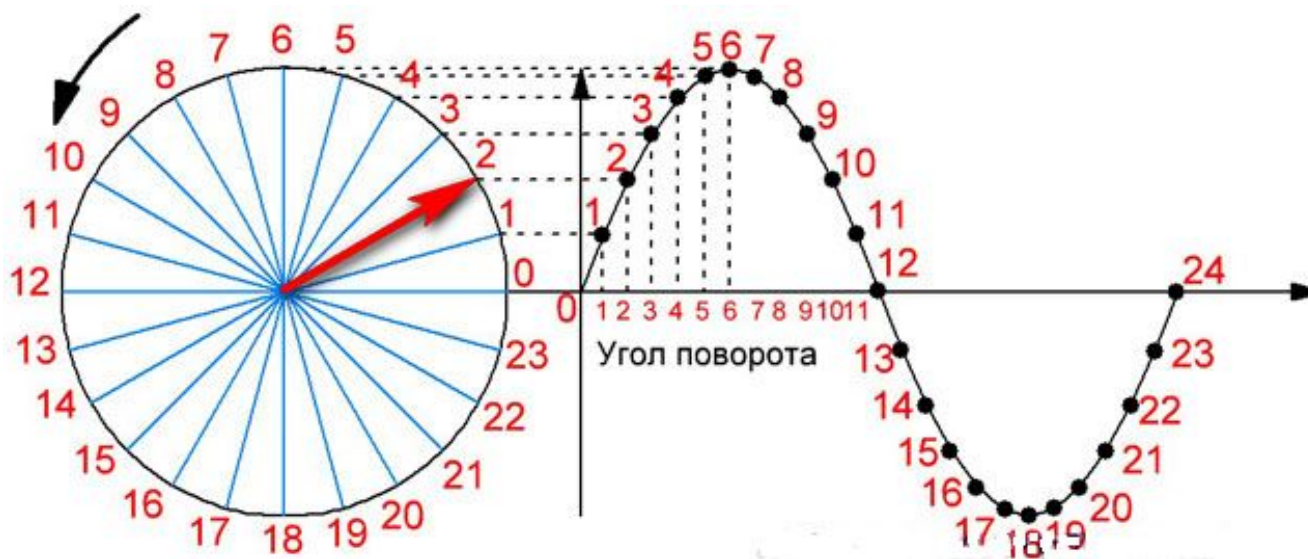
операции с тригонометрическими величинами требуют очень сложной математики

$$U_1 = 50 \sin(\omega t + 10^\circ)$$

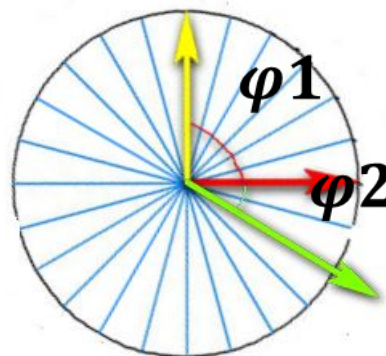
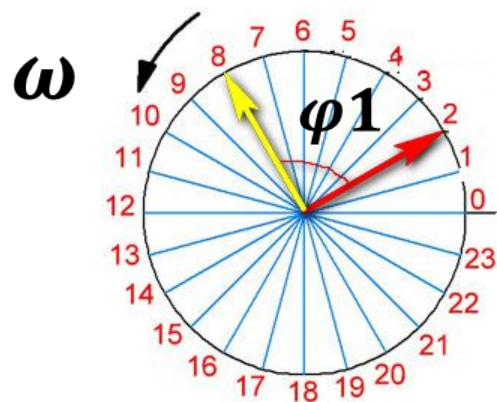
$$U_2 = 100 \sin(\omega t + 100^\circ)$$

$$U_1 + U_2 = ?$$

## Синусоидальная функция как вращающийся вектор



# Синусоидальные функции как вектор



$$\varphi_1 = +90^\circ$$

Система отсчета (вектор отсчета)

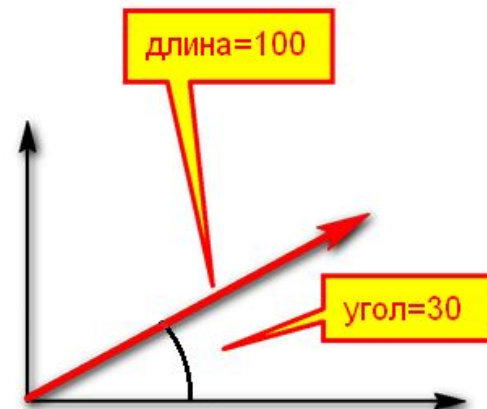
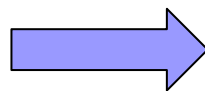
$$\varphi_2 = -30^\circ$$

1. Все векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ .
2. Каждый вектор характеризуется
  - величиной (длиной)
  - углом поворота относительно нулевого вектора.
3. Любой вектор можно взять в качестве вектора отсчета и связать с ним систему отсчета

$$u(t) = 100 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

величина

положение



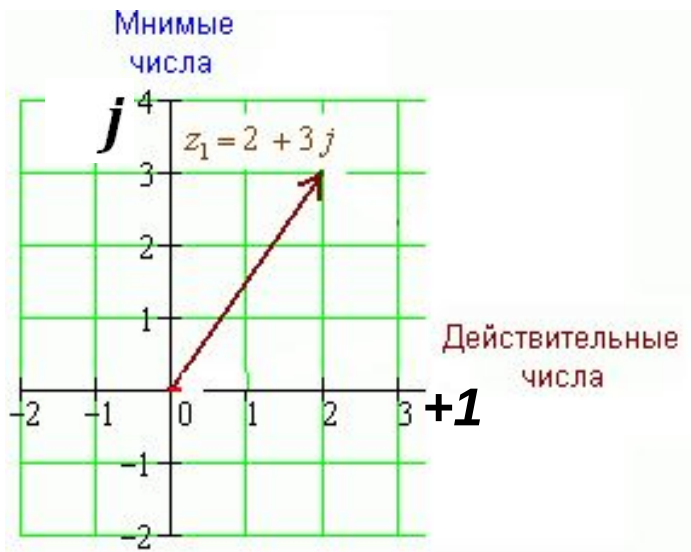


## Комплексное число

Комплексное число состоит из двух простых чисел

$$A = p + jq \quad j = \sqrt{-1}$$

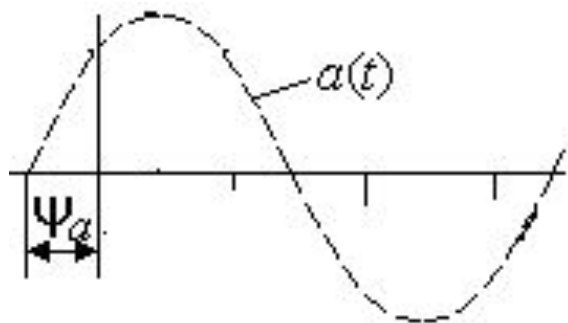
## Комплексная плоскость



1. Теперь можно действия над тригонометрическими функциями заменить алгебраическими действиями над комплексными числами.
2. Все законы сохранят свой вид, только вместо простых чисел мы будем подставлять комплексные

# Синусоидальные функции как комплексные числа

Синусоидальная функция = вектор = комплексное число

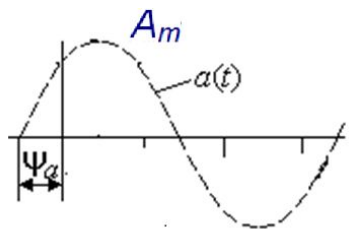


$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \Psi_a)$$

Формы представления

<u>Векторная</u>	<u>Алгебраическая</u>	<u>Показательная</u>	<u>Тригонометрическая</u>
<p>A complex plane diagram with a horizontal real axis labeled <math>1</math> and a vertical imaginary axis labeled <math>+j</math>. The origin is labeled <math>o</math>. A blue vector originates from the origin and points to a point labeled <math>p + jq</math>. The horizontal component is labeled <math>p</math> and the vertical component is labeled <math>q</math>. A dashed line connects the tip of the vector to the <math>p</math> mark on the real axis. The angle between the vector and the positive real axis is labeled <math>\Psi_a</math>.</p>	$A_m = p + jq$	$A_m = A_m e^{j\Psi_a}$	$A_m = A_m (\cos \Psi_a + j \sin \Psi_a)$

## Связь между формами комплексных чисел

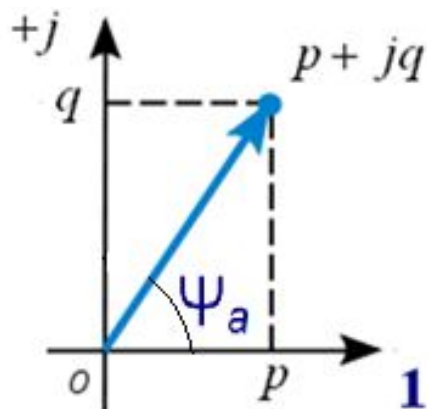


$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \Psi_a)$$

$$p = A_m * \cos(\Psi_a)$$

$$q = A_m * \sin(\Psi_a)$$

Векторная



Алгебраическая

$$A_m = p + jq$$

Показательная

$$A_m = A_m e^{j\Psi_a}$$

## Действия над комплексными числами

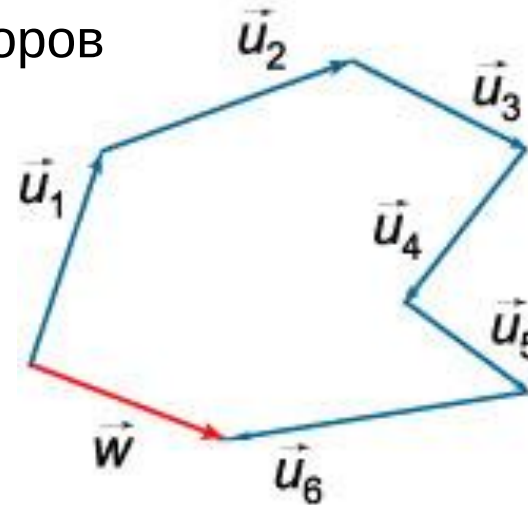
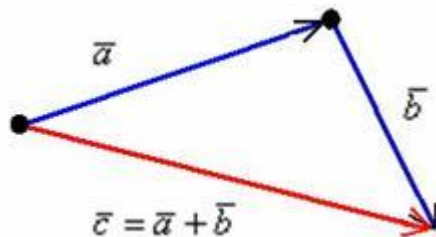
### Алгебраическая форма

Сложение	$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$
Вычитание	$(a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j$
Умножение	$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$
Деление (домножить на сопряженное)	$\frac{(a + bj)}{(c + dj)} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \frac{(ac - bd(\sqrt{-1})^2 + bcj - adj)}{(c^2 + d^2 + cdj - cdj)} = \frac{(ac + bd)}{(c^2 + d^2)} + \frac{(bc - ad)j}{(c^2 + d^2)}$

# Действия над комплексными числами

## Векторная форма

### Сложение векторов



### Скалярное произведение

Скалярное произведение – скалярная величина, равная произведению модулей векторов и косинуса угла между ними.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

В координатной форме скалярное произведение

$$(a + bj) * (c + dj) = ac + bd$$

Скалярное произведение можно применять например при вычислении мощности

### Поворот вектора

Умножение вектора на  $\mathbf{j}$  вызывает его поворот на  $90^\circ$  а на  $-\mathbf{j}$  даёт поворот на минус  $90^\circ$

# Пример преобразования формы комплексных чисел

## Функциональная в другие формы

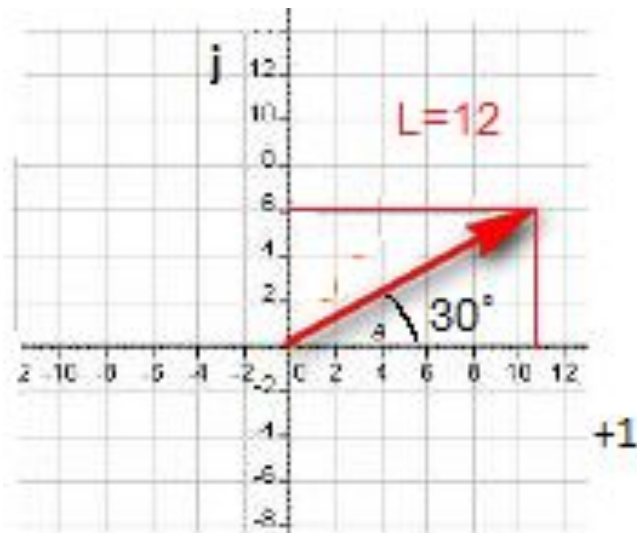
Дано:  $u(t)=12\sin(\omega t+30^\circ)$

1. В алгебраическую.  $p=12\cos 30^\circ=10,4$   $q=12\sin 30^\circ=6 \Rightarrow U=10,4+j6$

2. В показательную.  $U = 12e^{j30}$

3. В тригонометрическую.  $U=12(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$

4. В векторную



# Пример преобразования формы комплексных чисел

## Алгебраическая в другие формы

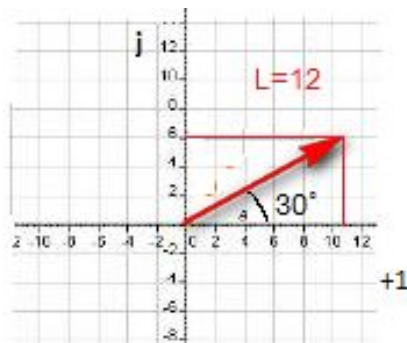
Дано:  $U = 10,4 + j6$

1. Найти величину Длина вектора =  $U_m = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{10,4^2 + 6^2} = 12$

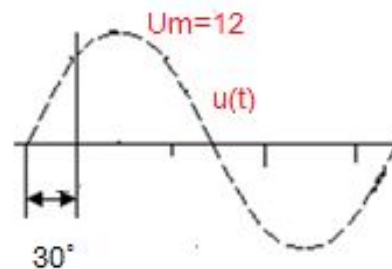
2. Найти начальную фазу  $\Psi = \arctg\left(\frac{6}{10,4}\right) = 30^\circ$   $\underline{U} = 12e^{j30}$

3. В тригонометрическую  $U = 12(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$

4. В векторную



5. В функциональную.  $u(t) = 12\sin(\omega t + 30^\circ)$

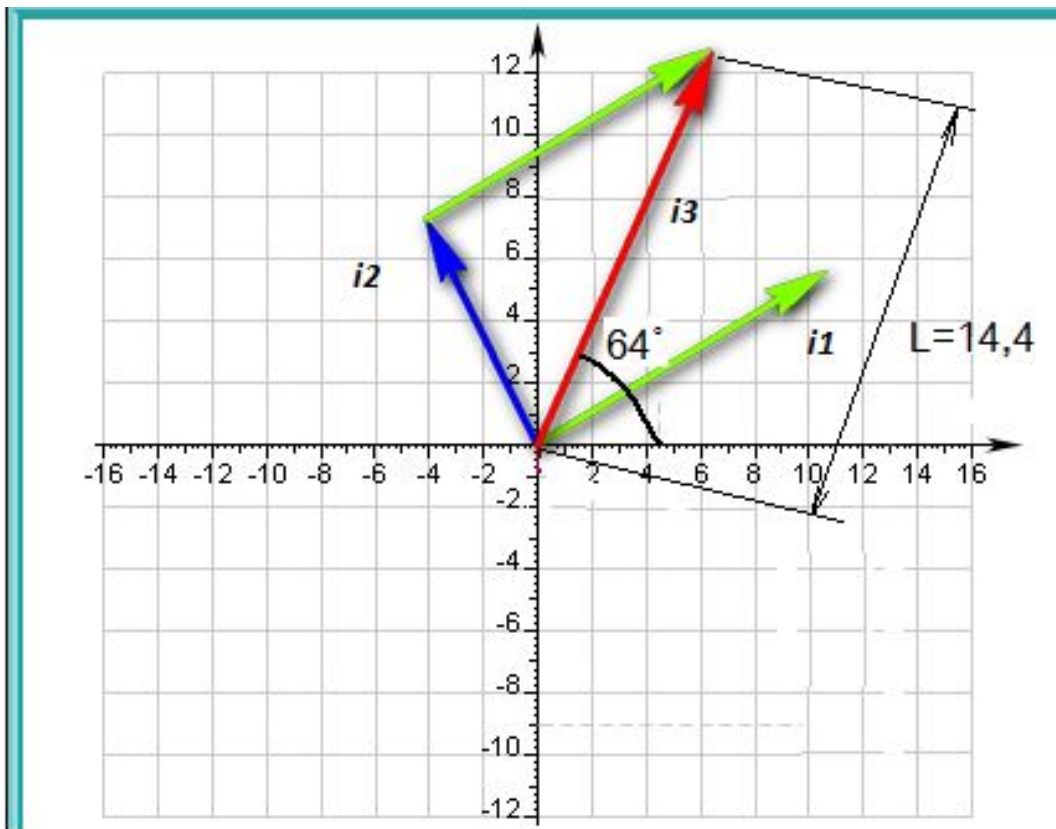


# Действия над комплексными числами. Пример

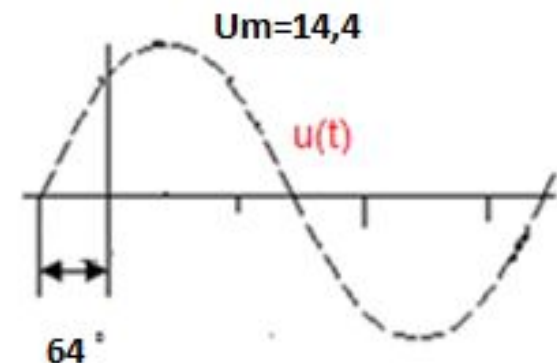
Дано: ток  $i_1=12\sin(\omega t+30^\circ)$   $i_2=8\sin(\omega t+120^\circ)$

Найти: ток  $i_3=i_1+i_2$

Вариант 1. Действия в векторной форме



$$i_3=14,4\sin(\omega t+64^\circ)$$





## Действия над комплексными числами. Пример

Дано: ток  $i_1=12\sin(\omega t+30^\circ)$   $i_2=8\sin(\omega t+120^\circ)$

Найти: ток  $i_3=i_1+i_2$

Вариант 2. Действия в алгебраической форме.

1. Переведем величины в алгебраическую форму.

$$p_1=12\cos 30=10,4$$

$$q_1=12\sin 30=6$$

$$i_1=10,4+j6$$

$$p_2=8 \cos 120=-4$$

$$q_2=8\sin 120=6,9$$

$$i_2=-4+j6,9$$

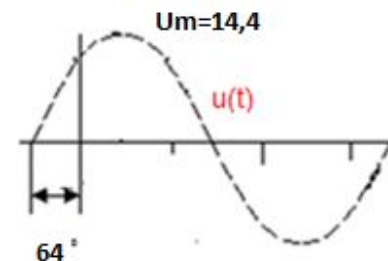
Ответ:  $i_3=i_1+i_2=(10,4+(-4)) + j (6+6,9)=6,4 + j12,9$

2. Переведем обратно в синусоидальную форму

$$I_{3m} = \text{длина вектора} = \sqrt{(6,4^2 + 12,9^2)}=14,4$$

$$\text{Начальная фаза } \Psi_3 = \arctg\left(\frac{12,9}{6,4}\right) = 64^\circ$$

Ответ:  $i_3=14,4\sin(\omega t+64^\circ)$



## Принятые обозначения величин

Обозначения	Название
$i, u, e \quad e \equiv e(t)$	мгновенные значения (соответственно, тока, напряжения, ЭДС)
$I_m, U_m, E_m$	амплитудные значения
$I, U, E$	действующие значения
$\dot{I}_m, \dot{U}_m, \dot{E}_m$	комплексные амплитуды
$\dot{I}, \dot{U}, \dot{E}$	комплексные действующие значения