Электротехника и электроника
Лекция 4
Однофазные линейные электрические цепи синусоидального тока. Электродвижущие силы, напряжения и токи, способы получения и представления

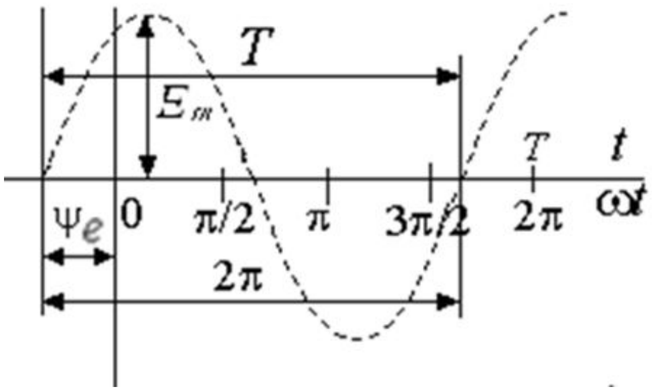
Мириленко Андрей Петрович, к.т.н.
кафедра Электротехники

Основные понятия

Цепи синусоидального напряжения – электрические величины изменяются по синусоидальному закону.

В частности ЭДС

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_e)$$



e (t) – мгновенное значения

E_m — амплитудные значения

$(\omega t + \Psi_e)$ — фаза

Ψ_e — начальная фаза

$\omega = 2\pi f$ - угловая частота [рад/сек]

f — частота [1/сек = Гц]

$$f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Почему применяют синусоидальный ток

В практике применяются частоты переменного тока от долей герца до миллиардов герц.
В электроэнергетике стран Европы и СНГ стандартная частота 50 Гц, а в США — 60 Гц.
Почему 50 Гц? - компромисс
Если частота ниже 50 Гц – заметно мигание ламп и возрастают размеры оборудования. Если частоту увеличивать, то растут потери на вихревые токи, снижается КПД, увеличиваются механические нагрузки на валах.

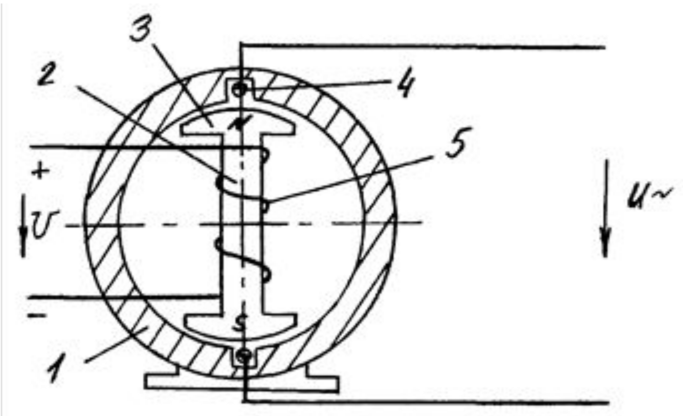
Почему переменный?
- удобство производства
- удобство трансформации т.е. повышения или понижения напряжения
- снижение потерь на линиях передач.

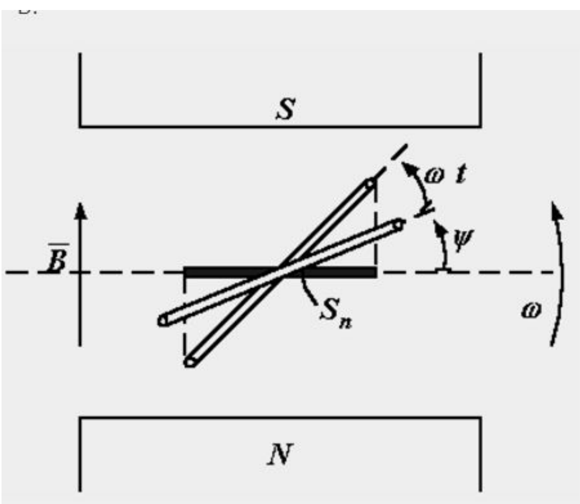
Почему применяют синусоидальный ток

Почему синусоидальный?
Форма кривой периодически изменяющегося переменного тока может быть любой (синусоидальной, пилообразной, прямоугольной и т.д.). Но в практике энергетики применяется синусоидальный ток.

- - производство электроэнергии естественным образом даёт синусоидальный ток
- - оптимальные условия работы электрических установок.

Получение синусоидального напряжения





$$\Phi = B * S_n = BS\cos(\omega t + \Psi)$$

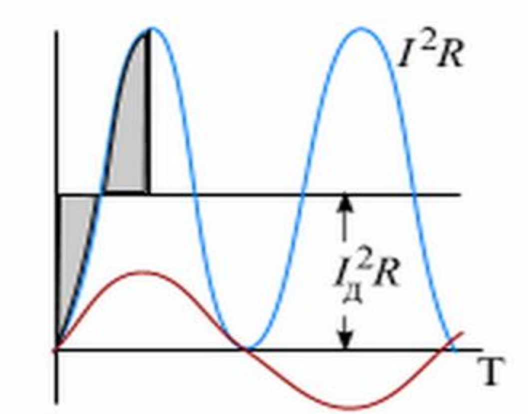
$$e = \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\sin(\omega t + \Psi)$$

Действующие значения синусоидального тока

Действующее значение численно равное величине постоянного тока, который протекая по некоторому резистору за то же время выделит такое же количество теплоты.

$$E_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T E_m \sin(\omega t)dt = \frac{E_m}{\omega t}\cos(\omega t)\Big|_0^T = 0$$ за полпериода

$$E_{cp} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} E_m \sin(\omega t)dt = \frac{E_m}{\omega t}\cos(\omega t)\Big|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi}E_m$$



Переменный ток

$$Q = \int_0^T i^2 \mathrm{R}dt = \int_0^T I_m^2\ R\sin^2(\omega t)dt$$

$$Q = \int_0^T I_m^2 \frac{1-\cos(2wt)}{2}dt = \frac{I_m^2}{2}\left[\int_0^T Rdt + \int_0^T R\cos(2\omega t)dt\right]$$

$$Q = \frac{I_m^2 RT}{2} + 0 \quad \Rightarrow \quad I^2 = \frac{I_m^2}{2}$$

Постоянный ток

$$Q = I^2RT$$

$$I_{действ} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx I_m \times 0{,}7$$

Синусоидальные функции как вектор

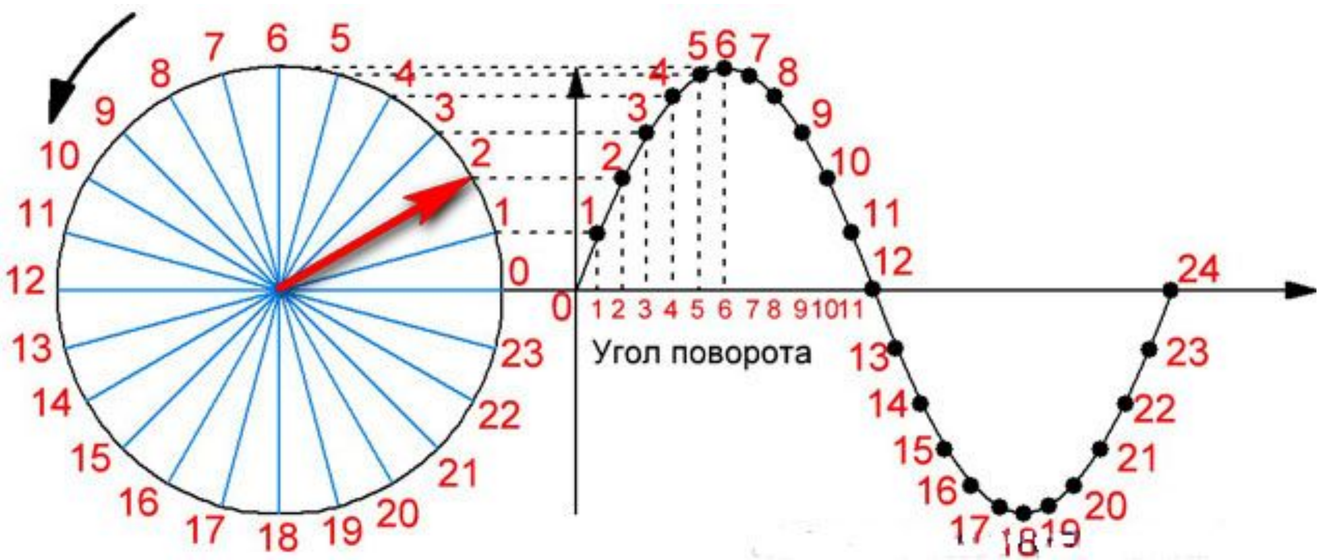
Проблема:
операции с тригонометрическими величинами требуют очень сложной математики

U1=$50\sin(\omega t + 10°)$

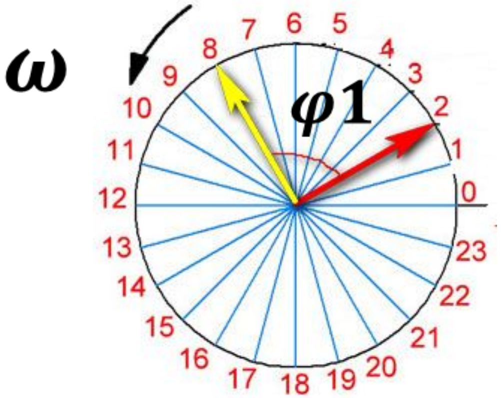
U2=$100\sin(\omega t + 100°)$

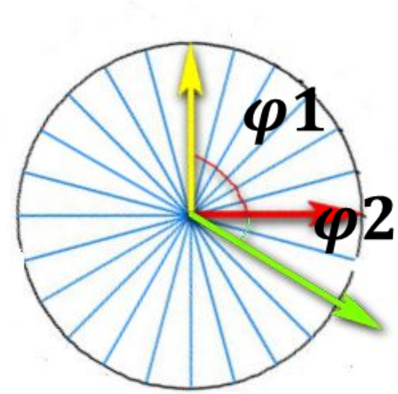
$$U1 + U2 = ?$$

Синусоидальная функция как вращающийся вектор



Синусоидальные функции как вектор





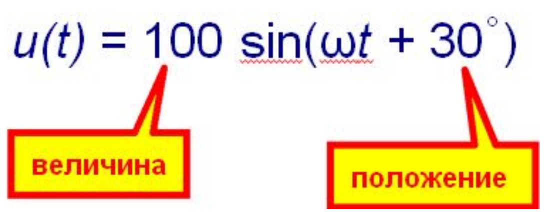
$$\varphi 1 = +90^\circ$$

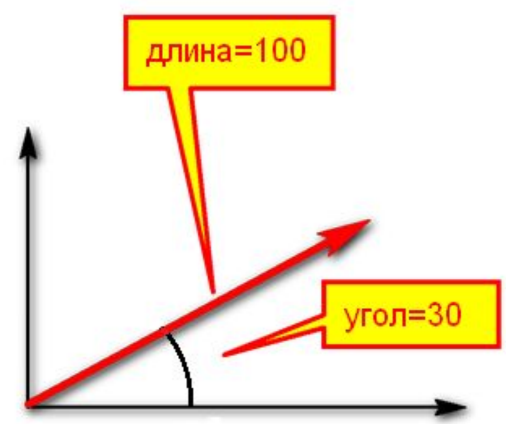
Система отсчета (вектор отсчета)

$$\varphi 2 = -30^\circ$$

1. Все векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью ω.
2. Каждый вектор характеризуется
- величиной (длиной)
- углом поворота относительно нулевого вектора.

3. Любой вектор можно взять в качестве вектора отсчета и связать с ним систему отсчета



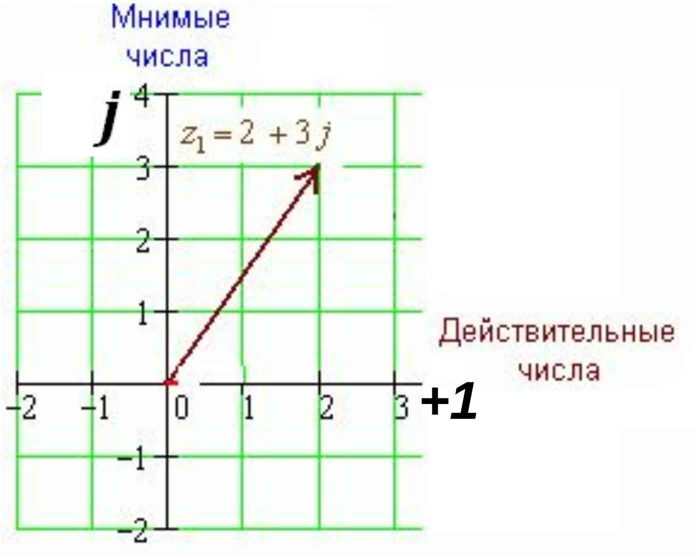


Комплексное число

Комплексное число состоит из двух простых чисел

$$A = p + jq \qquad j = \sqrt{-1}$$

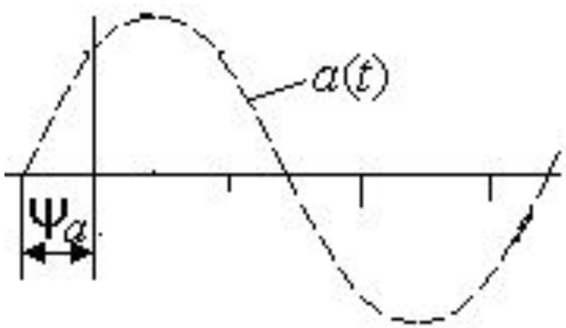
Комплексная плоскость



1. Теперь можно действия над тригонометрическими функциями заменить алгебраическими действиями над комплексными числами.
2. Все законы сохранят свой вид, только вместо простых чисел мы будем подставлять комплексные

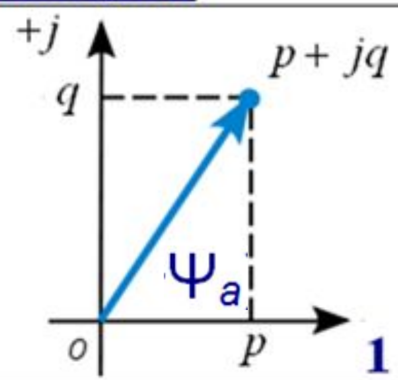
Синусоидальные функции как комплексные числа

Синусоидальная функция = вектор = комплексное число

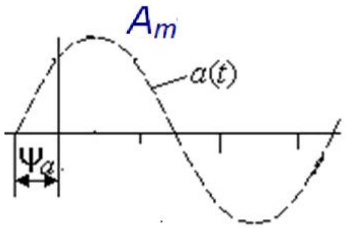


$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \Psi_a)$$

Формы представления

Векторная	Алгебраическая	Показательная	Тригонометрическая
	$\dot{A}_m = p + jq$	$\dot{A}_m = A_m e^{j\Psi_a}$	$\dot{A}_m = A_m(\cos\Psi_a + j\sin\Psi_a)$

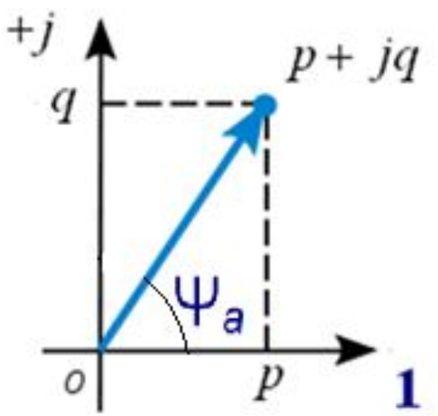
Связь между формами комплексных чисел



$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \Psi_a)$$

$$p = A_m * \cos(\Psi_a)$$
$$q = A_m * \sin(\Psi_a)$$

Векторная



Алгебраическая

$$A_m = p + jq$$

Показательная

$$A_m = A_m e^{j\Psi_a}$$

Действия над комплексными числами

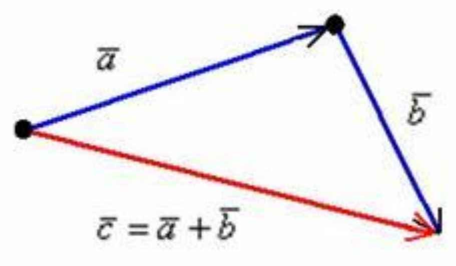
Алгебраическая форма

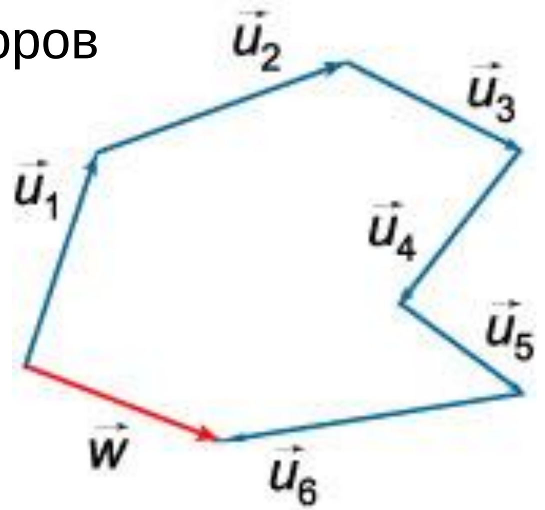
Сложение	$(a+bj)+(c+dj)=(a+c)+(b+d)j$
Вычитание	$(a+bj)-(c+dj)=(a-c)+(b-d)j$
Умножение	$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i.$
Деление (домножить на сопряженное)	$\frac{(a+bj)}{(c+dj)}=\frac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)}=\frac{(ac-bd(\sqrt{-1})^2+bcj-adj)}{(c^2+d^2+cdj-cdj)}=\frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)}+\frac{(bc-ad)j}{(c^2+d^2)}$

Действия над комплексными числами

Векторная форма

Сложение векторов





Скалярное произведение

Скалярное произведение – скалярная величина, равная произведению модулей векторов и косинуса угла между ними.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

В координатной форме скалярное произведение

$$(a + bj) * (c + dj) = ac + bd$$

Скалярное произведение можно применять например при вычислении мощности

Поворот вектора

Умножение вектора на j вызывает его поворот на 90º а на $-j$ даёт поворот на минус 90º

Пример преобразования формы комплексных чисел

Функциональная в другие формы

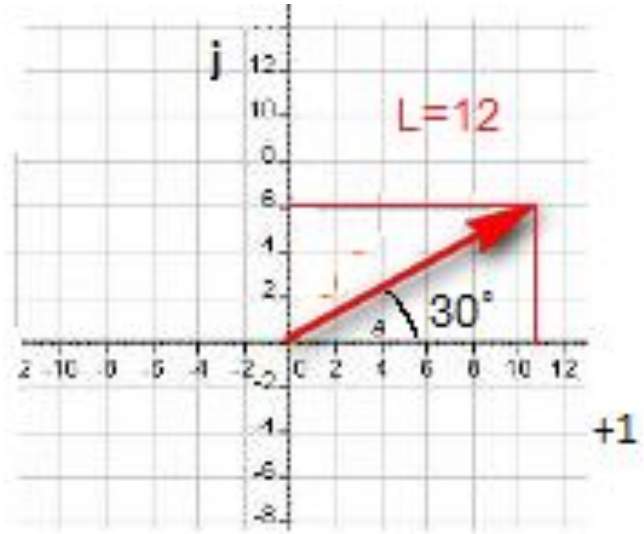
Дано: $u(t)=12\sin(\omega t+30^\circ)$

1. В алгебраическую. $p=12\cos 30^\circ=10,4$ $q=12\sin 30^\circ=6$ $\Rightarrow$ $U=10,4+j6$

2. В показательную. $U = 12e^{j30}$

3. В тригонометрическую. $U=12(\cos 30^\circ+j\sin 30^\circ)$

4. В векторную



Пример преобразования формы комплексных чисел

Алгебраическая в другие формы

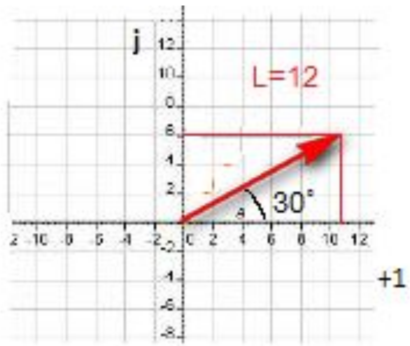
Дано: U=10,4+j6

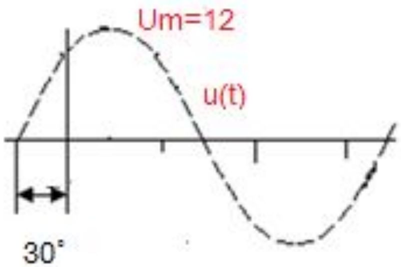
1. Найти величину $\text{Длина вектора} = U_m = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{10{,}4^2 + 6^2} = 12$

2. Найти начальную фазу $\Psi = arctg\left(\frac{6}{10{,}4}\right) = 30°$ $\underline{U = 12e^{30}}$

3. В тригонометрическую U=12(cos30˚+jsin30 ˚)

4. В векторную





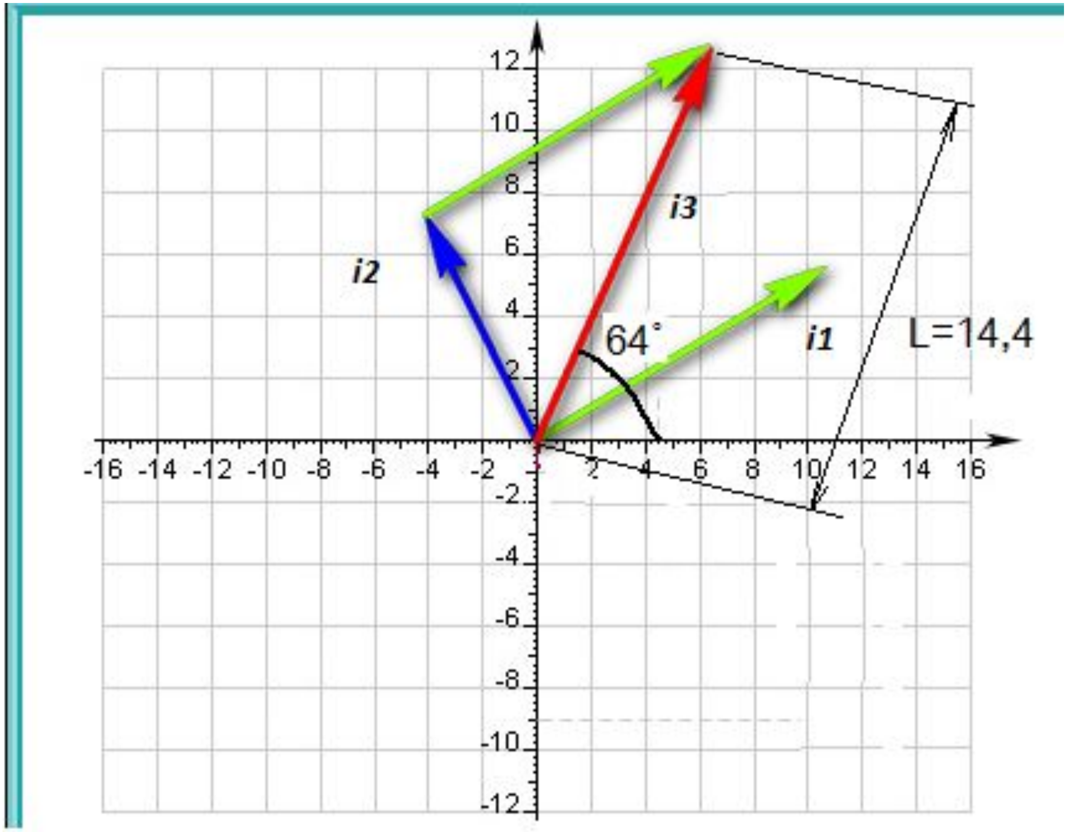
5. В функциональную. u(t)=12sin(ωt+30˚)

Действия над комплексными числами. Пример

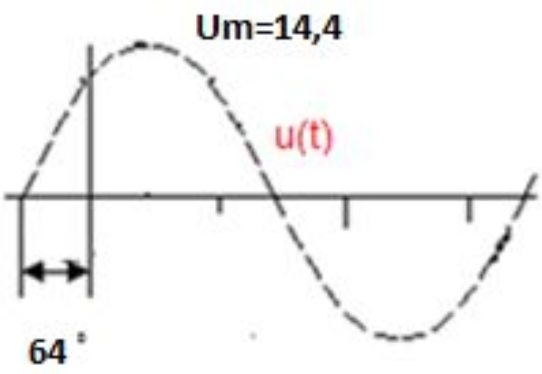
Дано: ток i1=12sin(ωt+30˚) i2=8sin(ωt+120˚)

Найти: ток i3=i1+i2

Вариант 1. Действия в векторной форме



I3=14,4sin(ωt+64˚)



Действия над комплексными числами. Пример

Дано: ток $i1=12\sin(\omega t+30^\circ)$ $i2=8\sin(\omega t+120^\circ)$
Найти: ток $i3=i1+i2$

Вариант 2. Действия в алгебраической форме.

1. Переведем величины а алгебраическую форму.

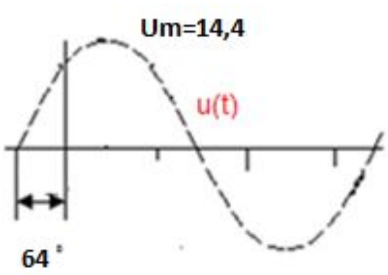
p1=12cos30=10,4	q1=12sin30=6	i1=10,4+J6
p2=8 cos120=-4	q2=8sin120=6,9	i2=-4+j6,9

Ответ: i3=i1+i2=(10,4+(-4)) + j (6+6,9)=6,4 + j12,9

2. Переведем обратно в синусоидальную форму

$$I_{3m} = \text{длина ветора} = \sqrt{(6{,}4^2 + 12{,}9^2} = 14{,}4$$

Начальная фаза $\Psi_3 = arctg\left(\frac{12{,}9}{6{,}4}\right) = 64^\circ$



Ответ: $i3=14{,}4\sin(\omega t+64^\circ)$

Принятые обозначения величин

Обозначения	Название
i, u, e $\quad e \equiv e(t)$	мгновенные значения (соответственно, тока, напряжения, ЭДС)
I_m, U_m, E_m	амплитудные значения
I, U, E	действующие значения
$\dot{I}_m$, $\dot{U}_m$, $\dot{E}_m$	комплексные амплитуды
$\dot{I}$, $\dot{U}$, $\dot{E}$	комплексные действующие значения