Численное решение дифференциальных уравнений

Линейные дифференциальные уравнения в частных производных

Пусть искомая функция зависит от нескольких независимых переменных

$$x_1, x_2, \dots, x_n \,, \quad n \geq 2$$

Уравнение, связывающее искомую функцию, независимые переменные и частные производные от искомой функции, называется **дифференциальным уравнением с частными производными**.

$$F\left(u, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \dots\right) = 0.$$

Здесь F -- данная функция своих аргументов.

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения с частными производными.

Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка с независимыми переменными может быть записано в форме:

$$F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения с частными производными, вообще говоря, может зависеть от некоторых произвольных (гладких) функций.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

С математической точки зрения дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными

$$A(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+E\left(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

классифицируются в зависимости от характера функций *A*, *B* и *C*.

- $B^2-4AC<0$ **– эллиптическое уравнение;**
- $B^2-4AC=0$ **– параболическое уравнение;**
- $B^2-4AC>0$ **– гиперболическое уравнение.**

Классификация дифференциальных уравнений в зависимости от физического смысла решаемых задач:

- Уравнение диффузии $$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
- Уравнение теплопроводности $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
- Волновое уравнение $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Примеры дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

уравнение Лапласа

эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

уравнение теплопроводности

параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

одномерное волновое уравнение

гиперболическое уравнение

уравнение Гельмгольца (Блохинцева)

$$(1 - M^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - 2ikM\frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0 \qquad k = \frac{\omega}{a}$$

- $M < 1$ **– эллиптическое уравнение;**

Звуковые поля в среде, движущейся с дозвуковой скоростью.

- $M = 1$ **– параболическое уравнение;**
- $M > 1$ **– гиперболическое уравнение.**

Решения таких уравнений рассматриваются в газодинамике больших скоростей, когда в поле течения появляются скачки уплотнения и ударные волны, в частности, при исследовании распространения звукового удара от сверхзвукового самолета.

Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

- **метод конечных разностей (МКР);**
- **метод крупных частиц (метод Давыдова);**
- **метод конечных элементов (МКЭ).**

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Существование и единственность решения

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной, имеет вид

Решением данного обыкновенного дифференциального уравнения называется функция **ϕ(x)** , подстановка которой в уравнение обращает его в тождество:

График решения **y= ϕ(x)** называется интегральной кривой.

Задача Коши для дифференциального уравнения

состоит в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию

Частному решению соответствует одна из интегральных кривых, проходящая через точку

<u>Теорема.</u>

Пусть функция *f(x, y)* – правая часть уравнения *y'=f(x, y)* – непрерывна вместе со своей частной производной

в некоторой области D на плоскости.

Тогда при любых начальных данных задача Коши имеет единственное решение y= ϕ(x) .

Численное решение задачи Коши состоит в том, чтобы получить искомое решение ϕ(x) в виде таблицы его приближённых значений для заданных значений аргумента *x* на некотором отрезке *[a, b]* :

Точки называют узловыми точками, а множество этих точек называют сеткой на отрезке *[a, b]*.

Будем использовать равномерную сетку с шагом h:

Приближённые значения численного решения задачи Коши в узловых точках x_i обозначим через y_i.

Таким образом,

Для любого численного метода решения задачи Коши начальное условие выполняется точно:

Величина погрешности численного метода решения задачи Коши на сетке отрезка [a, b] оценивается величиной

Говорят, что численный метод имеет *p*-й порядок точности по шагу h на сетке, если расстояние d можно представить в виде степенной функции от h:

где C – некоторая положительная постоянная, зависящая от *f(x, y)* и от рассматриваемого метода.

Метод Эйлера

- Будем решать задачу Коши

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), y(t_0) = y_0 \text{ на отрезке } [t_0, T].$$

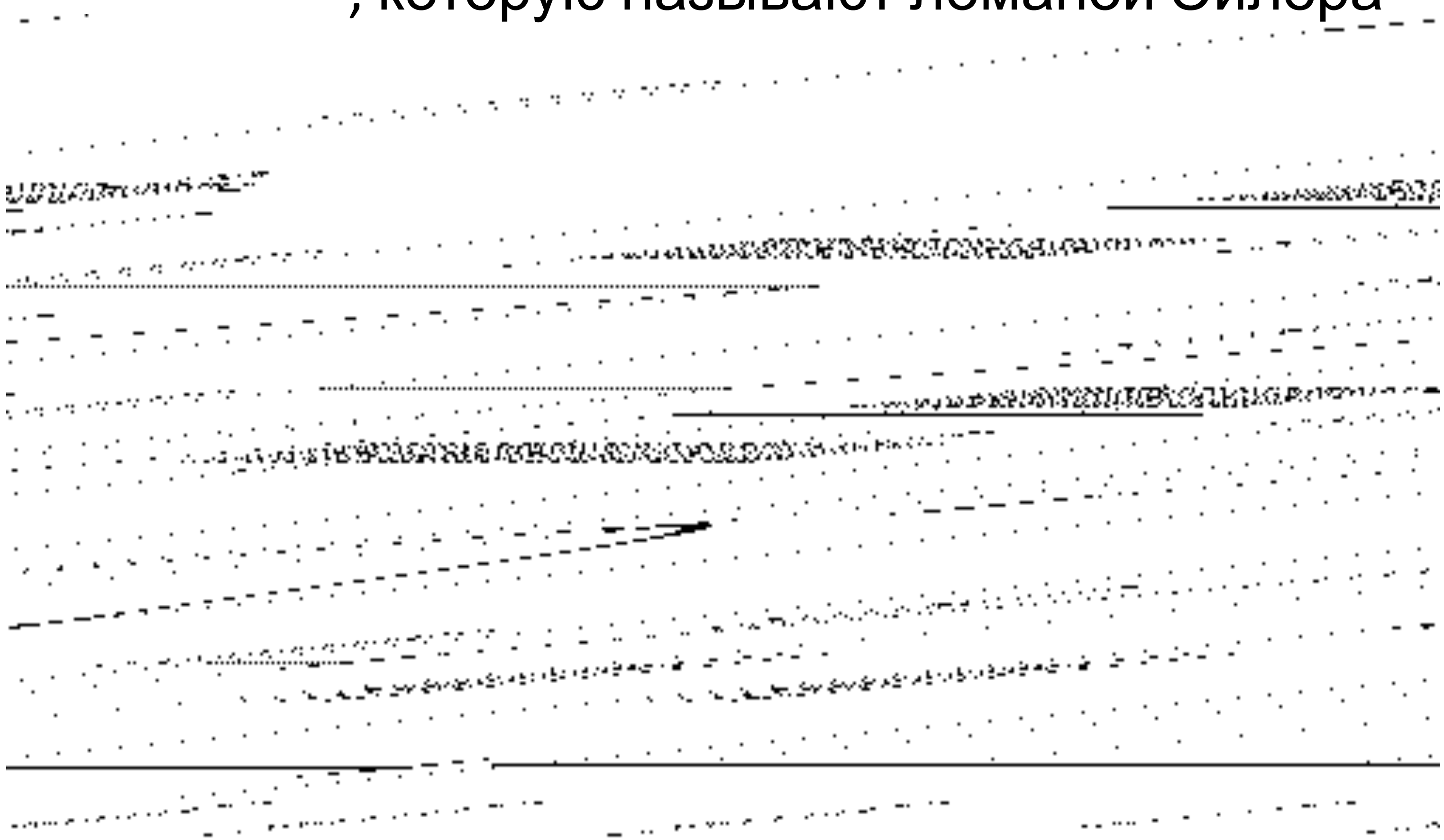
- Выберем шаг $h = \frac{T-t_0}{n}$ и построим сетку с системой узлов $t_i = t_0 + ih, i = 0,1, \dots, n$
- Вычисляем приближенные значения функции y(t) в узлах сетки: $y_i \approx y(t_i)$.
- Производную y'(t) в каждой точке (t,y) можно геометрически интерпретировать как тангенс угла наклона касательной к графику решения, проходящей через эту точку.
- Заменим производную y'(t) конечными разностями на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ и получим приближенное равенство:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i), i = 0,1, \dots, n-1$$

или $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), i = 0,1, \dots, n-1$

Графической иллюстрацией приближённого решения является ломаная, соединяющая последовательно точки

, которую называют ломаной Эйлера



Погрешность метода Эйлера

<u>Теорема</u>

Пусть функция f удовлетворяет условиям:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K, \left|\frac{df}{dt}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right| \le L,$$

где K и L – некоторые неотрицательные числа.

Тогда для метода Эйлера справедлива следующая оценка погрешности:

$$R = \max_{0 \le i \le n} |y(t_i) - y_i| \le \frac{l^2 L}{2n} e^{KL} = \frac{l^2 h}{2} e^{KL},$$

Где l – длина отрезка $[t_0, T]$

- Практическую оценку погрешности решения, найденного на сетке с шагом h/2, в точке t_i проводят с помощью приближённого равенства – правила Рунге:

$$|y_i - y(t_i)| \approx \frac{1}{2^p - 1}\left|y_i\left(\frac{h}{2}\right) - y_i(h)\right|$$

где p – порядок точности численного метода.

Метод Эйлера имеет первый порядок точности, т.е. p=1.

Поэтому оценка имеет вид: $R \approx \left|y_i(h) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)\right|$

Таким образом, оценка полученного результата по приведенной формуле вынуждает проводить вычисления дважды: один раз с шагом h, другой − с шагом h/2 .

Приближенным решением будут значения $y_i\left(\frac{h}{2}\right), \mathrm{i} = 0{,}1, \ldots, \mathrm{n}$

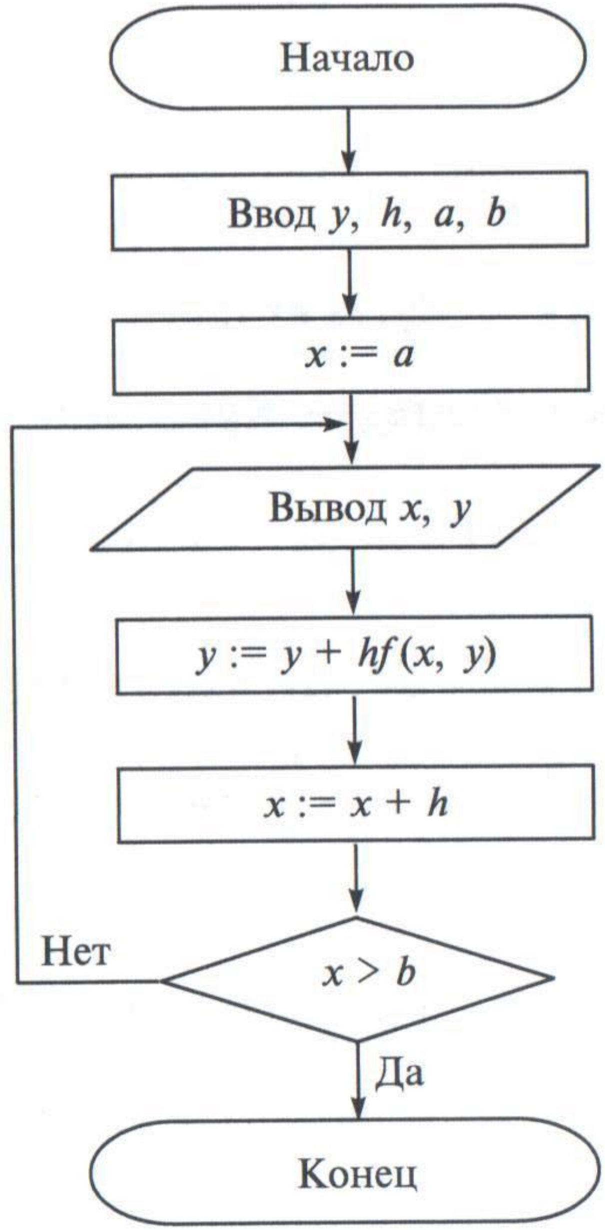


Схема алгоритма метода Эйлера

Пример 1

- Решить задачу Коши на отрезке [0, 1] методом Эйлера с шагом 0,2.

$$y'(y) = y - \frac{2t}{y}, y(0) = 1$$

- Сравнить полученное решение с аналитическим.

Решение

- Т.к. h = 0,2, n = (1 - 0)/0,2 = 5

Расчетная формула Эйлера имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}2 \cdot \left(y_i - \frac{2t_i}{y_i} \right), y_0 = 1, i = 0{,}1, \dots, n$$

i	t_i	y_i
0	0	1,0000
1	0,2	
2	0,4	
3	0,6	
4	0,8	
5	1,0	

Исходное уравнение $y'(y) = y - \frac{2t}{y}$ есть уравнение Бернулли.

Его решение в явном виде: $y = \sqrt{2t+1}$

Результаты сравнения решений сведем в таблицу:

i	t_i	y_i	$y(t_i)$-аналит.	R_i
0	0	1,0000	1,0000	0
1	0,2	1,2000	1,1832	0,0168
2	0,4		1,3416	0,0317
3	0,6		1,4832	0,0483
4	0,8		1,6125	0,0686
5	1,0		1,7321	0,0949

$R=\max(R_i)=0,0949$

Модификации метода Эйлера

- **Первый модифицированный метод Эйлера** является одношаговым со вторым порядком точности.
- Будем решать задачу Коши

$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), y(t_0) = y_0$ на отрезке $[t_0, T]$.

Шаг $h = \frac{T - t_0}{n}$

- Сначала вычисляются вспомогательные значения функции $y_{i+1/2}$ в точках $t_{i+1/2} = t_i + \frac{h}{2}$ с помощью формулы:

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f_i = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)$$

- Затем находим значения $f\big(t, y(t)\big)$ в средней точке: $f_{i+1/2} = f\big(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\big)$ и полагаем, что

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+1/2}, i = 0,1, \dots n-1$$

Второй модифицированный метод Эйлера

- Является одношаговым со вторым порядком точности.
- Сначала вычисляем вспомогательные значения $\widetilde{y_{i+1}} = y_i + hf(t_i, y_i)$
- Приближения искомого решения находятся по формуле:
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \widetilde{y_{i+1}})\right], i = 0,1, \dots, n-1$$
- Оценка погрешности модифицированных методов:
$$R \approx \frac{1}{3}\left|y_i\left(\frac{h}{2}\right) - y_i(h)\right|$$
- Приближенным решением являются значения $y_i(\frac{h}{2}), i = 0,1, \dots, n$

Пример 2

- Решить задачу Коши на отрезке [0, 1] модифицированными методами Эйлера с шагом 0,2.

$$y'(y) = y - \frac{2t}{y}, y(0) = 1$$

Решение 1-ым модифицированным методом Эйлера

- Расчетная формула имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+\frac{1}{2}} = y_i + 0{,}2f_{i+\frac{1}{2}},$$

Где $f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) = y_{i+\frac{1}{2}} - \dfrac{2t_{i+\frac{1}{2}}}{y_{i+\frac{1}{2}}}$

$$t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2} = t_i + 0{,}1$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i) = y_i + 0{,}1 \cdot \left(y_i - \frac{2t_i}{y_i}\right)$$

$$t_0 = 0, y_0 = 1, i = 0{,}1, \dots, 4$$

i	t_i	y_i				
0	0,0	1,0000	0,1000	0,1	1,1000	0,1836
1	0,2	1,1836	0,0850	0,3	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210
5	1,0	1,7362				

Например, для первой строки

$$hf_{0+1/2} = 0{,}2 \cdot (1{,}1000 - 2 \cdot 0{,}1/1{,}1000) = 0{,}1836$$

Таблица заполняется построчно по мере вычисления вспомогательных величин.

Оценка погрешности R= $\max\limits_{0 \le i \le n} |y(t_i) - y_i|$ =0,0042

Решение 2-ым модифицированным методом Эйлера

- Расчетная формула имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}1 \cdot [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \widetilde{y_{i+1}})],$$

$$f(t_i, y_i) = y_i - \frac{2t_i}{y_i};$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + 0{,}2 \cdot \left(y_i - \frac{2t_i}{y_i}\right),$$

$$t_0 = 0, y_0 = 1, i = 0{,}1, \dots, 4$$

Решение представим в таблице, заполняя ее последовательно по строкам.

Приближенное значение y_i будет помещаться в третий столбец таблицы.

i	t_i	y_i				
0	0,0	1	0,1	0,2	1,2	0,8667
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,7670
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,6989
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6180	0,6291
4	0,8	1,6272	0,0645	1,0	1,7569	0,6180
5	1,0	1,7542				

Пример вычисления значений первой строки:

$$\frac{h}{2} f(t_i, y_i) = 0{,}1 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}1,\ \tilde{y}_{i+1} = 1 + 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 1{,}2$$

$$f(t_{i+1}, \widetilde{y_{i+1}}) = 1{,}2 - \frac{2 \cdot 0{,}2}{1{,}2} = 0{,}8667,$$

$$y_{i+1} = 1 + 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 0{,}8667 = 1{,}1867$$

Сравним полученное значение с точным решением:

R= $\max\limits_{0 \le i \le n} |y(t_i) - y_i|$ =0,0222

Метод Рунге-Кутта

Основная идея метода – вместо использования в расчётных формулах частных производных функции f(x, y) использовать саму функцию, но на каждом шаге вычислять её значения в нескольких точках.
Возможно применение формул Рунге-Кутта разных порядков. Наиболее часто применяются на практике формулы Рунге Кутта 4-го порядка точности.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения $y'(t) = f(t, y(t))$ с начальным условием $y(t_0) = y_0$.

Как и в методе Эйлера, выберем шаг $h = \frac{T - t_0}{n}$ и построим сетку с системой узлов $t_i = t_0 + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n$.

Обозначим через y_i приближенное значение искомого решения в точке t_i.

Расчетные формулы метода Рунге – Кутта четвертого порядка точности:

- $$y_{i+1} = y_i + (1/6)h\left(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4\right)$$

$$k_i^1 = f(t_i, y_i)$$

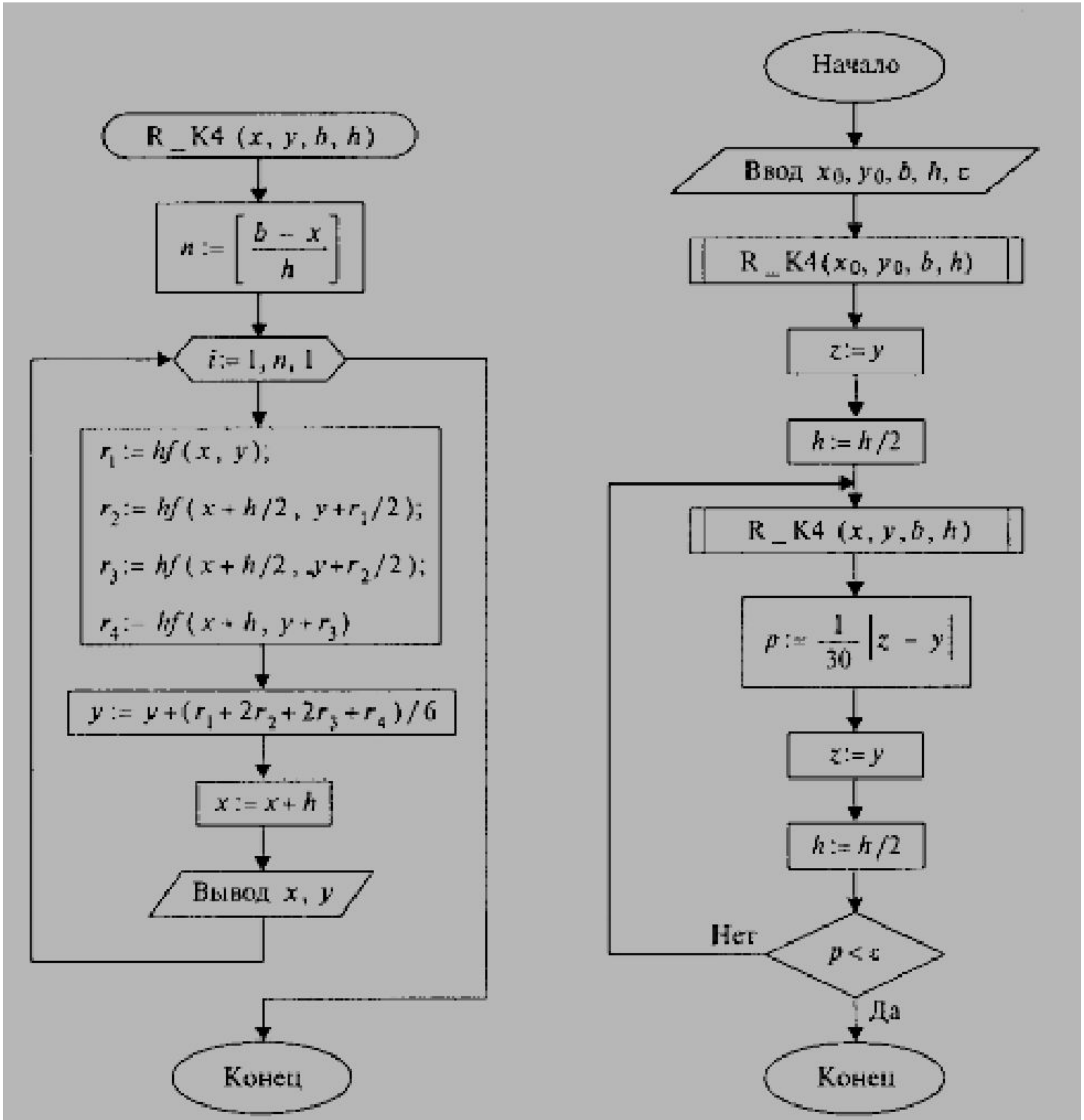
$$k_i^2 = f\left(t_i + h/2, y_i + (h/2)k_i^1\right)$$

$$k_i^3 = f\left(t_i + h/2, y_i + (h/2)k_i^2\right)$$

$$k_i^4 = f\left(t_i + h, y_i + hk_i^3\right) \qquad i = 0, 1,\ldots, n$$

Оценка погрешности:

$$R \approx \frac{1}{15}\left|y_i\left(\frac{h}{2}\right) - y_i(h)\right|$$


R _ K4 (x, y, b, h)
n := [(b − x)/h]
i := 1, n, 1
r1 := hf (x, y);
r2 := hf (x + h/2, y + r1/2);
r3 := hf (x + h/2, y + r2/2);
r4 := hf (x + h, y + r3)
y := y + (r1 + 2r2 + 2r3 + r4)/6
x := x + h
Вывод x, y
Конец
Начало
Ввод x0, y0, b, h, ε
R _ K4 (x0, y0, b, h)
z := y
h := h/2
R _ K4 (x, y, b, h)
p := 1/30 |z − y|
z := y
h := h/2
p < ε
Нет
Да
Конец

Пример 3

- Решить задачу Коши методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

$$y'(t) = 2ty, y(0) = 1 \text{ на отрезке } [0,1]$$

Сравнить с точным значением.

Решение

- Выберем шаг h=0,1, тогда n=10.

Расчетные формулы примут вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot 0{,}1 \cdot \left(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4\right), i = 0{,}1, \dots, 10$$

$$k_i^1 = 2t_i y_i;$$

$$k_i^2 = 2\left(t_i + \frac{0{,}1}{2}\right) \cdot \left(y_i + \frac{0{,}1}{2} k_i^1\right);$$

$$k_i^3 = 2\left(t_i + \frac{0{,}1}{2}\right) \cdot \left(y_i + \frac{0{,}1}{2} k_i^2\right);$$

$$k_i^4 = 2(t_i + 0{,}1) \cdot \left(y_i + 0{,}1 k_i^3\right)$$

Исходная задача имеет точное решение $y(t) = e^{t^2}$, поэтому погрешность определяется как $\varepsilon_i = |y(t_i) - y_i|$

0,1	1,01005	
0,2	1,04081	
0,3	1,09417	
0,4	1,17351	
0,5	1,28403	
0,6	1,43333	
0,7	1,63232	
0,8	1,89648	
0,9	2,24790	
1,0	2,71827	

Порядок вычисления для первой строки:

$$k_0^1 = 2t_0y_0 = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$k_0^2 = 2\left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0\right) = 0{,}1$$

$$k_0^3 = 2\left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}1\right) = 0{,}1005$$

$$k_0^4 = 2(0 + 0{,}1) \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1005) = 0{,}2020$$

$$y_{i+1} = 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}1 \cdot (0 + 2 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1005 + 0{,}2020) = 1{,}01005$$

Дифференциальные уравнения второго порядка. Краевые задачи.

На практике часто приходится решать задачи, когда требуется, чтобы искомая функция имела бы заданные значения на границах отрезка, на котором рассматривается решение.

Такие задачи, называемые *краевыми*, получаются при решении уравнений высших порядков или систем уравнений.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка [illegible]

Краевая задача состоит в отыскании решения [illegible]

уравнения на отрезке [a, b] , удовлетворяющего на концах отрезка условиям

[illegible] [illegible]

Методы решения краевых задач

- ***Аналитические методы*** имеются лишь для решения узкого класса уравнений, в частности для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые широко используются при исследовании различных физических процессов
- ***Приближенные методы*** разрабатывались еще задолго до появления компьютеров. Однако многие из них до сих пор не утратили своего значения. Это методы коллокаций, наименьших квадратов, метод Галеркина и др.
- ***Численные методы*** решения краевой задачи можно разделить на две группы: сведение (редукция) решения краевой задачи к последовательности решений задач Коши и непосредственное применение конечно-разностных методов.

Виды краевых задач

Краевая задача I рода (Дирихле)

$$\begin{cases} y'' + a_{(}(x)y' + a_2(x)y = f(x), & x \in [a,\ b] \\ y(a) = 0, \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

Краевая задача II рода (Неймана)

$$\begin{cases} y'' + a_{(}(x)y' + a_2(x)y = f(x), & x \in [a,\ b] \\ y'(a) = 0, \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

Краевая задача III рода (Робена)

$$\begin{cases} y'' + a_{(}(x)y' + a_2(x)y = f(x), & x \in [a,\ b] \\ y'(a) - hy(a) = 0, & h > 0, \\ y'(b) + Hy(b) = 0, & H > 0. \end{cases}$$