Тема 6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ АВИАЦИОННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

6.3 Применение последовательного анализа и правила Вальда в задачах контроля

В рассмотренных выше процедурах предполагалось, что решение о состоянии ОК принимается на основе одного наблюдения или выборки наблюдений фиксированного объема. Причем риск, связанный с принятием решения, уменьшается при увеличении числа наблюдений.

Механизм принятия решения может быть сформирован таким образом, чтобы кроме основных задач он позволял определять и необходимый объем выборки.

Применение последовательного анализа наблюдений позволяет:

– сократить время от начала наблюдения до принятия решения по выборке переменного объема;
– получить рекуррентные процедуры принятия решения о состоянии ОК.

При проверке гипотез по одному наблюдению или выборке фиксированного объема отношение правдоподобия L сравнивается с порогом П. При последовательном анализе используются два порога – Π_0 и Π_1, которые могут меняться при изменении числа наблюдений. Если на некотором шаге i отношение правдоподобия $L(i) > \Pi_1(i)$, то принимается гипотеза ϑ_1. Если $L(i) < \Pi_0(i)$, то принимается гипотеза ϑ_0, а если $\Pi_0(i) \le L(i) \le \Pi_1(i)$, то наблюдение продолжается.

Для вычисления порога при непоследовательной процедуре принятия решения, согласно выражению (15.10), необходимо знать априорные вероятности или плотности вероятностей соответствующих гипотез $f(\vartheta_0)$ и $f(\vartheta_1)$. Аналогично для определения порогов при реализации последовательного правила на i-м шаге необходимо знать априорные вероятности $f(\vartheta_{0,i})$ и $f(\vartheta_{1,i})$ этих гипотез до i-го шага.

Для получения рекуррентной процедуры принятия решения допустим, что на $(i-1)$-м шаге принята гипотеза $\vartheta_{0,i-1}$. Тогда априорную плотность вероятности для данной гипотезы на i-м шаге можно рассматривать как апостериорную после выполнения $i-1$ шагов

$$f(\vartheta_{0,i}) = f(\vartheta_{0,i-1}/z_{i-1})f(z_{i-1}) = f(z_{i-1}/\vartheta_{0,i-1})f(\vartheta_{0,i-1}). \qquad (15.11)$$

Если же на $(i-1)$-м шаге выбрана гипотеза ϑ_1, то ее априорная плотность вероятности для i-го шага будет иметь аналогичный вид

$$f(\vartheta_{1,i}) = f(\vartheta_{1,i-1}/z_{i-1})f(z_{i-1}) = f(z_{i-1}/\vartheta_{1,i-1})f(\vartheta_{1,i-1}). \qquad (15.12)$$

Разделим соотношение (15.12) на (15.11), получим следующее выражение для отношения плотностей вероятностей на i-м шаге

$$\frac{f(\vartheta_{1,i})}{f(\vartheta_{0,i})} = \frac{f(z_{i-1}/\vartheta_{1,i-1})f(\vartheta_{1,i-1})}{f(z_{i-1}/\vartheta_{0,i-1})f(\vartheta_{0,i-1})}. \qquad (15.13)$$

Обозначим отношение правдоподобия для $(i-1)$-го шага через L_{i-1}

$$L_{i-1} = \frac{f(z_{i-1}/\vartheta_{1,i-1})}{f(z_{i-1}/\vartheta_{0,i-1})}. \qquad (15.14)$$

Тогда выражение для отношения плотностей вероятностей после $(i-1)$ шагов наблюдений можно записать в следующем виде:

$$\frac{f(\vartheta_{1,i})}{f(\vartheta_{0,i})} = L_{i-1}\,\frac{f(\vartheta_{1,i-1})}{f(\vartheta_{0,i-1})}. \qquad (15.15)$$

Полученное соотношение (15.15) отражает технологию последовательного анализа при принятии решения о состоянии ОК. Оно показывает, что текущее отношение плотностей вероятности принятия гипотез ϑ_1 и ϑ_0 определяется произведением отношения данных плотностей, полученных на предыдущем шаге, и отношения правдоподобия L, зависящего только от результатов наблюдений на предшествующих шагах. В качестве начального значения в этом соотношении можно выбрать отношение $f(\vartheta_1)/f(\vartheta_0)$, которое использовалось бы при построении непоследовательной процедуры.

Если элементы выборки независимы, то отношение правдоподобия для всей выборки можно записать как произведение отношений правдоподобия для наблюдений на разных шагах. Рекуррентное представление соотношения (15.15) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{f(\vartheta_{1,i})}{f(\vartheta_{0,i})} = \prod_{k=0}^{i-1} L_k \frac{f(\vartheta_1)}{f(\vartheta_0)}. \qquad (15.16)$$

Как видно из выражения (15.10), для вычисления порога необходимо знать и значения потерь, что в большинстве случаев затруднительно.

Развитием метода последовательного анализа является процедура Вальда. *Правило Вальда* связывает формирование порогов Π_0 и Π_1 с вероятностями ложной тревоги $P_л$ и пропуска отказа $P_п$ и тем самым упрощает процедуру принятия решения.

Для определения допусков в соответствии с этим правилом предположим, что на i-м шаге отношение правдоподобия L_i оказалось равным порогу Π_1. (При дискретной выборке может оказаться, что $L \geq \Pi_1$). Следовательно, принимается гипотеза ϑ_1 и

$$L_i = \frac{f(z_i / \vartheta_1)}{f(z_i / \vartheta_0)} = \Pi_1 .$$

Перепишем полученное выражение в виде

$$f(z_i / \vartheta_1) = \Pi_1 f(z_i / \vartheta_0). \qquad (15.17)$$

Проинтегрируем выражение (15.17) по области принятия гипотезы ϑ_1 (см. рис. п. 6.1)

$$\int_{z_\text{п}}^{\infty} f(z_i / \vartheta_1) dz = \Pi_1 \int_{z_\text{п}}^{\infty} f(z_i / \vartheta_0) dz \,. \tag{15.18}$$

С учетом соотношений (15.1), (15.2) полученное выражение можно представить в следующем виде:

$$1 - P_\text{п} = \Pi_1 P_\text{л} \,.$$

Тогда порог Π_1 для гипотезы ϑ_1 будет иметь вид

$$\Pi_1 = \frac{1 - P_\text{п}}{P_\text{л}} \,. \tag{15.19}$$

Аналогичным образом можно получить выражение для порога Π_0 гипотезы ϑ_0

$$\Pi_0 = \frac{P_\text{п}}{1 - P_\text{л}} \,. \tag{15.20}$$

Соотношения (15.19) и (15.20) показывают, что процедура принятия решения о состоянии ОК по правилу Вальда основана на знании априорных вероятностей пропуска отказа и ложной тревоги. Причем значения порогов последовательного правила Вальда не зависят от номера наблюдения i, если вероятности $P_\text{п}$ и $P_\text{л}$ не зависят от номера i.

Отношение правдоподобия L определяется по плотностям вероятностей. Оно может уточняться по поступающим наблюдениям.