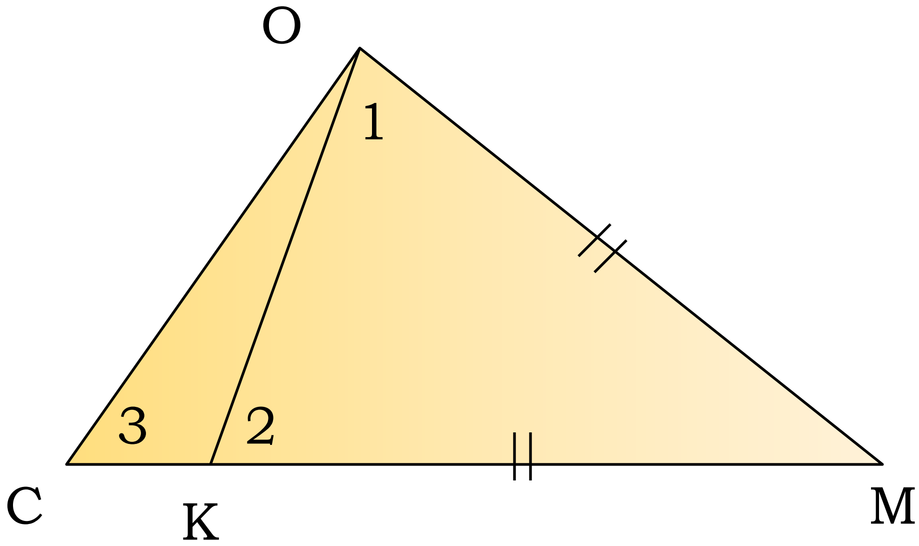
Неравенство треугольника



$Дано:\ \Delta MOC,$

$K \in CM,\ MO = MK$

$Доказать:\ \angle 1 > \angle 3;$

$\angle MOC > \angle 3$

Угол 2 – внешний угол треугольника СОК при вершине К

$\angle 2 = \angle 3 + \angle COK$

$\angle 2 > \angle 3$

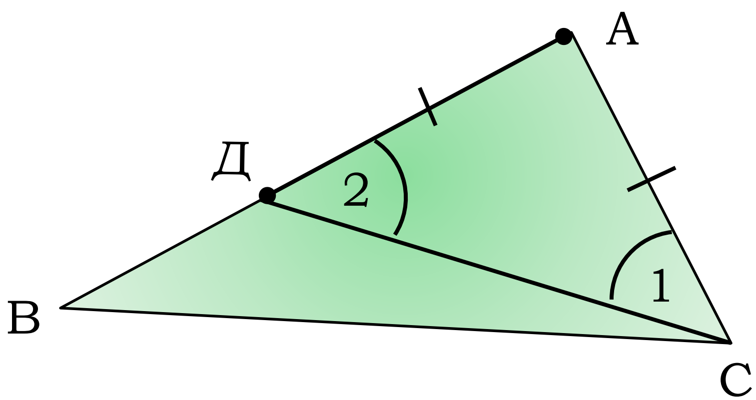
$$\begin{cases} \angle MOC > \angle 1 \\ \angle 1 = \angle 2 \end{cases} \Rightarrow \angle MOC > \angle 2$$

$$\begin{cases} \angle MOC > \angle 2 \\ \angle 2 > \angle 3 \end{cases} \Rightarrow \angle MOC > \angle 3$$

Соотношения между сторонами и углами треугольника

ТЕОРЕМА.

В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол;
2) против большего угла лежит большая сторона.



Дано: ΔАВС, АВ > АС
Доказать: ∠С > ∠В

На стороне АВ отложим отрезок АД, равный АС.

Проведем отрезок СД.

Так как АД < АВ, то точка Д лежит между точками А и В, луч СД проходит между сторонами угла АСВ, значит угол АСД– часть угла АСВ.

$$\angle ACB > \angle AC\text{Д}$$

Δ АДС –равнобедренный

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle C > \angle 1 \end{cases} \Rightarrow \angle C > \angle 2$$

Угол 2 – внешний угол треугольника ВДС при вершине Д

$$\angle 2 = \angle B + \angle BC\text{Д}$$

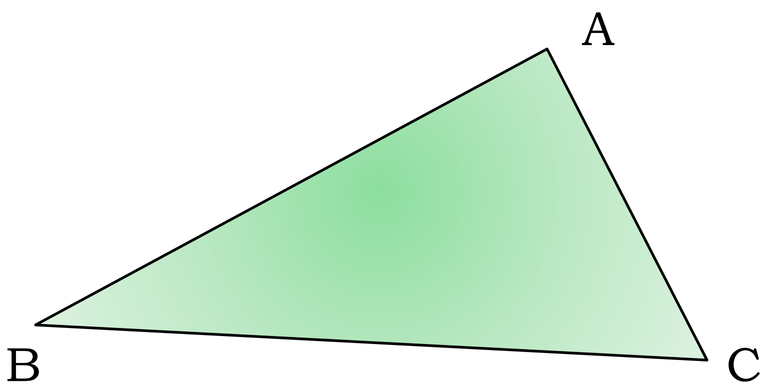
$$\angle 2 > \angle B$$

$$\begin{cases} \angle C > \angle 2 \\ \angle 2 > \angle B \end{cases} \Rightarrow \angle C > \angle B$$

Соотношения между сторонами и углами треугольника

ТЕОРЕМА.

В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол;
2) против большего угла лежит большая сторона.



$Дано: \Delta ABC, \angle C > \angle B$

$Доказать: \ AB > AC$

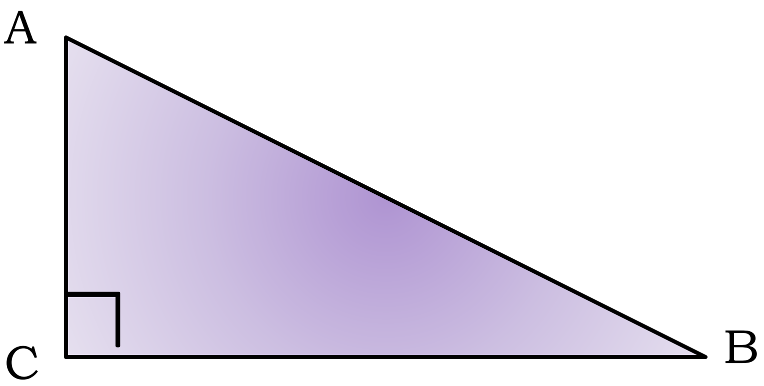
$Предположим, что \ AB = AC \ или \ AB < AC$

$Если \ AB = AC, то \ \angle C = \angle B$ $\qquad$ $Если \ AB < AC, то \ \angle C < \angle B$

В обоих случаях получили противоречие с условием теоремы, значит наше предположение неверно. Следовательно, AB >AC

Соотношения между сторонами и углами треугольника

СЛЕДСТВИЕ 1.

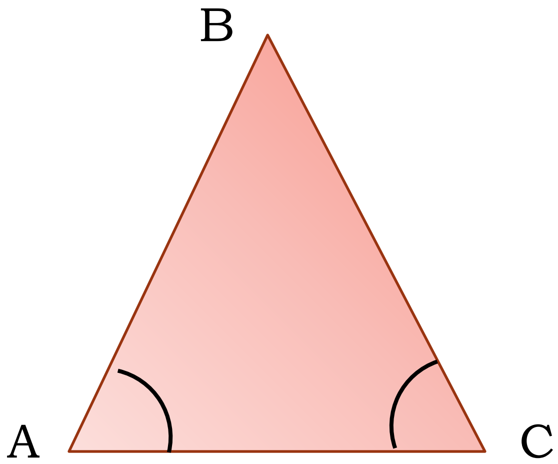


В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета

Почему ?

СЛЕДСТВИЕ 2. (признак равнобедренного треугольника)

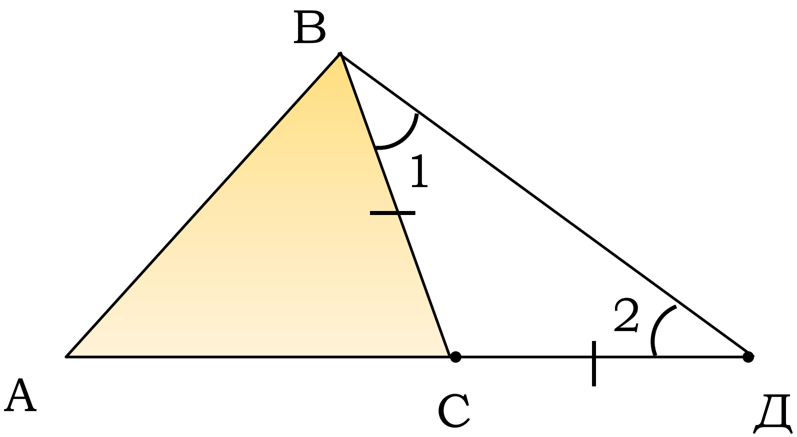
Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный



Почему ?

Неравенство треугольника

ТЕОРЕМА. **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон**



$Дано: \Delta ABC$

$Доказать: \ AB < AC + CB$

На продолжении стороны АС отложим отрезок СД, равный ВС

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle ABД > \angle 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \angle ABД > \angle 2$$

Рассмотрим треугольник АВД

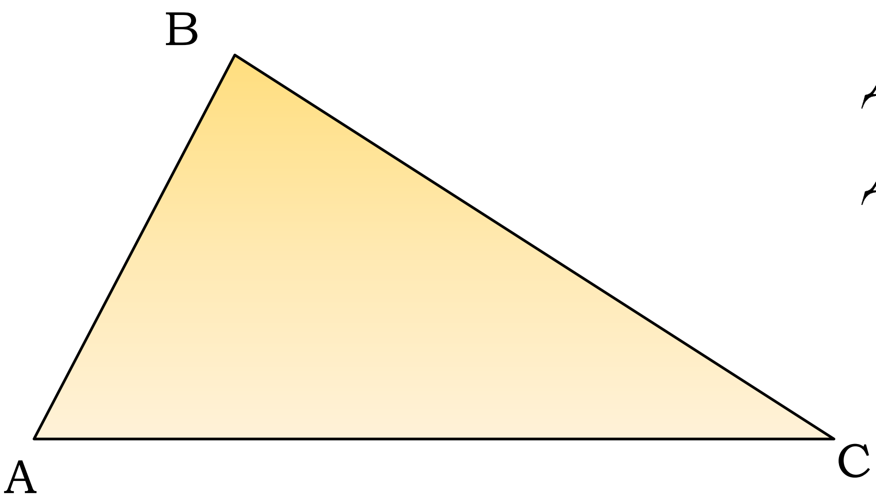
$$\angle Д < \angle B \quad \Rightarrow \quad AB < AД$$

$$AB < AC + CД$$

$$AB < AC + BC$$

Неравенство треугольника

№ 251. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон



$$Дано: \Delta ABC$$

$$Доказать: \ AB > AC - CB$$

$$AB + BC > AC$$

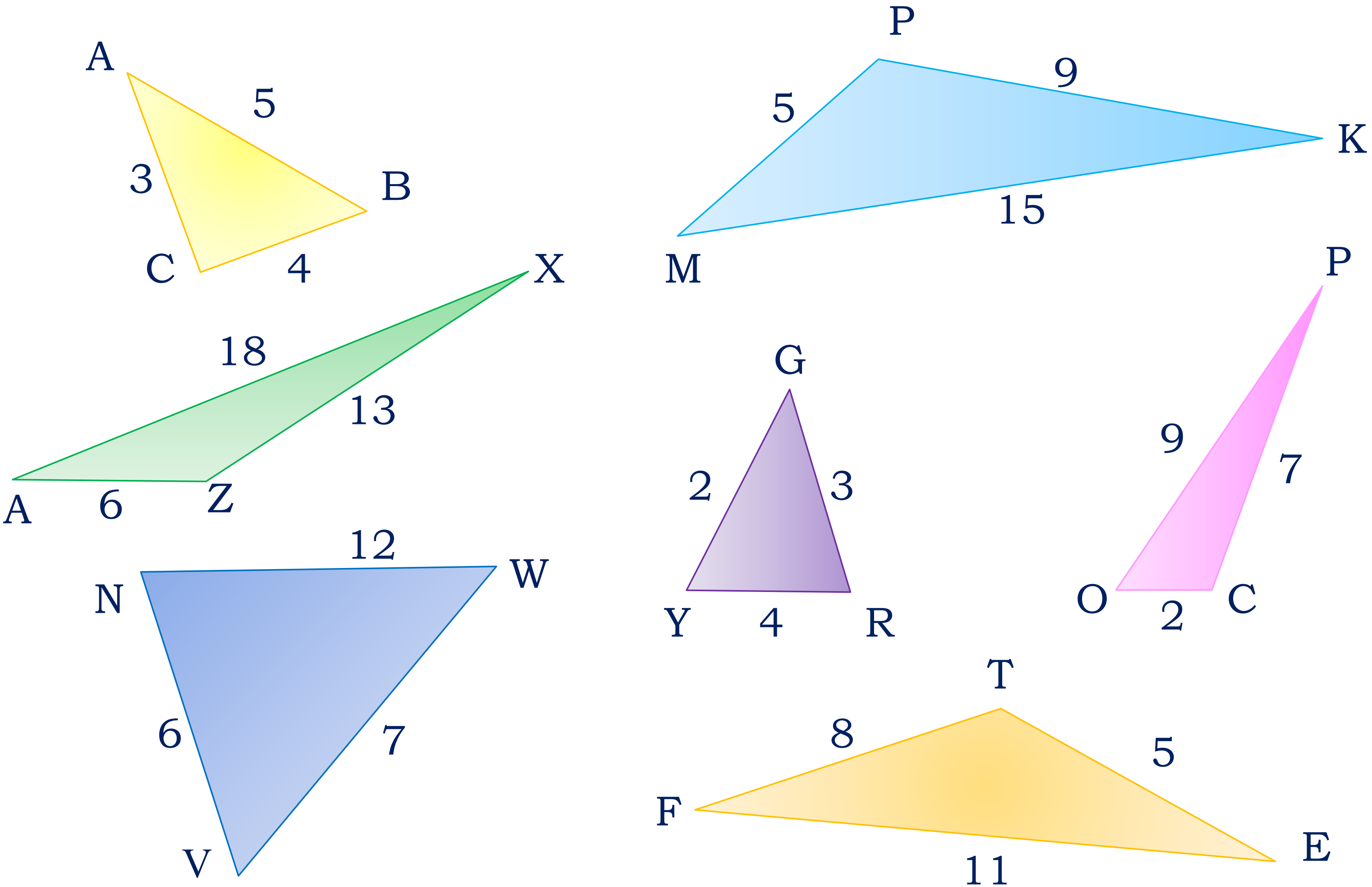
$$AB > AC - BC$$

$$AC - BC < AB < AC + BC$$

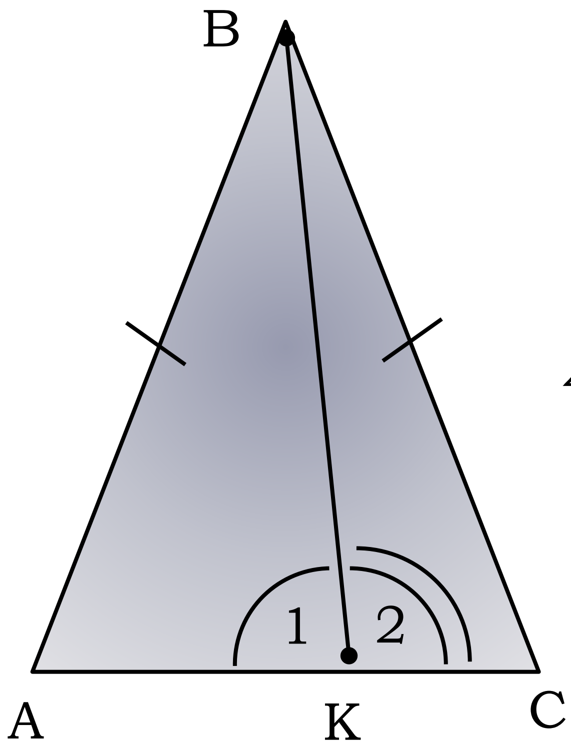
$$AB - BC < AC < AB + BC$$

$$AB - AC < BC < AB + AC$$

Среди данных треугольников найди не существующие:



№ 238. Доказать, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.



$$Дано: \Delta ABC,\ AB = BC,\ K \in AC$$

$$Доказать: BK < AB$$

$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные.

Один из них острый, другой – прямой, либо они оба прямые.

Поэтому один из треугольников ABK и CBK остроугольный, другой- тупоугольный, либо они оба прямоугольные.

1 случай: ΔCBK -тупоугольный

$$\angle C < \angle 2 \quad \Rightarrow$$

$$BK < BC,\ BK < AB$$

2 случай: ΔCBK-прямоугольный

$$\angle 2 = 90^0 \quad BC – гипотенуза$$

$$BK – катет,\ \Rightarrow\ BK < AB$$

№ 239. Доказать, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

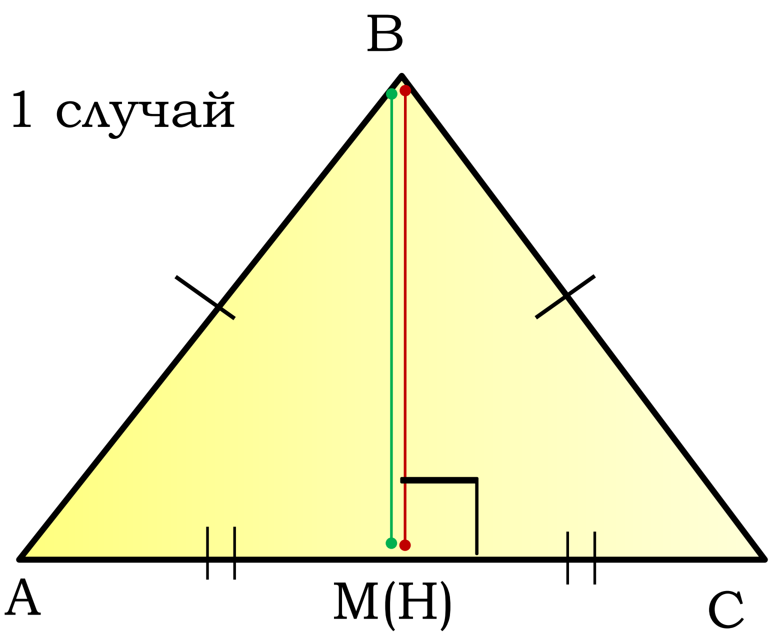
$Дано: \Delta ABC,$

$AM = MC\ (BM - медиана),$

$BH \perp AC\ (BH - высота).$

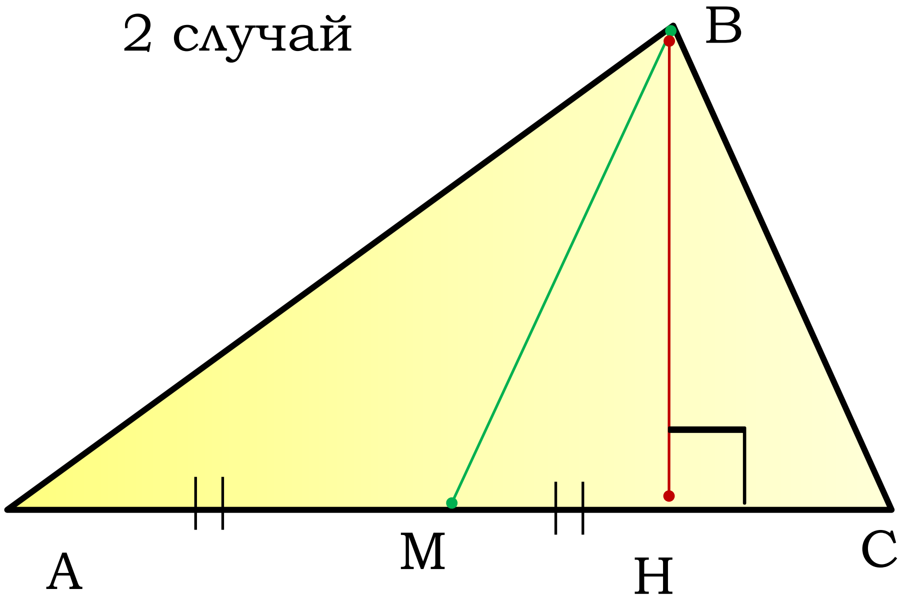
$Доказать: BM \geq BH$

1 случай



BM=BH (Почему?)

2 случай



BM>BH (Почему?)

№ 240. В равнобедренном треугольнике АВС с основанием АС биссектрисы углов А и С пересекаются в точке О. Доказать, что Δ АОС - равнобедренный

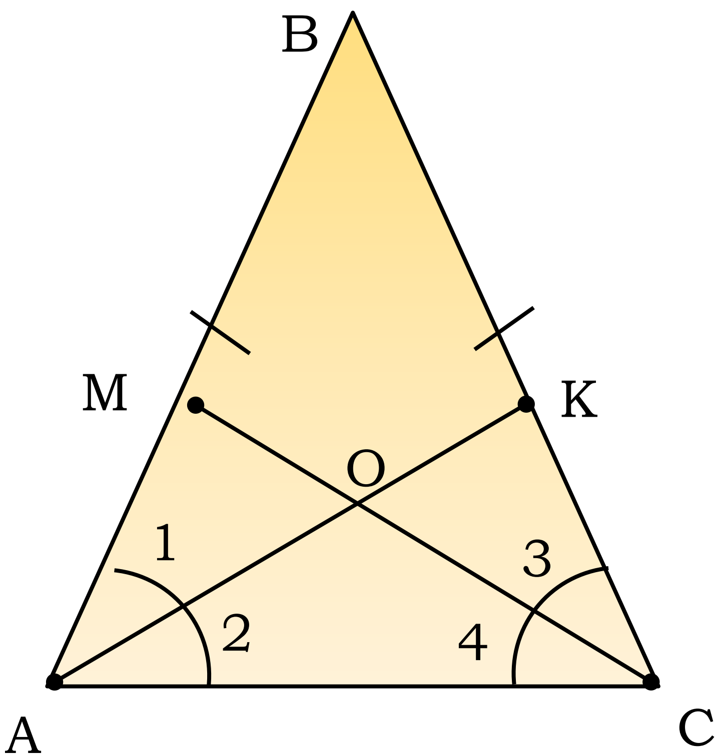
$Дано: \Delta ABC,\ AB = BC,$

AK – биссектриса угла A $(\angle 1 = \angle 2)$,

CM – биссектриса угла C $(\angle 3 = \angle 4)$,

$O = AK \cap CM$

$Доказать: \Delta AOC$ – равнобндренный

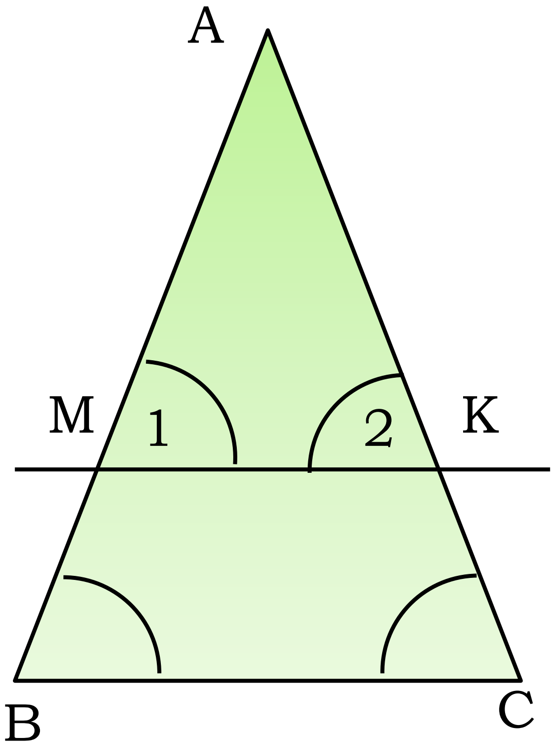


$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle 1 = \angle 2 = \dfrac{1}{2}\angle A \\ \angle 3 = \angle 4 = \dfrac{1}{2}\angle C \end{cases}$$

$$\angle 2 = \angle 4 \quad \Rightarrow$$

ΔAOC – равнобедренный

№ 241. Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и AC в точках M и K. Докажите, что ΔAMK - равнобедренный



$$\text{Дано}: \Delta ABC,\ AB = AC,\ MK \parallel BC$$

$$\text{Доказать}: \Delta AMK - \text{равнобедренный}$$

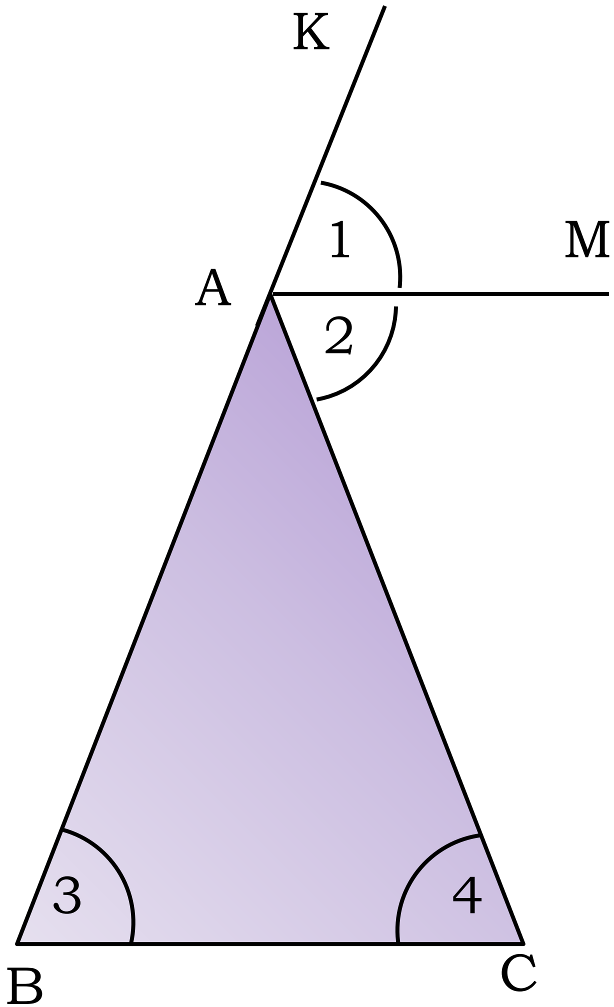
$$MK \parallel BC \Rightarrow \angle 1 = \angle B$$

$$MK \parallel BC \Rightarrow \angle 2 = \angle C$$

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle B \\ \angle 2 = \angle C \\ \angle B = \angle C \end{cases} \Rightarrow \quad \angle 1 = \angle 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta AMK - \text{равнобедренный}$$

№ 242. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна третьей стороне треугольника, то треугольник - равнобедренный



$$\text{Дано}: \Delta ABC,\ \angle KAC - \text{внешний},$$
$$AM - \text{биссектриса } \angle KAC\ (\angle 1 = \angle 2),\ AM \parallel BC$$

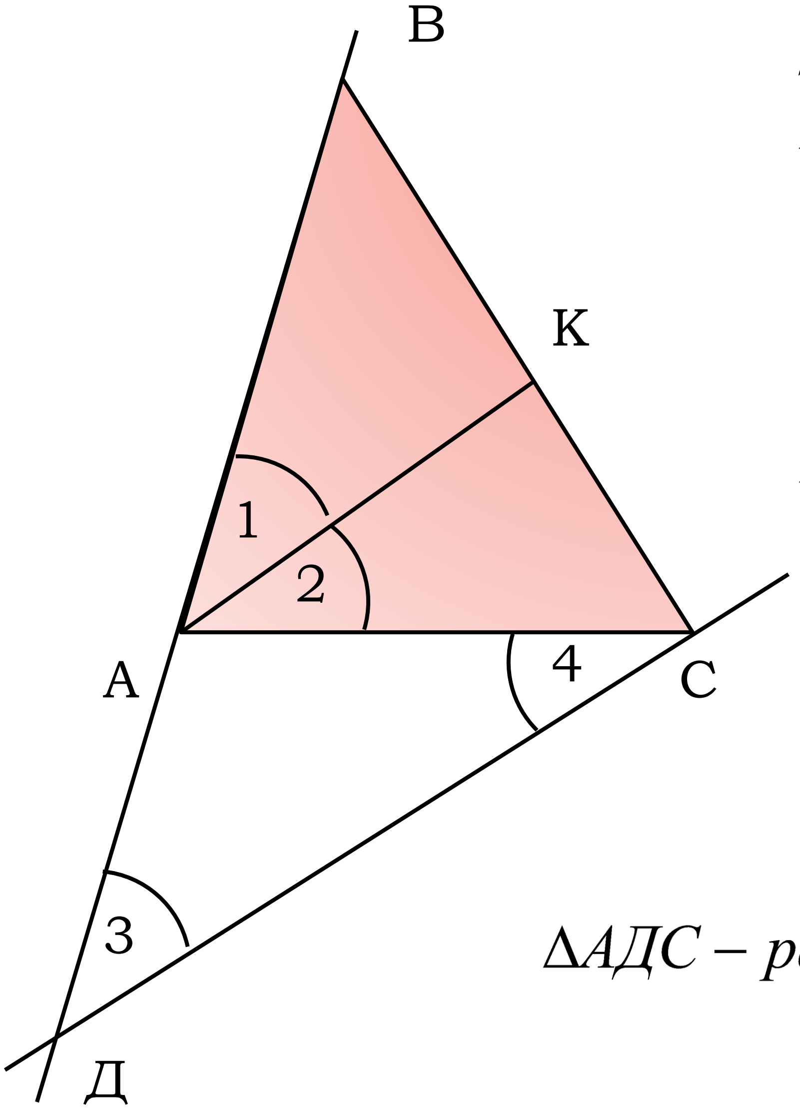
$$\text{Доказать}: \Delta ABC - \text{равнобедренный}$$

$$AM \parallel BC \Rightarrow \angle 1 = \angle 3\ (\text{соответственные})$$
$$AM \parallel BC \Rightarrow \angle 2 = \angle 4\ (\text{накрест лежащие})$$

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 1 = \angle 3 \\ \angle 2 = \angle 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \angle 3 = \angle 4 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta ABC - \text{равнобедренный}$$

№ 243. Через вершину С треугольника АВС проведена прямая, параллельная его биссектрисе АК и пересекающая прямую АВ в точке Д. Докажите, что АС = АД.



$\text{Дано}: \Delta ABC,$

$AK - \text{биссектриса}\ (\angle 1 = \angle 2),\ CД \parallel AK$

$\text{Доказать}: AC = AД$

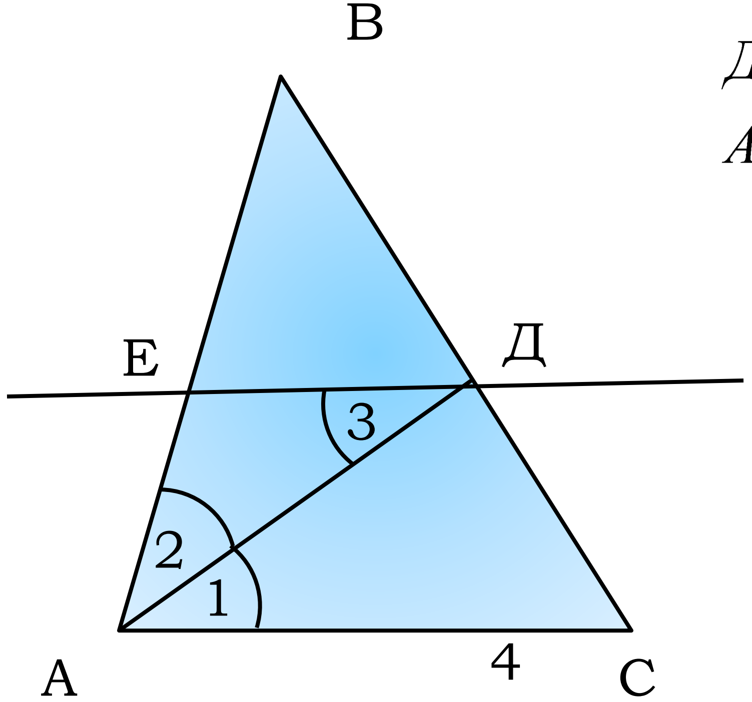
$AK \parallel CД \Rightarrow \angle 1 = \angle 3\ (\text{соответственные})$

$AK \parallel CД \Rightarrow \angle 2 = \angle 4\ (\text{накрест лежащие})$

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 1 = \angle 3 \\ \angle 2 = \angle 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \angle 3 = \angle 4 \quad \Rightarrow$$

$\Delta AДC - \text{равнобедренный, то есть } AC = AД$

№ 244. Отрезок АД – биссектриса треугольника АВС. Через точку Д проведена прямая, параллельная АС и пересекающая сторону АВ в точке Е. Докажите, что Δ АДЕ - равнобедренный.



$Дано: \Delta ABC,$

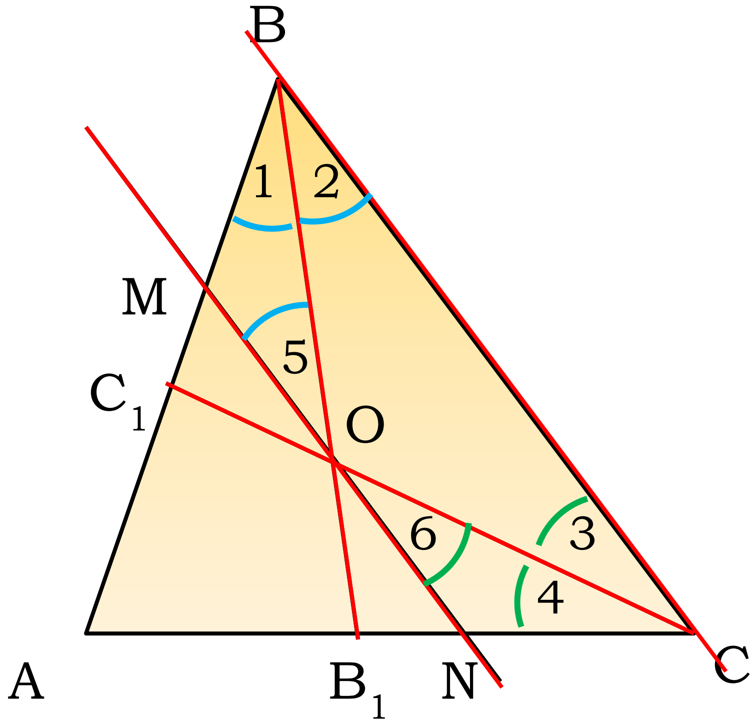
$AД - биссектриса\ (\angle 1 = \angle 2),\ ДE \parallel AC$

$Доказать: \Delta AДE - равнобедренный$

$$ДE \parallel AC \Rightarrow \angle 1 = \angle 3\ (накрест\ лежащие)$$

$$\Delta AДE - равнобедренный$$

№ 245. Через точку пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что MN=BM + CN.



$$Дано: \Delta ABC,$$

$$BB_1 - биссектриса\ (\angle 1 = \angle 2),$$

$$CC_1 - биссектриса\ (\angle 3 = \angle 4),$$

$$O = BB_1 \cap CC_1$$

$$MN \parallel BC$$

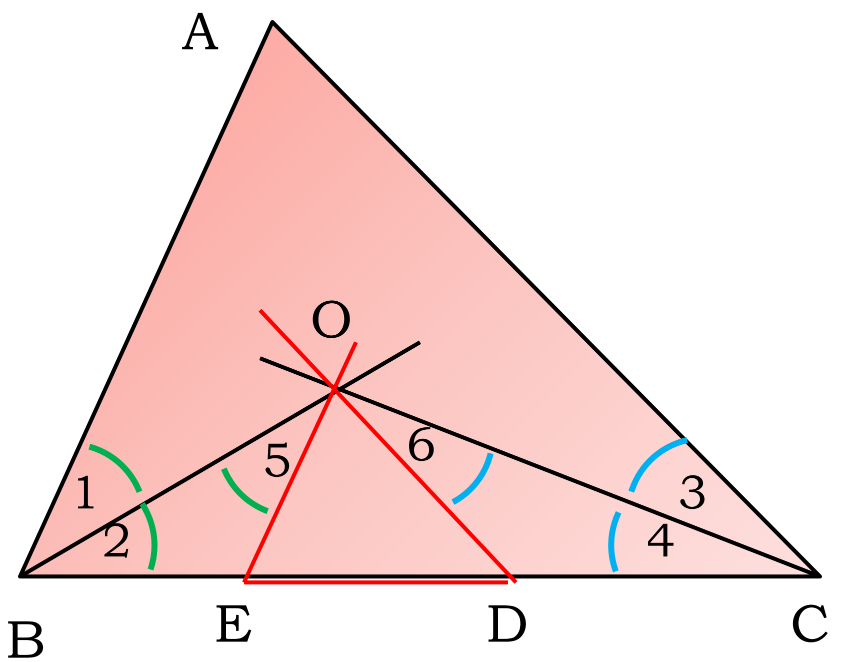
$$Доказать: MN = BM + CN$$

$$MN \parallel BC,\ BB_1 - секущая \Rightarrow \angle 2 = \angle 5\ (накрест\ лежащие) \Rightarrow BM = OM$$

$$MN \parallel BC,\ CC_1 - секущая \Rightarrow \angle 3 = \angle 6\ (накрест\ лежащие) \Rightarrow CN = ON$$

$$MN = OM + ON = BM + CN$$

№ 246. На рисунке BO и CO – биссектрисы углов B и C треугольника ABC. OE || AB, OD||AC. Доказать, что периметр треугольника EDO равен длине отрезка BC.



$Дано: \Delta ABC,$

$BO - биссектриса\ (\angle 1 = \angle 2),$

$CO - биссектриса\ (\angle 3 = \angle 4),$

$OE \parallel AB,\ OD \parallel AC$

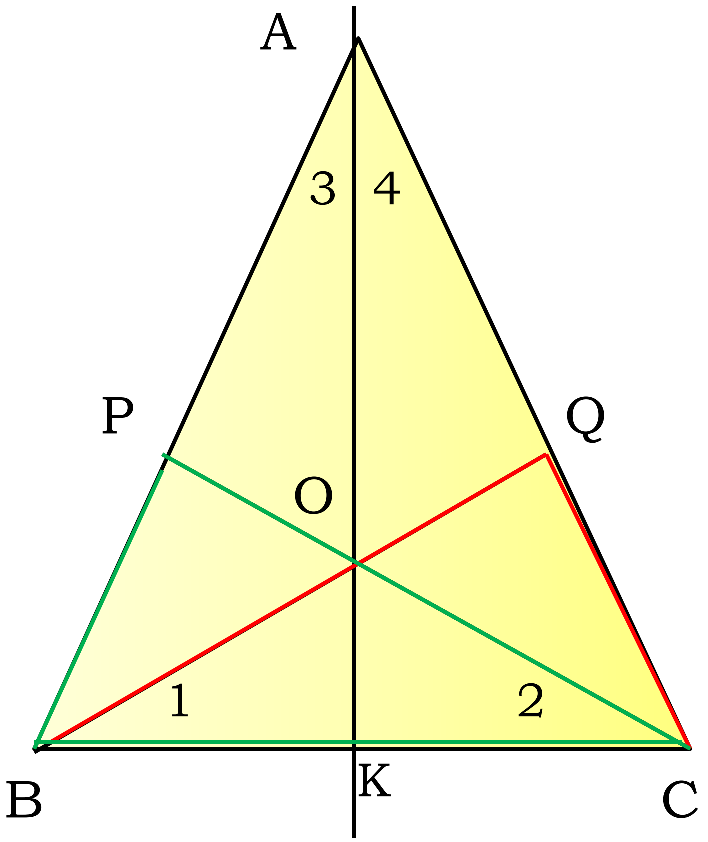
$Доказать: P_{EDO} = BC$

$$AB \parallel OE, BO - секущая \Rightarrow \angle 1 = \angle 5\ (накрест\ лежащие) \Rightarrow BE = OE$$

$$AC \parallel OD, OC - секущая \Rightarrow \angle 3 = \angle 6\ (накрест\ лежащие) \Rightarrow OD = DC$$

$$P_{EDO} = OE + ED + OD = BE + ED + DC = BC$$

№ 247. На рисунке AB=AC, AP=AQ. Доказать, что: а) Δ BOC - равнобедренный; б) Прямая OA проходит через середину основания BC и перпендикулярна к нему.



$Дано: \Delta ABC,\ AB = AC,\ AP = AQ$

$Доказать:$

$а)\ \Delta BOC - равнобедренный;$

$б)\ BK = KC,\ \ AO \perp BC$

$\Delta BCP = \Delta QBC\ (Почему?)$

$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \Delta BOC - равнобедренный$

$\Delta ABO = \Delta ACO\ (Почему?)$

$\angle 3 = \angle 4 \Rightarrow AK - биссектриса$

$\Delta ABC - равнобедренный,\ AK - биссектриса,\ а\ значит...$