

Интегрирование методом замены переменной



Цель урока:

- Способствовать формированию представлений об интегрировании методом замены переменной.
- Способствовать формированию умения применять метод замены переменной при нахождении интегралов.



Интегрирование методом замены переменных (способ подстановки):

Нужно выполнить преобразование:

$$\int f(x)dx \Rightarrow \int F(u)du$$

1. Заменяем переменную: $x = \varphi(u)$
2. Дифференцируем: $dx = \varphi'(u)du$

3. Подставляем вместо x и dx значения u и du :

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int F(u)du$$

4. С помощью подстановки: $u = \psi(x)$
Приводим интеграл к переменной x .

Примеры. Найти следующие интегралы:

$$1) \int (3x + 2)^5 dx$$

$$3x + 2 = u$$

$$3dx = du$$

$$dx = \frac{1}{3} du$$

$$\int (3x + 2)^5 dx = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{18} u^6 + C$$

$$\int (3x + 2)^5 dx = \frac{1}{18} u^6 + C = \frac{1}{18} (3x + 2)^6 + C$$

Проверка:

$$d\left[\frac{1}{18} (3x + 2)^6 + C\right] = \frac{6}{18} (3x + 2)^5 \cdot 3 dx = (3x + 2)^5 dx$$

$$2) \int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$$

$$2x^3 + 1 = u$$

$$6x^2 dx = du$$

$$x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx = \frac{1}{6} \int u^4 du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{30} (2x^3 + 1)^5 + C$$

$$3) \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3}$$

$$x^2 + 1 = u$$

$$2x dx = du$$

$$x dx = \frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3} = \int (x^2 + 1)^{-3} x dx = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(x^2 + 1)^2} + C$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1}$$

$$5x^3 + 1 = u$$

$$15x^2 dx = du$$

$$x^2 dx = \frac{1}{15} du$$

$$\int \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1} = \frac{1}{15} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{15} \ln u + C = \frac{1}{15} \ln|5x^3 + 1| + C$$

$$5) \int \operatorname{tg} kx dx$$

$$\int \operatorname{tg} kx dx = \int \frac{\sin kx}{\cos kx} dx$$

$$\cos kx = u$$

$$-k \sin kx dx = du$$

$$\sin kx = -\frac{1}{k} du$$

$$\int \operatorname{tg} kx dx = -\frac{1}{k} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{k} \ln|u| + C = -\frac{1}{k} \ln|\cos kx| + C$$

$$6) \int \frac{du}{\sin u}$$

$$\sin u = 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}$$

Разделим и умножим знаменатель на $\cos(u/2)$:

$$\int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\operatorname{tg} \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = z$$

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{2} du = dz$$

$$\frac{du}{\cos^2 \frac{u}{2}} = 2dz$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$7) \int \frac{du}{\cos u}$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{du}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)}$$

$$\frac{\pi}{2} + u = z$$

$$du = dz$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{dz}{\sin z} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\frac{\pi}{2} + u}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| + C$$